離散数学 第 10 回
関係 (1)：関係

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 6 月 29 日

最終更新：2017 年 6 月 28 日　15:55

スケジュール 前半

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 13 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 20 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (4 月 27 日)
- ＊ 休講 (みどりの日) (5 月 4 日)
4. 証明法 (1)：∃と∀を含む命題の証明 (5 月 11 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 18 日)
6. 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 25 日)
7. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (6 月 1 日)

スケジュール 後半 (予定)

8. 写像 (1)：像と逆像 (6 月 8 日)
- 中間試験 (6 月 15 日)
9. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 22 日)
10. 関係 (1)：関係 (6 月 29 日)
- ＊ 休講 (出張) (7 月 6 日)
11. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 13 日)
12. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 20 日)
- ＊ 休講 (出張) (7 月 27 日)
- 期末試験 (8 月 3 日？)

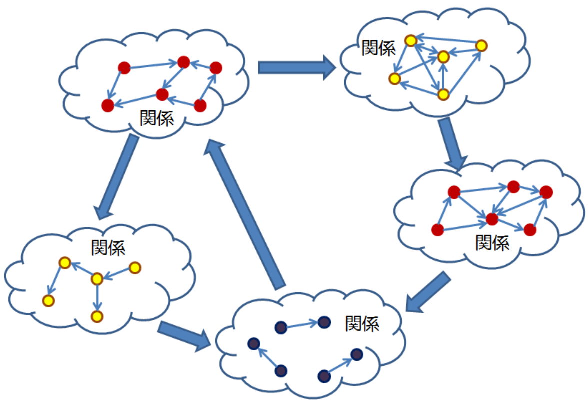
注意：予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標
- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標
- 関係を理解する
- 関係の性質を理解し，それらを持つかどうか判定できる
  - 反射性，完全性，対称性，反対称性，推移性
- 特殊な関係を理解し，それらの例を挙げられる
  - 順序 (半順序)，全順序，同値関係

ここまでのまとめ と ここからの話



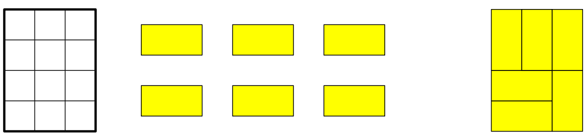
目次

タイル張り

問題

4×3 の長方形の中に 2×1 の長方形を 6 個敷き詰める方法は
全部で何通りあるか？

2×1 の長方形は回転させてもよい

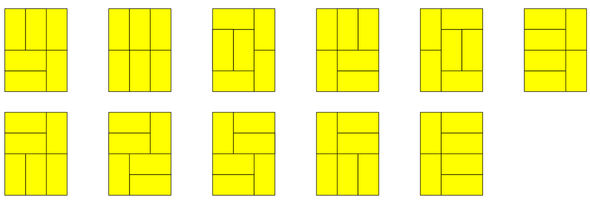


タイル張り

問題

4×3 の長方形の中に 2×1 の長方形を 6 個敷き詰める方法は
全部で何通りあるか？

答え：11 個

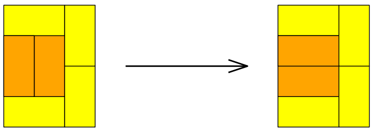


疑問

どうやって見つける？ ⇝ 頑張って見つける？

タイル張り：局所変更

- タイル張りにおいて，2×1 の長方形 2 個によって 2×2 の正方形が作られている部分があるとする
- その 2 つの長方形の向きを変えると，別のタイル張りが得られる

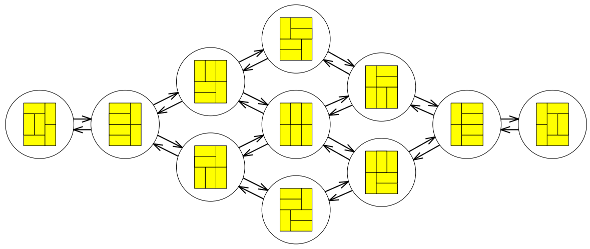


2 つのタイル張りは，
この局所変更によって移りあう，という 関係 を持っている

タイル張り：局所変更

知られていること (証明はしない)

この局所変更を繰り返していくと，全てのタイル張りが得られる

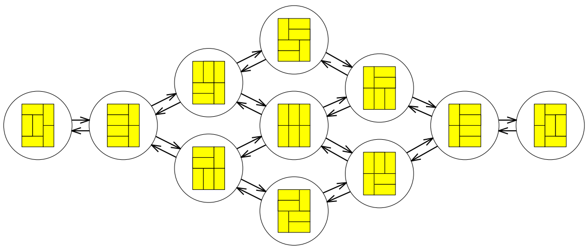


つまり，可能な局所変更をすべて考えれば，
11 通りのタイル張りが得られ，他にはないことも分かる

タイル張り：局所変更

知られていること (証明はしない)

この局所変更を繰り返していくと，全てのタイル張りが得られる



格言

集合の構造を調べて，集合の性質を深く理解する

目次

関係とは？

集合 A

関係とは？ (常識に基づく定義)

A 上の関係は次のように定められるもの

- 関係を表す記号「R」がある (例えば，$\leq$ や $=$ や $\subseteq$)
- 任意の $x, y \in A$ に対して
  「$x \mathrel{\mathrm{R}} y$」が成り立つ (真) か成り立たない (偽) か，のどちらか

注：$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ が成り立っても，$y \mathrel{\mathrm{R}} x$ が成り立つとは限らない

例 1

例 1

- $A = \{1, 2, 3, 6\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して
  $x \mid y$ であることを x は y の約数である
  と定義する

集合 A 上の「$\mid$」という関係

$1 \mid 1$	T	$2 \mid 1$	F	$3 \mid 1$	F	$6 \mid 1$	F
$1 \mid 2$	T	$2 \mid 2$	T	$3 \mid 2$	F	$6 \mid 2$	F
$1 \mid 3$	T	$2 \mid 3$	F	$3 \mid 3$	T	$6 \mid 3$	F
$1 \mid 6$	T	$2 \mid 6$	T	$3 \mid 6$	T	$6 \mid 6$	T

補足：整数の整除関係

$\mathbb{Z}_+ =$ 1 以上の整数 (正整数) をすべて集めた集合

整数の整除関係

整数 $x, y \in \mathbb{Z}_+$ に対して，

- ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して

$$y = xp$$

と書けるとき，x は y の約数であるという

関係の表現法 (1)：写像

写像としての関係の表現

A 上の関係 R を写像 $A^2 \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \mathrm{T} & (x \mathrel{\mathrm{R}} y \text{ が成り立つとき}) \\ \mathrm{F} & (x \mathrel{\mathrm{R}} y \text{ が成り立たないとき}) \end{cases}$$

で表現する

例 1 の場合

$(1,1) \mapsto \mathrm{T}$	$(2,1) \mapsto \mathrm{F}$	$(3,1) \mapsto \mathrm{F}$	$(6,1) \mapsto \mathrm{F}$
$(1,2) \mapsto \mathrm{T}$	$(2,2) \mapsto \mathrm{T}$	$(3,2) \mapsto \mathrm{F}$	$(6,2) \mapsto \mathrm{F}$
$(1,3) \mapsto \mathrm{T}$	$(2,3) \mapsto \mathrm{F}$	$(3,3) \mapsto \mathrm{T}$	$(6,3) \mapsto \mathrm{F}$
$(1,6) \mapsto \mathrm{T}$	$(2,6) \mapsto \mathrm{T}$	$(3,6) \mapsto \mathrm{T}$	$(6,6) \mapsto \mathrm{T}$

関係の表現法 (2)：直積の部分集合

集合としての関係の表現

A 上の関係 R を直積の部分集合

$$\{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in A \text{ かつ } x \mathrel{\mathrm{R}} y\} \subseteq A^2$$

で表現する

例 1 の場合

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6),(2,2),(2,6),(3,3),(3,6),(6,6)\}$$

関係の表現法 (3)：行列

行列としての関係の表現

A 上の関係 R を行列 $M \in \{0,1\}^{A \times A}$ で

$$M_{x,y} = \begin{cases} 1 & (x \mathrel{\mathrm{R}} y \text{ が成り立つとき}) \\ 0 & (x \mathrel{\mathrm{R}} y \text{ が成り立たないとき}) \end{cases}$$

と定義されるもので表現する (「関係行列」と呼ばれることがある)

例 1 の場合

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

関係の表現法 (4)：グラフ

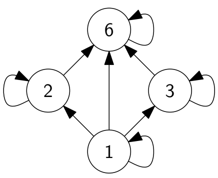
グラフとしての関係の表現

A 上の関係 R を

- 頂点集合を A として，
- $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ が成り立つとき，そのときに限り $x \to y$ という矢印を引く

グラフ (有向グラフ) で表現する

例 1 の場合



例 2

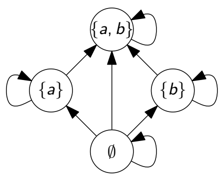
例 2

- $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- 任意の $X, Y \in A$ に対して

  $X \subseteq Y$ であることを X は Y の部分集合である

  と定義する

集合 A 上の「$\subseteq$」という関係



例 3

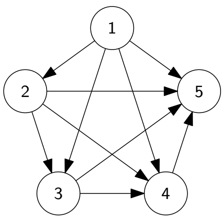
例 3

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

  $x < y$ であることを x は y より小さい

  と定義する

集合 A 上の「$<$」という関係



例 4

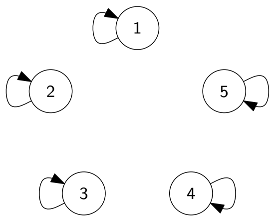
例 4

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

  $x = y$ であることを x は y と等しい

  と定義する

集合 A 上の「$=$」という関係



例 5

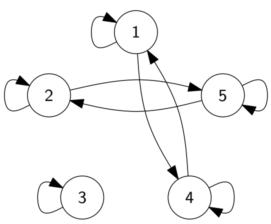
例 5

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

  $x \equiv_3 y$ であることを $x \equiv y \pmod 3$

  と定義する

集合 A 上の「$\equiv_3$」という関係



補足：合同な整数

合同な整数

0 以上の整数 m, n と 1 以上の整数 p を考える

- $m - n$ が p で割り切れるとき，すなわち，
  ある整数 q が存在して

  $$m - n = pq$$

  と書けるとき，$m \equiv n \pmod p$ と表記する
- $m \equiv n \pmod p$ であるとき
  「m と n は p を法として合同である」という

例：

- 5 と 11 は 3 を法として合同である
  - $\because 5 - 11 = -6 = 3 \cdot (-2)$
- 15869 と 6832 は 1291 を法として合同である
  - $\because 15869 - 6832 = 9037 = 1291 \cdot 7$

目次

関係の性質

関係を考えると何がよいのか？

- 関係を使って，集合の持つ構造を捉えることができる
- 2 つの集合の上のある関係が同じ性質を持つと，関係を使って，集合どうしを比較できるようになる

$\rightsquigarrow$ 関係の性質を考えたい

よく出てくる性質

- 反射性
- 完全性
- 対称性
- 反対称性
- 推移性

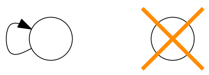
反射性

集合 A と A 上の関係 R

反射性とは？

R が反射性を持つとは，次を満たすこと

任意の $x \in A$ に対して $x \mathrm{R} x$

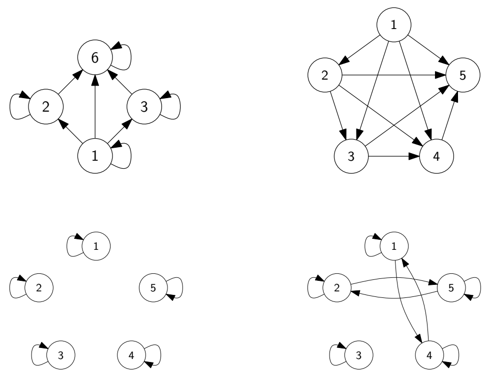


補足：「反射性を持つ」と言わず，次のように言うこともある

- 反射性を満たす，反射性が成り立つ
- 反射律を満たす，反射則を満たす，反射法則を満たす
- 反射律が成り立つ，反射則が成り立つ，反射法則が成り立つ

次の「完全性」,「対称性」,「反対称性」,「推移性」についても同様

反射性を持つのはどれ？



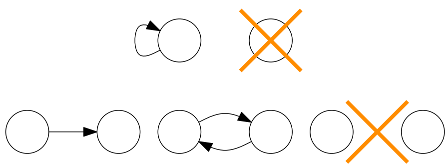
完全性

集合 A と A 上の関係 R

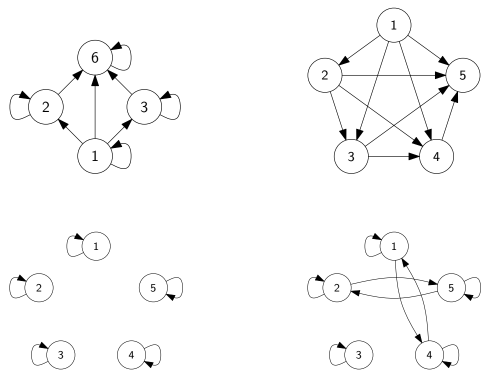
完全性とは？

R が完全性を持つとは，次を満たすこと

任意の $x, y \in A$ に対して $x \mathrm{R} y$ または $y \mathrm{R} x$



完全性を持つのはどれ？



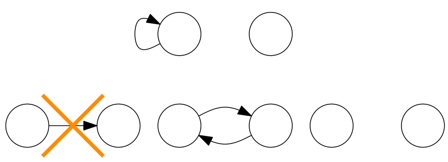
対称性

集合 A と A 上の関係 R

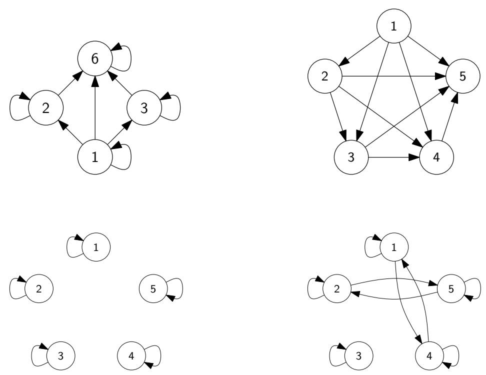
対称性とは？

R が対称性を持つとは，次を満たすこと

任意の $x, y \in A$ に対して $x \mathrm{R} y$ ならば $y \mathrm{R} x$



対称性を持つのはどれ？



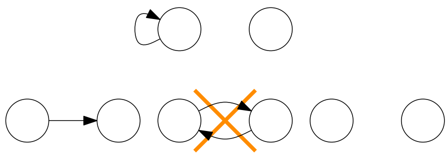
反対称性

集合 A と A 上の関係 R

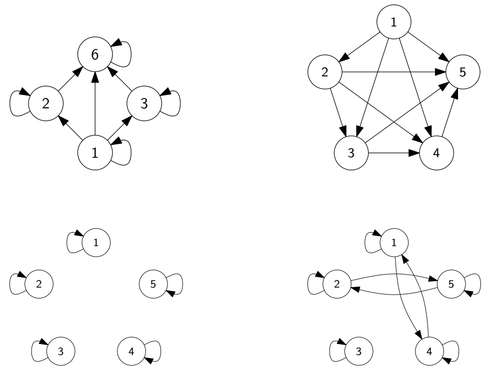
反対称性とは？

R が反対称性を持つとは，次を満たすこと

任意の $x, y \in A$ に対して $x \,\mathrm{R}\, y$ かつ $y \,\mathrm{R}\, x$ ならば $x = y$



反対称性を持つのはどれ？



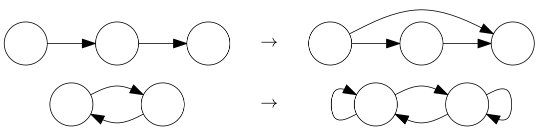
推移性

集合 A と A 上の関係 R

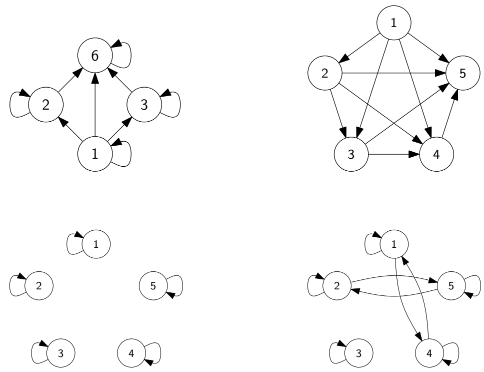
推移性とは？

R が推移性を持つとは，次を満たすこと

任意の $x, y, z \in A$ に対して $x \,\mathrm{R}\, y$ かつ $y \,\mathrm{R}\, z$ ならば $x \,\mathrm{R}\, z$



推移性を持つのはどれ？



目次

半順序

集合 A と A 上の関係 R

半順序とは？

R が半順序であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は反対称性を持つ
- R は推移性を持つ

例 1〜5 の中で，例 1，2 は半順序

代表的な半順序 (1)

代表的な半順序 (1)：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x \leq y$ であることは x が y 以下であること

として定義する

今からやること

この関係 $\leq$ が半順序であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性
- 反対称性
- 推移性

代表的な半順序 (1) 続き

代表的な半順序 (1)：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x \leq y$ であることは x が y 以下であること

として定義する

反射性：定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq x$

反対称性：定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$

推移性：定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$

どれも当然成り立つ □

代表的な半順序 (2)

代表的な半順序 (2)：集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 $\subseteq$ を，任意の $X, Y \in 2^A$ に対して

$X \subseteq Y$ であることは X が Y の部分集合であること

として定義する

今からやること

この関係 $\subseteq$ が半順序であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性
- 反対称性
- 推移性

代表的な半順序 (2) 続き

代表的な半順序 (2)：集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 $\subseteq$ を，任意の $X, Y \in 2^A$ に対して

$X \subseteq Y$ であることは X が Y の部分集合であること

として定義する

反射性：定義に立ち戻って書き換えた

任意の $X \in 2^A$ に対して，$X \subseteq X$

反対称性：定義に立ち戻って書き換えた （第 6 回講義スライド 9 ページ）

任意の $X, Y \in 2^A$ に対して，$X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ ならば $X = Y$

推移性：定義に立ち戻って書き換えた （第 6 回講義スライド 28 ページ）

任意の $X, Y, Z \in 2^A$ に対して，$X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq Z$ ならば $X \subseteq Z$

どれも成り立つことを既に確認した □

代表的な半順序 (3)

代表的な半順序 (3)：整数の整除関係

1 以上の整数全体の集合 $\mathbb{Z}_+$ 上の関係 $|$ を，任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$a \mid b$ であることは a が b の約数であること

として定義する

今からやること

この関係 $|$ が半順序であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性
- 反対称性
- 推移性

代表的な半順序 (3) 続き

代表的な半順序 (3)：整数の整除関係

1 以上の整数全体の集合 $\mathbb{Z}_+$ 上の関係 $|$ を，任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$a \mid b$ であることは a が b の約数であること

として定義する

反射性：定義に立ち戻って書き換えた これが正しいことはすぐ分かる

任意の $a \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid a$

反対称性：定義に立ち戻って書き換えた 次のページで証明

任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$

推移性：定義に立ち戻って書き換えた 後のページで確認

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid b$ かつ $b \mid c$ ならば $a \mid c$

代表的な半順序 (3)：反対称性の証明

証明すること

任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$

- $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び， $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する．
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$ ....(1)
- $b \mid a$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$a = bq$ ....(2)
- したがって，$b \overset{(1)}{=} ap \overset{(2)}{=} (bq)p = bqp$
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$p = 1, q = 1$
- $a = bq$ かつ $q = 1$ なので，$a = b$ □

代表的な半順序 (3)：推移性の証明

証明すること

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid b$ かつ $b \mid c$ ならば $a \mid c$

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び，$a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する．
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$ ....(1)
- $b \mid c$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = bq$ ....(2)
- $r = pq$ とする．..(3)
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$r = pq \in \mathbb{Z}_+$
- また，$c \overset{(2)}{=} bq \overset{(1)}{=} (ap)q = a(pq) \overset{(3)}{=} ar$．
- したがって，ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = ar$
- したがって，$a \mid c$． □

全順序

集合 A と A 上の関係 R

全順序とは？

R が全順序であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は反対称性を持つ
- R は推移性を持つ
- R は完全性を持つ

例 1〜5 の中に，全順序はない

- 注：単に「順序」と言ったら，普通は「半順序」のことを指す
- 注：全順序のことを線形順序と呼ぶこともある

代表的な全順序

代表的な全順序：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x \leq y$ であることは x が y 以下であること

として定義する

今からやること

この関係 $\leq$ が全順序であることを証明する

次の 4 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性，反対称性，推移性，完全性

反射性，反対称性，推移性は既に確認した

完全性：定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq y$ か $y \leq x$

これも当然成り立つ □

同値関係

集合 A と A 上の関係 R

同値関係とは？

R が同値関係であるとは，次を満たすこと
- R は反射性を持つ
- R は対称性を持つ
- R は推移性を持つ

例 1〜5 の中で，同値関係は例 4，5

代表的な同値関係 (1)

代表的な同値関係 (1)：実数の相等関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $=$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x = y$ であることは x が y と等しいこと

として定義する

今からやること

この関係 $=$ が同値関係であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい
- 反射性
- 対称性
- 推移性

代表的な同値関係 (1) 続き

代表的な同値関係 (1)：実数の相等関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $=$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x = y$ であることは x が y と等しいこと

として定義する

反射性：定義に基づいて書き換えた

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x = x$

対称性：定義に基づいて書き換えた

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x = y$ ならば $y = x$

推移性：定義に基づいて書き換えた

任意の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して，$x = y$ かつ $y = z$ ならば $x = z$

これらは当然成り立つ $\square$

代表的な同値関係 (2)

代表的な同値関係 (2)：整数の合同関係

1 以上の任意の整数 p に対して，
0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上の関係 $\equiv_p$ を，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$m \equiv_p n$ であることは $m \equiv n \pmod p$ が成り立つこと

として定義する

今からやること

この関係 $\equiv_p$ が同値関係であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい
- 反射性
- 対称性
- 推移性

代表的な同値関係 (2) 続き

代表的な同値関係 (2)：整数の合同関係

1 以上の任意の整数 p に対して，
0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上の関係 $\equiv_p$ を，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$m \equiv_p n$ であることは $m \equiv n \pmod p$ が成り立つこと

として定義する

反射性：次のページで証明

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \equiv_p n$

対称性：後のページで証明

任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m \equiv_p n$ ならば $n \equiv_p m$

推移性：後のページで証明

任意の $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$\ell \equiv_p m$ かつ $m \equiv_p n$ ならば $\ell \equiv_p n$

代表的な同値関係 (2)：反射性の証明

- 任意に $n \in \mathbb{N}$ を選ぶ.
- このとき，整数 0 を考えると，$n - n = 0 = p \cdot 0$.
- したがって，$n \equiv n \pmod p$. $\square$

$m \equiv n \pmod p$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な同値関係 (2)：対称性の証明

- 任意に $m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $m \equiv n \pmod p$ と仮定する
- このとき，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$
- 整数 $-q \in \mathbb{Z}$ を考えると，$n - m = p \cdot (-q)$
- したがって，$n \equiv m \pmod p$ $\square$

$m \equiv n \pmod p$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod p$ および $m \equiv n \pmod p$ と仮定する
- $\ell \equiv m \pmod p$ から，ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - m = pq_1$ . . . .(1)
- $m \equiv n \pmod p$ から，ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq_2$ . . . (2)
- $q = q_1 + q_2$ とする . . . . (3)
- このとき，$q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より，$q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$
- また，$\ell - n = (\ell - m) + (m - n) \overset{(1),(2)}{=} pq_1 + pq_2 = p(q_1 + q_2) \overset{(3)}{=} pq$.
- したがって，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - n = pq$ となる
- したがって，$\ell \equiv n \pmod p$ $\square$

$m \equiv n \pmod p$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

目次

今日のまとめ

この講義の目標
- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

関係とそれにまつわる概念
- 関係を理解する
- 関係の性質を理解する
  - 反射性，完全性，対称性，反対称性，推移性
- 特殊な関係を理解する
  - 順序 (半順序)，全順序，同値関係

- 登場した「関係」は「2 つのものの間の関係」だけだった
- 3 つのものの間の関係は？
- それ以上のものの間の関係は？

n 項関係とは？

n 項関係とは？ (常識に基づく定義)

A 上の n 項関係は次のように定められるもの
- 関係を表す写像「$A^n \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$」がある
- 任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ に対して
  その関数の値が「T」か「F」のどちらかに決まる

この一般化の下で，講義で扱った「関係」は「二項関係」と呼ばれる．