離散数学 第 9 回
写像 (2)：全射と単射

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 6 月 22 日

最終更新：2017 年 6 月 21 日　15:26

スケジュール 前半

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 13 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 20 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (4 月 27 日)

* 休講 (みどりの日) (5 月 4 日)

4. 証明法 (1)：∃ と ∀ を含む命題の証明 (5 月 11 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 18 日)
6. 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 25 日)
7. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (6 月 1 日)

スケジュール 後半 (予定)

8. 写像 (1)：像と逆像 (6 月 8 日)

- 中間試験 (6 月 15 日)

9. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 22 日)
10. 関係 (1)：関係 (6 月 29 日)

* 休講 (出張) (7 月 6 日)

11. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 13 日)
12. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 20 日)

* 休講 (出張) (7 月 27 日)

- 期末試験 (8 月 3 日？)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 特殊な写像「全射」,「単射」,「全単射」を理解して，
  その性質と違いを論述できるようになる
- 写像の逆写像を理解し，
  その存在性の判定，および構成ができるようになる

目次

マンツーマンディフェンス

全単射の例

新幹線の指定席

単射の例

目次

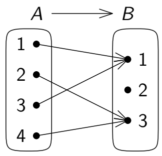
全射

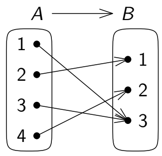
集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

全射とは？

f が全射であるとは，次を満たすこと

任意の $b \in B$ に対して，ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$





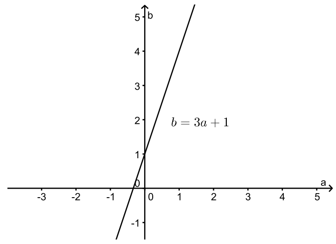
論理を用いて書けば，$\forall\, b \in B\ (\exists\, a \in A\ (b = f(a)))$

例題 1

例題 1

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$



例題 1：続き

例題 1

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

全射の定義に立ち戻って書き直す

任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$

論理を用いて書けば，$\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))$

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 1：証明

例題 1

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

論理を用いて書けば，$\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))$

証明：

任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

(ここで,「ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となることを証明する)

したがって，f は全射である． □

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

例題 1：証明

例題 1

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

論理を用いて書けば，$\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = 3a + 1))$

証明：

任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

$a = \dfrac{b-1}{3}$ とする．

$b \in \mathbb{R}$ なので，$a \in \mathbb{R}$ である．

また，$3a + 1 = 3 \cdot \dfrac{b-1}{3} + 1 = b$ となる．

したがって，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$

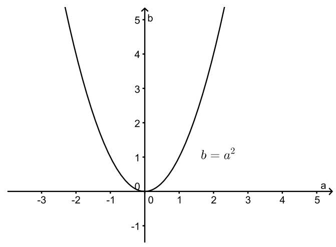
したがって，f は全射である． □

例題 2

例題 2

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射ではないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$



例題 2：続き (1)

例題 2

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射ではないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = a^2$」ではない

論理で書いて，同値変形を用いて整理する

$$
\begin{aligned}
& \neg(\forall\, b \in \mathbb{R}\ (\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = a^2))) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, b \in \mathbb{R}\ (\neg(\exists\, a \in \mathbb{R}\ (b = a^2))) && (\forall \text{ の否定}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (\neg(b = a^2))) && (\exists \text{ の否定}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))
\end{aligned}
$$

例題 2：続き (2)

例題 2

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射ではないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

論理で書いて整理する：$\exists\, b \in \mathbb{R}\ (\forall\, a \in \mathbb{R}\ (b \neq a^2))$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

例題 2：証明

例題 2

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射ではないことを証明せよ．

$$任意の\ a \in \mathbb{R}\ に対して\ f(a) = a^2$$

証明：

$-1 \in \mathbb{R}$ を考える．

（ここで，「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$」を証明する．）

したがって，f は全射ではない． □

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め，「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 2：証明

例題 2

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射ではないことを証明せよ．

$$任意の\ a \in \mathbb{R}\ に対して\ f(a) = a^2$$

証明：

$-1 \in \mathbb{R}$ を考える．

任意の $a \in \mathbb{R}$ を考える．

このとき，$a^2 \geq 0$ なので，$-1 \neq a^2$．

したがって，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$．

したがって，f は全射ではない． □

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの写像は全射か？

- $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(a) = a^2$
- $f_2\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_2(a) = a^2$
- $f_3\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_3(a) = a^2$
- $f_4\colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $f_4(a) = a^2$

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

目次

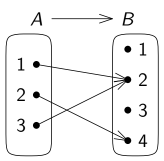
単射

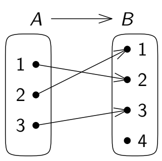
集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

単射とは？

f が単射であるとは，次を満たすこと

$$任意の\ a, a' \in A\ に対して，\quad f(a) = f(a')\ ならば\ a = a'$$





論理で書くと，$\forall\, a, a' \in A\ ((f(a) = f(a')) \to (a = a'))$

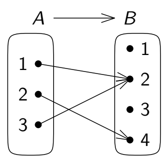
単射：同値変形で定義を書き換える

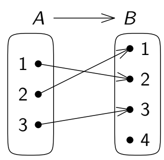
集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

単射とは？

f が単射であるとは，次を満たすこと

$$任意の\ a, a' \in A\ に対して，\quad f(a) = f(a')\ ならば\ a = a'$$





単射の定義にある性質は次と同値 (対偶法則による)

$$任意の\ a, a' \in A\ に対して，\quad a \neq a'\ ならば\ f(a) \neq f(a')$$

例題 3

例題 3

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ．

$$任意の\ a \in \mathbb{R}\ に対して\ f(a) = 3a + 1$$

定義に立ち戻って書き直す

任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$3a + 1 = 3a' + 1$ ならば $a = a'$

論理で書くと，$\forall\, a, a' \in \mathbb{R}\ (3a + 1 = 3a' + 1 \to a = a')$

例題 3：証明

例題 3

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ．

$$任意の\ a \in \mathbb{R}\ に対して\ f(a) = 3a + 1$$

論理で書くと，$\forall\, a, a' \in \mathbb{R}\ (3a + 1 = 3a' + 1 \to a = a')$

証明：

任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ を考える．

$3a + 1 = 3a' + 1$ であると仮定する． .... (1)

このとき，(1) の両辺から 1 を引き，3 で割ると，$a = a'$ が得られる．

したがって，f は単射である． □

例題 4

例題 4

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射ではないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

論理で書いて，整理する

$$
\begin{aligned}
& \neg(\forall\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \to a = a')) & \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (\neg(a^2 = a'^2 \to a = a')) & (\forall \text{ の否定}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (\neg(\neg(a^2 = a'^2) \vee a = a')) & (\text{実質含意}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (\neg\neg(a^2 = a'^2) \wedge \neg(a = a')) & (\text{ド・モルガンの法則}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, a, a' \in \mathbb{R}\ (a^2 = a'^2 \wedge a \neq a') & (\text{二重否定の除去})
\end{aligned}
$$

つまり，$a^2 = a'^2$ だが $a \neq a'$ となる $a, a' \in \mathbb{R}$ を見つければよい

例題 4

例題 4

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射ではないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

証明：

$a = 2 \in \mathbb{R}$ と $a' = -2 \in \mathbb{R}$ を考える．

このとき，$a^2 = 4 = a'^2$ であるが，$a \neq a'$ である．

したがって，f は単射ではない． □

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの写像は単射か？

- $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_1(a) = a^2$
- $f_2\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $\quad f_2(a) = a^2$
- $f_3\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\quad f_3(a) = a^2$
- $f_4\colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $\quad f_4(a) = a^2$

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

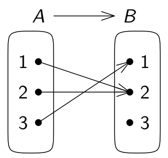
目次

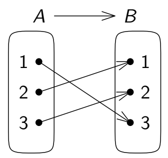
全単射

集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

全単射とは？

f が全単射であるとは，全射であり，かつ，単射であること



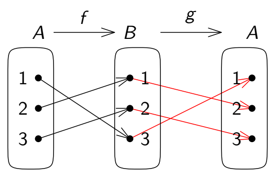


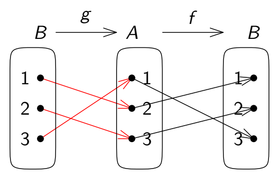
逆写像

集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

逆写像とは？

f の逆写像とは，写像 $g\colon B \to A$ で，$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たすもの　($\mathrm{id}_A\colon A \to A$，$\mathrm{id}_B$ は恒等写像)





この f の逆写像は存在する

記法

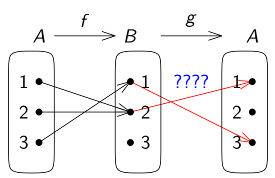
f の逆写像が存在するとき，それを f^{-1} で表す

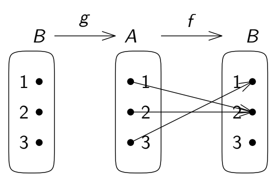
逆写像：存在しない場合

集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

逆写像とは？

f の逆写像とは，写像 $g\colon B \to A$ で，$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たすもの　($\mathrm{id}_A\colon A \to A$，$\mathrm{id}_B$ は恒等写像)





この f の逆写像は存在しない

記法

f の逆写像が存在するとき，それを f^{-1} で表す

逆写像が存在するための必要十分条件

集合 A, B，写像 $f\colon A \to B$

逆写像が存在するための必要十分条件 (重要)　(演習問題)

写像 f の逆写像が存在する $\Leftrightarrow$ f が全単射

証明は (長くなるので) 演習問題

全単射の逆写像 (1)　(演習問題)

f が全単射であるとき

$g\colon B \to A$ が f の逆写像 $\Leftrightarrow$ $g \circ f = \mathrm{id}_A$

つまり，f が全単射であるとき，$f \circ g = \mathrm{id}_B$ という条件は不要

全単射の逆写像 (2)　(演習問題)

f が全単射であるとき

$g\colon B \to A$ が f の逆写像 $\Leftrightarrow$ $f \circ g = \mathrm{id}_B$

例題 5

例題 5

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，
その逆写像 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が何であるか，答えよ．

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，$f^{-1}(b) = \dfrac{b-1}{3}$ とする

- この f^{-1} が f の逆写像であることを証明する
- 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(3a+1) = \frac{(3a+1)-1}{3} = a$$

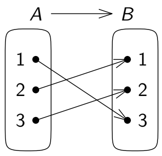
- したがって，$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ となり，上の f^{-1} は f の逆写像である　□

逆写像と逆像：注意

注意

写像 $f\colon A \to B$

- $Y \subseteq B$ のとき，$f^{-1}(Y)$ は Y の逆像
  - f が全単射であろうがなかろうが定義される
- $b \in B$ のとき，$f^{-1}(b)$ は f の逆写像 f^{-1} の b における値
  - f が全単射であるときのみ定義される



- $f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3\}$
- $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- $f^{-1}(2) = 3$

もう一つ注意

全単射の逆写像も全単射 (演習問題)

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 特殊な写像「全射」,「単射」,「全単射」を理解して，
  その性質と違いを論述できるようになる
- 写像の逆写像を理解し，
  その存在性の判定，および構成ができるようになる