## 離散数学 第 8 回
## 写像 (1)：像と逆像

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 6 月 8 日

最終更新：2017 年 6 月 7 日　11:49



## スケジュール 前半

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 13 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 20 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (4 月 27 日)
- ∗ 休講 (みどりの日) (5 月 4 日)
4. 証明法 (1)：∃ と ∀ を含む命題の証明 (5 月 11 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 18 日)
6. 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 25 日)
7. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (6 月 1 日)



## スケジュール 後半 (予定)

9. 写像 (1)：像と逆像 (6 月 8 日)
- • 中間試験 (6 月 15 日)
10. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 22 日)
11. 関係 (1)：関係 (6 月 29 日)
- ∗ 休講 (出張) (7 月 6 日)
12. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 13 日)
13. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 20 日)
- ∗ 休講 (出張) (7 月 27 日)
- • 期末試験 (8 月 3 日？)

注意：予定の変更もありうる



## 今日の概要

**この講義の目標**

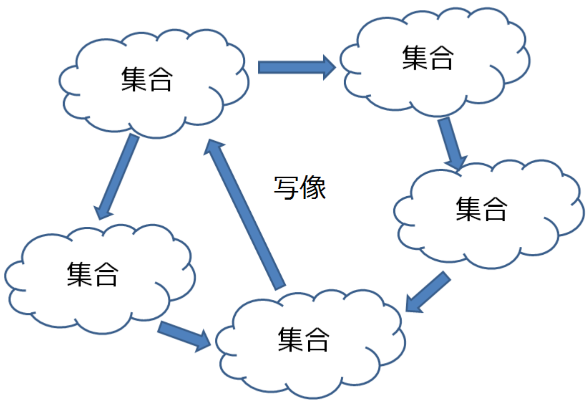
- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

**今日の目標**

- 写像 (関数) の定義と記法を理解し，使えるようになる
- 写像による像と逆像，写像の合成を理解する



## ここまでのまとめ と ここからの話








## 目次



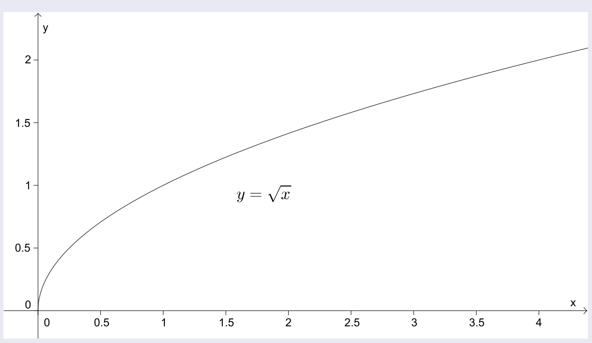




## 関数と言って思い浮かべるものは？ (1)

**数学 (?) の「関数」**

関数 $y = \sqrt{x}$








## 関数と言って思い浮かべるものは？ (2)

**プログラミングの「関数」**

```
int sum(int a, int b) {
  return a + b;
}

int absolute_value(int a) {
  if (a < 0) {
    return -a;
  } else {
    return a;
  }
}
```

## 写像とは

### 写像とは？
- 集合が 2 つある ($A$ と $B$ とする)
- $A$ の 1 つ 1 つの要素を $B$ のある要素に「移す」

### 数学的に写像を定義すると？
- 任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が一意に (ただ一つ) 存在して，$a$ を $b$ に移す

### 記法は？
- 写像 $f\colon A \to B$
- 任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が一意に存在して，$f(a) = b$

注：$f$ によって $a$ を移したものを $f(a)$ と書く

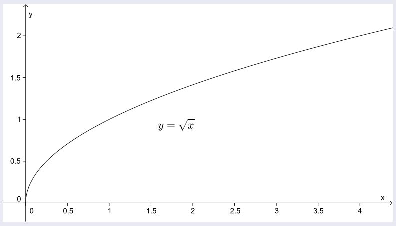
「写像」を「関数」とも呼ぶ





## 関数と言って思い浮かべるものは？ (1) 再掲

### 数学 (?) の「関数」
関数 $y = \sqrt{x}$




- $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
- 任意の $x \in [0, +\infty)$ に対して $f(x) = \sqrt{x}$





## 関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲

### プログラミングの「関数」
```
int sum(int a, int b) {
  return a + b;
}
```

- $\mathtt{sum}\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- 任意の $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して $\mathtt{sum}((a, b)) = a + b$

$\boxed{\text{注}}$ : $\mathbb{Z}$ = すべての整数から成る集合 (整数全体の集合)





## 関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲 (続)

### プログラミングの「関数」
```
int absolute_value(int a) {
  if (a < 0) {
    return -a;
  } else {
    return a;
  }
}
```

- $\mathtt{absolute\_value}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- 任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\mathtt{absolute\_value}(a) = \begin{cases} -a & (a < 0 \text{ のとき}) \\ a & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$





## 発展的補足：論理記号を用いて定義を書き直してみる

### $f$ が $A$ から $B$ への写像であるとは
$$\forall\, a \in A\ (\exists!\ b \in B\ (f(a) = b))$$

「∃!」は「一意に存在して〜」を表す記号

### 「∃!」を書き直すと
$$\forall\, a \in A\ (\exists\ b \in B\ ((f(a) = b) \wedge (\forall\ b' \in B\ (f(a) = b' \to b = b'))))$$

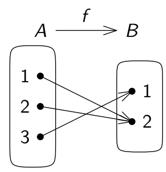




## 写像の例

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$
- 写像 $f\colon A \to B$ を次のように定義
  - $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$

$f(1) = 2$
$f(2) = 2$
$f(3) = 1$




| $a$ | $f(a)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 2 |
| 3 | 1 |

$1 \overset{f}{\mapsto} 2$
$2 \overset{f}{\mapsto} 2$
$3 \overset{f}{\mapsto} 1$

### 注意
「写像 $f\colon A \to B$ を定義する」ためには，
任意の $a \in A$ に対して，$f(a)$ が何であるかを定めればよい

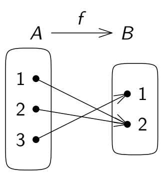




## 写像にまつわる記法と用語

集合 $A, B$ と写像 $f\colon A \to B$
- $A \xrightarrow{f} B$
- $b = f(a)$ のとき「$f\colon a \mapsto b$」や「$a \overset{f}{\mapsto} b$」
- $f(a)$ を $a$ における $f$ の**値**という
- $A$ を $f$ の**始域** (または**定義域**) という
- $B$ を $f$ の**終域** という

$f(1) = 2$
$f(2) = 2$
$f(3) = 1$




| $a$ | $f(a)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 2 |
| 3 | 1 |

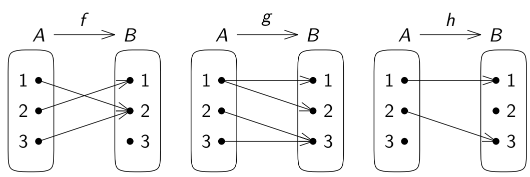
$1 \overset{f}{\mapsto} 2$
$2 \overset{f}{\mapsto} 2$
$3 \overset{f}{\mapsto} 1$

### 格言
写像の始域と終域を常に意識　　(似たものに「行列のサイズ」がある)





## 問題：次の図の中で写像を表すものは？



## 2 つの写像が等しいということ

集合 $A, B, C, D$ と写像 $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$

**$f$ と $g$ が等しいとは？**

写像 $f$ と $g$ が等しいことを「$f = g$」と書き，
次の条件がすべて成り立つことと定義する

- $A = C$ （$f$ と $g$ の始域が等しい）
- $B = D$ （$f$ と $g$ の終域が等しい）
- すべての $a \in A$ に対して，$f(a) = g(a)$ （写像の値が等しい）





## 恒等写像

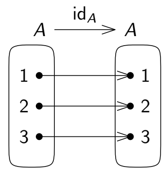
集合 $A$ と写像 $f\colon A \to A$

**恒等写像とは？**

$f$ が恒等写像であるとは，
任意の $a \in A$ に対して $a = f(a)$ であること

- $A \to A$ の恒等写像を $\mathrm{id}_A$ と書くこともある
- 例：$A = \{1, 2, 3\}$ のとき $f\colon A \to A$ で

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3$$








## 目次







## 写像による像

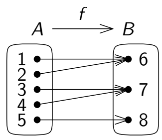
$f\colon A \to B$ を写像とする

**像とは？**

$f$ による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ，ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

例：$f(\{1, 2, 3\})$ は？




- $6 \in f(\{1, 2, 3\})$ か？: $6 = f(1)$ なので YES
- $7 \in f(\{1, 2, 3\})$ か？: $7 = f(3)$ なので YES
- $8 \in f(\{1, 2, 3\})$ か？: $8 \neq f(1), 8 \neq f(2), 8 \neq f(3)$ なので NO

したがって，$f(\{1, 2, 3\}) = \{6, 7\}$





## 写像による像：他の例と注意

$f\colon A \to B$ を写像とする

**像とは？**

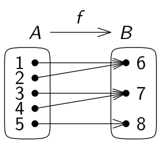
$f$ による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ，ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- $X$ は $A$ の部分集合 ($A$ の要素ではない)
- $f(X)$ は $B$ の部分集合

例




- $f(\{1, 2\}) = \{6\}$
- $f(\{1, 2, 3\}) = \{6, 7\}$
- $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{6, 7\}$
- $f(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{6, 7, 8\}$
- $f(\{2\}) = \{6\}$





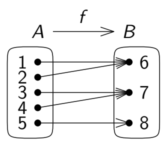
## 写像による像：他の表現

$f\colon A \to B$ を写像とする

**$f$ による $X$ の像は次のようにも書ける**

$$f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$$

例

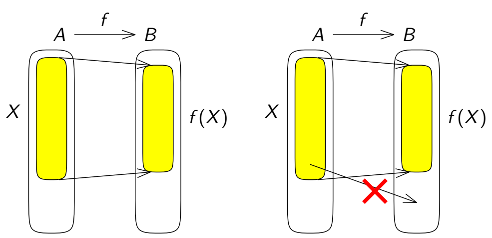



- $f(\{1, 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{6\}$
- $f(\{1, 2, 3\}) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{6, 7\}$
- $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{6, 7\}$
- $f(\{2\}) = \{f(2)\} = \{6\}$





## 写像による像：図による直感と補足




**像の定義より，次が分かる**

$$a \in X \quad \Rightarrow \quad f(a) \in f(X)$$

**しかし，次が正しいとは限らない**

$$f(a) \in f(X) \quad \overset{???}{\Rightarrow} \quad a \in X$$





## 写像による逆像

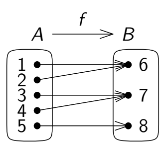
$f\colon A \to B$ を写像とする

**逆像とは？**

$f$ による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ，ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

例：$f^{-1}(\{6, 7\})$ は？




- $1 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？: $6 = f(1)$ なので YES
- $2 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？: $6 = f(2)$ なので YES
- $3 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？: $7 = f(3)$ なので YES
- $4 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？: $7 = f(4)$ なので YES
- $5 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か？: $6 \neq f(5)$，$7 \neq f(5)$ なので NO

したがって，$f^{-1}(\{6, 7\}) = \{1, 2, 3, 4\}$

## 写像による逆像：他の例と注意

$f\colon A \to B$ を写像とする

**逆像とは？**

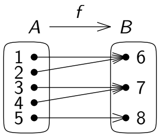
$f$ による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ，ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- $Y$ は $B$ の部分集合 ($B$ の要素ではない)
- $f^{-1}(Y)$ は $A$ の部分集合

例




- $f^{-1}(\{6\}) = \{1, 2\}$
- $f^{-1}(\{6, 7\}) = \{1, 2, 3, 4\}$
- $f^{-1}(\{6, 7, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $f^{-1}(\{7, 8\}) = \{3, 4, 5\}$
- $f^{-1}(\{6, 8\}) = \{1, 2, 5\}$



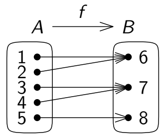


## 写像による逆像：注意 第 2 弾

$f\colon A \to B$ を写像とする

**注意：逆像を次のようには書かない**

$$f^{-1}(Y) \stackrel{?}{=} \{f^{-1}(b) \mid b \in Y\}$$

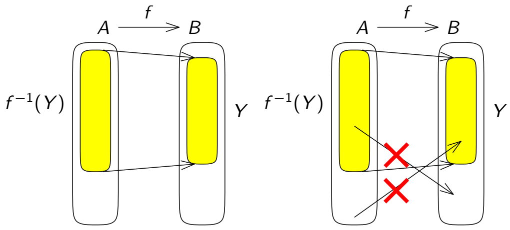



- $f^{-1}(b)$ とは？ (定義されないかも)
- $f^{-1}(b)$ が定義されるのは $f$ が全単射であるときのみ (詳細は次回)





## 写像による逆像：図による直感と補足




**逆像の定義より，次が分かる**

$$f(a) \in Y \quad \Rightarrow \quad a \in f^{-1}(Y)$$

**そして，次も正しい**

$$a \in f^{-1}(Y) \quad \Rightarrow \quad f(a) \in Y$$





## 像と逆像：注意 (1)

$f\colon A \to B$ を写像とする

**像とは？**

$f$ による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ，ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

$X \subseteq A$ から $f(X) \subseteq B$ は定まる

**逆像とは？**

$f$ による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ，ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

$f^{-1}(Y) \subseteq A$ は $Y \subseteq B$ から定まる





## 像と逆像：注意 (2)

$f\colon A \to B$ を写像とする

**像とは？**

$f$ による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ，ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

$f$ という写像に対して，$f(X)$ という記法が使える

**逆像とは？**

$f$ による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ，ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

$f$ という写像に対して，$f^{-1}(Y)$ という記法が使える

- 「$f^{-1}$ という写像に対して，$f^{-1}(Y)$ という記法が使える」というわけではない
- $f$ の逆写像が存在しなくても，$f$ による逆像は定義される (次回参照)





## 目次







## 写像の合成

集合 $A, B, C$ と写像 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$

**写像の合成とは？**

写像 $f$ と $g$ の合成を $g \circ f\colon A \to C$ と表記し，任意の $x \in A$ に対して

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

とすることで定義する

注意：$f$ の終域と $g$ の始域が同じでないといけない
(同じでないときは合成を定義できない)





## 写像の合成：例

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$
- 写像 $f\colon A \to B$ を次で定義
  - $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- 写像 $g\colon B \to C$ を次で定義
  - $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

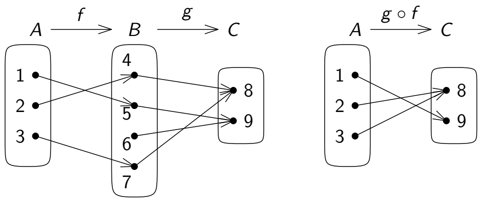
このとき，$g \circ f\colon A \to C$ を考えると，

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 8$$

## 写像の合成：例 (続)

- $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{8,9\}$
- 写像 $f\colon A \to B$ を次で定義
  - $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- 写像 $g\colon B \to C$ を次で定義
  - $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

このとき，$g \circ f\colon A \to C$ を考えると，








## 目次







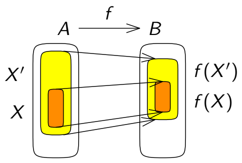
## 例題 1

**例題 1：次を証明せよ**

任意の集合 $A, B$，任意の写像 $f\colon A \to B$，任意の $X, X' \subseteq A$ に対して

$$X \subseteq X' \text{ ならば } f(X) \subseteq f(X')$$

図による直感




論理で書くと

$$\forall\, A, B, f\colon A \to B, X \subseteq A, X' \subseteq A\ (X \subseteq X' \to f(x) \subseteq f(X'))$$





## 例題 1：証明

証明：

任意の集合 $A, B$，任意の写像 $f\colon A \to B$，任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える．

$X \subseteq X'$ であると仮定する． ............................. (1)

$b \in f(X)$ であると仮定する． ......................... (2)

(2) と像の定義より，

ある $a \in X$ が存在して，$b = f(a)$ となる． ............ (3)

(1) と (3) より，$a \in X'$ が成り立つ． .................. (4)

(3) と (4) より，$b \in f(X')$ が成り立つ．

したがって，$f(X) \subseteq f(X')$ が成り立つ．

したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる． □





## 目次







## 今日の概要

**この講義の目標**

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

**今日の目標**

- 写像 (関数) の定義と記法を理解し，使えるようになる
- 写像による像と逆像，写像の合成を理解する





## 余談：「関数」という用語

**『数学の言葉づかい 100』(日本評論社，1999 年) 58 ページより**

関数の用語 functio は 17 世紀末ライプニッツにより初めて用いられた．

(中略)

関数がよく $f$ で表されるのはこれにちなむもので，各国語でもこのラテン語の直訳として function, Funktion, fonction, (中略) などが用いられている．わが国へは中国で音訳された函数が輸入され，現在では代用漢字による関数があてられて，初等教育の段階でほぼ定着した．