離散数学 第 7 回
集合と論理 (4)：直積と冪集合

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 6 月 1 日

最終更新：2017 年 5 月 31 日　11:03

スケジュール 前半 (予定)

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 13 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 20 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (4 月 27 日)
- ∗ 休講 (みどりの日) (5 月 4 日)
4. 証明法 (1)：∃ と ∀ を含む命題の証明 (5 月 11 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 18 日)
6. 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 25 日)
7. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (6 月 1 日)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

9. 写像 (1)：像と逆像 (6 月 8 日)
- 中間試験 (6 月 15 日)
10. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 22 日)
11. 関係 (1)：関係 (6 月 29 日)
- ∗ 休講 (出張) (7 月 6 日)
12. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 13 日)
13. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 20 日)
- ∗ 休講 (出張) (7 月 27 日)
- 期末試験 (8 月 3 日？)

注意：予定の変更もありうる

中間試験

- 日時：6 月 15 日 (木) 7 限
- 教室：A-201 (いつもの教室)
- 出題範囲：第 1 回講義の最初から第 6 回講義の最後まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一
    - ただし，発展問題は出題しない
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 10 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

今日の概要

今日の目標
- 有限集合の要素数が計算できる
- 集合の直積と冪集合を理解し，正しく答えられる
- 集合の直積と冪集合に関する包含関係，等式を証明できる

目次

有限集合の要素数

要素数とは？
有限集合 A の要素数とは，その集合の要素の数である
- 記法：$|A|$，$\#A$，$\#(A)$

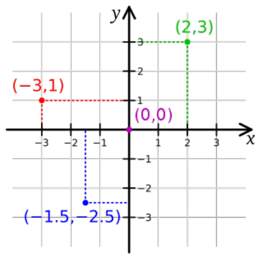
例：
- $|\{a, c, t\}| = 3$
- $|\emptyset| = 0$

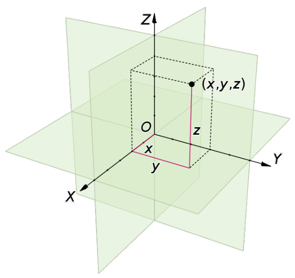
注意：
- 要素数は数なので，有限集合に対してのみ要素数が定義される
- 要素数のことを「大きさ」,「サイズ」と呼ぶことがある
- $|A|$ は,「A の絶対値」ではない

目次

座標

- 2 次元平面の点の座標は 2 つの実数を「対」にして表現する
- このように，集合の要素を $\boxed{\text{対}}$ にすることは有用





http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

構造体

プログラムにおける構造体

```
struct account {
  string name;
  int account_number;
  int balance;
};
```

数個のデータを $\boxed{\text{組}}$ にして，一つの構造を表現する

今から行うこと

数学において「対」や「組」を表現する方法を理解する

順序対 (2 個組)

順序対とは？ (常識に基づく定義)

順序対とは，ものを 2 つ並べたもののことである．

- a と a' をこの順で並べたものは「(a, a')」と表記する

「順序対」は単に「対」や「組」と呼ばれることもある

同じ順序対 (常識に基づく定義)

2 つの順序対 (a, a') と (b, b') が等しいことを $(a, a') = (b, b')$ と表記し，

$$a = b \text{ かつ } a' = b'$$

であることと定義する

注意：(a, a') と (a', a) は $a \neq a'$ ならば異なる

集合の直積 (1)

集合の直積

集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ と表記して，

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

「直積」は「デカルト積」とも呼ばれる

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

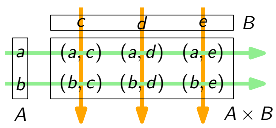
簡単な確認：有限集合 A, B に対して，$|A \times B| = |A| \times |B|$

集合の直積：図示

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$



例 続き

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b)\}$$

n 個組

n は自然数

n 個組とは？ (常識に基づく定義)

n 個組とは，ものを n 個並べたもののことである．

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ をこの順で並べたものは「$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$」と表記する

同じ n 個組 (常識に基づく定義)

2 つの n 個組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が等しいことを $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ と表記し，

$$\text{すべての } i \text{ に対して } a_i = b_i$$

であることと定義する

集合の直積 (2)

集合の直積

集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の直積を $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と表記して，

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{すべての } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{に対して } x_i \in A_i \end{array} \right\}$$

と定義する

「$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$」を「$\prod_{i=1}^{n} A_i$」と書くこともある

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{f, g\}$ のとき，

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(a, c, f), (a, c, g), (a, d, f), (a, d, g), (a, e, f), (a, e, g), \\ &(b, c, f), (b, c, g), (b, d, f), (b, d, g), (b, e, f), (b, e, g)\} \end{aligned}$$

簡単な確認：有限集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して，

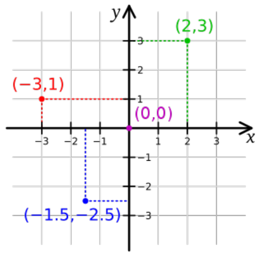
$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

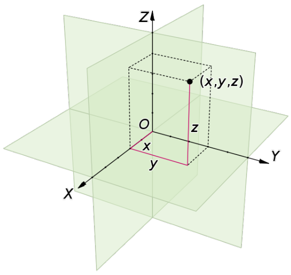
集合の直積 (関係する記法)

- $A \times A$ を A^2 と書く
- $A \times A \times A$ を A^3 と書く
- $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ 個}}$ を A^n と書く

集合の直積：例 1 (デカルト座標系)

- $\mathbb{R}^2$ = 2 次元平面
- $\mathbb{R}^3$ = 3 次元空間
- …





http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

集合の直積：例 2 (IP アドレス)

(IPv4 における) IP アドレスは 1 バイトの数 4 つで表現される

- www.uec.ac.jp: 130.153.9.10
- www.kantei.go.jp: 202.32.211.139

つまり，

- 可能な IP アドレス全体の集合 $= \{0, \dots, 255\}^4$
- 可能な IP アドレスの総数 $= |\{0, \dots, 255\}^4| = 256^4 = 4294967296$ (約 43 億)

$\leadsto$ IP アドレス枯渇問題

集合の直積：例 3 (DNA (デオキシリボ核酸))

DNA は生物の遺伝情報を担う物質

- アデニン (A)，チミン (T)，シトシン (C)，グアニン (G) という塩基の並び方で遺伝情報はだいたい決められている

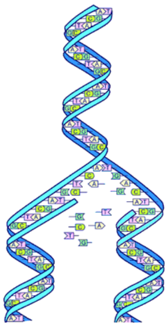
つまり，

- DNA が持つ遺伝情報全体の集合 $= \{\mathrm{A}, \mathrm{T}, \mathrm{C}, \mathrm{G}\}^n$

n は生物種などによって異なる自然数

- 大腸菌：$n \approx 4.6 \times 10^6$
- ヒト：$n \approx 3.2 \times 10^9$

http://en.wikipedia.org/wiki/Genome



http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_replication

集合の直積：補足

$A = \{1,2\}, B = \{3\}, C = \{4,5\}$ のとき

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \{(1,3),(2,3)\},\\
B \times C &= \{(3,4),(3,5)\},\\
A \times B \times C &= \{(1,3,4),(1,3,5),(2,3,4),(2,3,5)\},\\
(A \times B) \times C &= \{((1,3),4),((1,3),5),((2,3),4),((2,3),5)\},\\
A \times (B \times C) &= \{(1,(3,4)),(1,(3,5)),(2,(3,4)),(2,(3,5))\}
\end{aligned}
$$

特に，$A \times B \times C$ と $(A \times B) \times C$ と $A \times (B \times C)$ はすべて異なる

目次

冪集合

冪集合

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり，2^A と表記する．

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

例

$A = \{a,b,c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

簡単な確認：有限集合 A に対して，$|2^A| = 2^{|A|}$

- 「冪集合」の他に「巾集合」,「べき集合」,「ベキ集合」とも書く
- 「2^A」の他に「$\mathcal{P}(A)$」,「$\mathscr{P}(A)$」とも書く
- 冪集合の要素は集合 (冪集合は集合の集合)

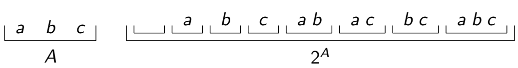
冪集合：例とイメージ

例

$A = \{a,b,c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

イメージ (箱による)



冪集合：他の例

冪集合 (再掲)

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり，2^A と表記する．

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

- $2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

冪集合の定義より

$$X \in 2^A \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq A$$

目次

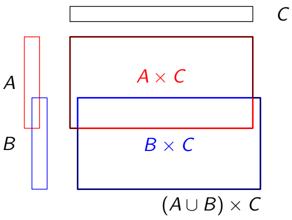
直積に関する等式：例題

例題：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

図による直感



直積に関する等式：例題

例題：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

格言 (再掲)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

証明すべきことは

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

同値変形によって証明する

直積に関する等式：例題 — 証明

証明：

任意の集合 A, B, C を考える

$(x, y) \in (A \cup B) \times C$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$ (直積の定義)

$\Leftrightarrow$ $((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C)$ (合併の定義)

$\Leftrightarrow$ $((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C))$ (分配法則)

$\Leftrightarrow$ $((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C)$ (直積の定義)

$\Leftrightarrow$ $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ (合併の定義)

したがって，$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ． □

冪集合に関する証明：例題

次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \subseteq B \quad ならば, \quad 2^A \subseteq 2^B$$

が成り立つ．

例：$A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

この例においては正しい

冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい．理由は以下の通りである．

任意の集合 A, B を考え，$A \subseteq B$ であると仮定する． ....(1)

$X \in 2^A$ であると仮定する． ....(2)

(2) と冪集合の定義より，$X \subseteq A$ が成り立つ． ....(3)

(1) と (3) より，$X \subseteq B$ が成り立つ． ....(4)

(4) と冪集合の定義より，$X \in 2^B$ が成り立つ．

したがって，$2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ． □

冪集合の定義

$$X \in 2^A \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq A$$

目次

今日の概要

今日の目標

- 有限集合の要素数が計算できる
- 集合の直積と冪集合を理解し，正しく答えられる
- 集合の直積と冪集合に関する包含関係，等式を証明できる