離散数学 第 6 回
証明法 (3)：集合に関する証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 5 月 25 日

最終更新：2017 年 5 月 31 日　11:03

スケジュール 前半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

1 学期間の概要 (再掲)

主題

- 理工学のあらゆる分野に現れる数学の言葉と論理を徹底的に身につける
- これによって，論理的な思考を行う基礎能力を体得し，将来的に，専門書を読み解き，自分で学術的な文書を書くことができるようにする
- キャッチフレーズは「語学としての数学」

達成目標

以下の 2 項目をすべて達成することを目標とする．

1. 数学における基本的な用語 (集合，論理，写像，関係) を正しく使うことができる
2. 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

今日の概要

今日の目標

- 論理を用いて，部分集合を定義し，それを理解する
- 集合の包含関係に関する証明ができるようになる
- 推論の類型として，4 つの推論規則が使えるようになる
  - モードゥス・ポネンス
  - モードゥス・トレンス
  - 仮言三段論法
  - 選言三段論法

(注：この 4 つの推論規則の名称は重要ではない)

目次

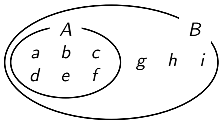
部分集合：直感

次の 2 つの集合を考える

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



部分集合とは？ (直感)

集合 A が集合 B の部分集合であるとは，
A が B に含まれている (包含されている) こと

「含まれている」とは？ 論理を使って書くことを考える

部分集合：定義

部分集合とは？ (論理を使った定義)

A が B の部分集合であるとは，

$$x \in A \quad \text{ならば} \quad x \in B$$

記号で書けば，$x \in A \rightarrow x \in B$

部分集合の記法

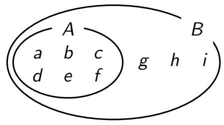
A が B の部分集合であることを「$A \subseteq B$」と表記する
(「$A \subset B$」や「$A \subseteq B$」と表記することもある)

次の 2 つの集合を考える

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



同じ集合

$A = B$ の定義は？

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$$x \in A \quad \leftrightarrow \quad x \in B$$

が真となること (成り立つこと) であった

「部分集合の定義」と「実質同値」を思い出すと

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$$A \subseteq B \quad \text{かつ} \quad B \subseteq A$$

が真となること (成り立つこと) と同じ

$$\begin{aligned} A = B \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \leftrightarrow x \in B && (= \text{の定義}) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A) && (\text{実質同値}) \\ &\Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) && (\text{部分集合の定義}) \end{aligned}$$

同じ集合：まとめ

$A = B$ の定義は？

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$$x \in A \quad \leftrightarrow \quad x \in B$$

が真となること (成り立つこと) であった

「部分集合の定義」と「実質同値」を思い出すと

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$$A \subseteq B \quad \text{かつ} \quad B \subseteq A$$

が真となること (成り立つこと) と同じ

つまり，

集合が同じであることの言い換え

集合 A, B に対して

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

部分集合：重要な性質

空集合はすべての集合の部分集合である

任意の集合 A に対して，

$$\emptyset \subseteq A$$

証明：$x \in \emptyset \to x \in A$ が恒真式であることを示せばよい

- ここで，$x \in \emptyset$ は x が何であっても偽である．
- したがって，$x \in \emptyset \to x \in A$ は必ず真である． □

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

目次

推論と証明法

「～ならば…である」という命題の証明法 (再掲)

1. 「～であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「～である」という性質を用いて,「…である」を証明する

今後出てくる証明にあること

- 証明で 用いる性質 が複雑になってくる
  - 用いる性質どうしを組み合わせて，使える性質を導く (推論)
  - 用いる性質：仮定，または，仮定の下で正しいと分かっていること
- 証明で 示したい事項 が複雑になってくる
  - 示したいことを変更して，証明をしやすくする

推論とは？

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「$P \Rightarrow Q$」であるとき，
用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

- 解釈：P が正しいとき，Q も正しいので，そのような置換が可能
- 実は今までも無意識に用いている

第 4 回講義資料より：例題

例題：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：

任意の実数 x を考える．

$\boxed{\text{このとき，左辺} - \text{右辺} = x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0.}$ ←ここ

したがって，$x^2 + 1 \geq 2x$ である． □

用いている推論

a が実数である $\Rightarrow a^2 \geq 0$

推論の類型

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「$P \Rightarrow Q$」であるとき，
用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

よく出てくる推論の形がある $\rightsquigarrow$ それをまず紹介

- モードゥス・ポネンス
- モードゥス・トレンス
- 仮言三段論法
- 選言三段論法

モードゥス・ポネンス

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \land (P \to Q) \quad \Rightarrow \quad Q$$

つまり，
- P が使える性質
- $P \to Q$ が使える性質

であるとき，Q を新たに使える性質として導ける

モードゥス・トレンス

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

モードゥス・トレンス (モーダス・トレンス)

$$(P \to Q) \land \neg Q \quad \Rightarrow \quad \neg P$$

つまり，
- $P \to Q$ が使える性質
- $\neg Q$ が使える性質

であるとき，$\neg P$ を新たに使える性質として導ける

仮言三段論法

任意の命題変数 P, Q, R に対して，次が成り立つ

仮言三段論法 (三段論法)

$$(P \to Q) \land (Q \to R) \quad \Rightarrow \quad P \to R$$

つまり，
- $P \to Q$ が使える性質
- $Q \to R$ が使える性質

であるとき，$P \to R$ を新たに使える性質として導ける

選言三段論法

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

選言三段論法

$$(P \lor Q) \land \neg P \quad \Rightarrow \quad Q$$

つまり，
- $P \lor Q$ が使える性質
- $\neg P$ が使える性質

であるとき，Q を新たに使える性質として導ける

推論の類型 (再掲)

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「$P \Rightarrow Q$」であるとき，
用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

よく出てくる推論の形がある $\rightsquigarrow$ それをまず紹介
- モードゥス・ポネンス
- モードゥス・トレンス
- 仮言三段論法
- 選言三段論法

これらを用いて証明を行っていく

目次

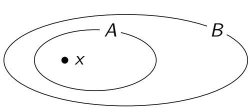
例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば，} \quad x \in B$$

オイラー図による直感



注意：「ならば」の前の部分 (仮定) を満たすように図を描く

「〜ならば…である」という命題の証明法 (第 5 回講義より)

1. 「〜であると仮定する」で始め，「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて，「…である」を証明する

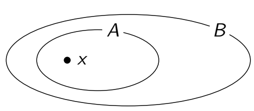
例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば，} \quad x \in B$$

オイラー図による直感



論理式として書く：$\boxed{\forall A, B, x \; (\boxed{\boxed{A \subseteq B \land x \in A} \to \boxed{x \in B}})}$

例題 1

論理式として書く：$\forall\, A, B, x\ (\ A \subseteq B \land x \in A \to x \in B\ )$

証明：

任意の集合 A, B と任意の x を考える．

$A \subseteq B$ であると仮定する． ………………………… (1)
また，$x \in A$ であると仮定する． …………………… (2)
(1) と部分集合の定義より，
「$x \in A$ ならば $x \in B$」が成り立つ． ……………… (3)
(2) と (3) より，$x \in B$ が成り立つ．
したがって，$x \in B$ である．

したがって，$A \subseteq B$ かつ $x \in A$ ならば，$x \in B$ となる． □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \land (P \to Q) \quad \Rightarrow \quad Q$$

例題 1：文章として書く

証明：任意の集合 A, B と任意の x を考え，

$$A \subseteq B \qquad (1)$$

であると仮定する．また，

$$x \in A \qquad (2)$$

であると仮定する．(1) と部分集合の定義より，

$$x \in A \text{ ならば } x \in B \qquad (3)$$

が成り立つ．(2) と (3) より，$x \in B$ が成り立つ．したがって，$x \in B$ である．したがって，$A \subseteq B$ かつ $x \in A$ ならば，$x \in B$ となる． □

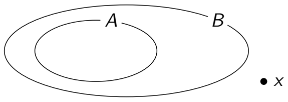
例題 2

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \notin B \text{ ならば，} \quad x \notin A$$

オイラー図による直感



証明は演習問題 (ヒント：モードゥス・トレンスを用いる)

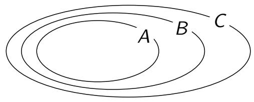
例題 3

次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq C \text{ ならば，} \quad A \subseteq C$$

オイラー図による直感



格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

論理式で書く：$\forall\, A, B, C\ (\ A \subseteq B \land B \subseteq C \to A \subseteq C\ )$

例題 3

証明：

任意の集合 A, B, C を考える．

$A \subseteq B$ であると仮定する． ………………………… (1)
また，$B \subseteq C$ であると仮定する． …………………… (2)
$x \in A$ であると仮定する． ……………………… (3)

したがって，　　　　　$x \in C$ が成り立つ．

したがって，$A \subseteq C$ となる．

したがって，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，$A \subseteq C$ となる． □

部分集合とは？ (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \to (x \in B)$$

例題 3

証明：

任意の集合 A, B, C を考える．

$A \subseteq B$ であると仮定する． ………………………… (1)
また，$B \subseteq C$ であると仮定する． …………………… (2)
$x \in A$ であると仮定する． ……………………… (3)
(1) と部分集合の定義より，$x \in A$ ならば $x \in B$ である． (4)
(2) と部分集合の定義より，$x \in B$ ならば $x \in C$ である． (5)
(4) と (5) より，$x \in A$ ならば $x \in C$ となる． ………(6)
したがって，(5) と (6) より，$x \in C$ が成り立つ．

したがって，$A \subseteq C$ となる．

したがって，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，$A \subseteq C$ となる． □

仮言三段論法

$$(P \to Q) \land (Q \to R) \quad \Rightarrow \quad (P \to R)$$

例題 3

別証明：

任意の集合 A, B, C を考える．

$A \subseteq B$ であると仮定する． ………………………… (1)
また，$B \subseteq C$ であると仮定する． …………………… (2)
$x \in A$ であると仮定する． ……………………… (3)
(1) と部分集合の定義より，$x \in A$ ならば $x \in B$ である． (4)
(2) と部分集合の定義より，$x \in B$ ならば $x \in C$ である． (5)
(3) と (4) より，$x \in B$ が成り立つ． ……………… (6)
したがって，(5) と (6) より，$x \in C$ が成り立つ．

したがって，$A \subseteq C$ となる

したがって，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，$A \subseteq C$ となる □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \land (P \to Q) \quad \Rightarrow \quad Q$$

部分集合に関する重要な性質：復習

次の 3 つはいずれも正しい

例題 1

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば，} \quad x \in B$$

例題 2

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \notin B \text{ ならば，} \quad x \notin A$$

例題 3

任意の集合 A, B, C に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq C \text{ ならば，} \quad A \subseteq C$$

今後断りなく，この 3 つを (再度証明せずに) 用いることがある

目次

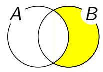
例題 4

次を証明せよ

任意の集合 A, B に対して，

$$(A \cup B) - A \subseteq B$$

オイラー図による直感



格言

仮定のない集合に対する包含関係は，文章で証明する

格言 (第 2 回講義より)

仮定のない集合に対する等式は，同値変形で証明する

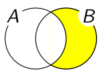
例題 4

次を証明せよ

任意の集合 A, B に対して，

$$(A \cup B) - A \subseteq B$$

オイラー図による直感



論理式として書く：$\forall\, A, B\ (\ x \in (A \cup B) - A \rightarrow x \in B\ )$

例題 4

証明：

任意の集合 A, B を考える

$x \in (A \cup B) - A$ であると仮定する． .... (1)

(1) と集合差の定義より，

$x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ が成り立つ． .... (2)

(2) より，$x \in A \cup B$ が成り立つ． .... (3)

同じく (2) より，$x \notin A$ が成り立つ． .... (4)

(3) と合併の定義より，$x \in A$ または $x \in B$ が成り立つ． (5)

したがって，(4) と (5) より，$x \in B$ が成り立つ． .... (6)

したがって，$(A \cup B) - A \subseteq B$ である． □

推論規則 (∧ の除去) (演習問題)

$$P \wedge Q \quad \Rightarrow \quad P$$

例題 5

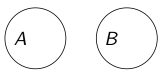
次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \cap B = \emptyset \text{ ならば } A \subseteq A - B$$

が成り立つ．

オイラー図による直感



格言

仮定のある集合に対する等式と包含関係は，文章で証明する

論理式として書く：$\forall\, A, B\ (\ A \cap B = \emptyset \rightarrow A \subseteq A - B\ )$

例題 5 の解答例

例題 5 の解答例：正しい．理由は以下の通りである．

任意の集合 A, B を考え，

$A \cap B = \emptyset$ であると仮定する． .... (1)

$x \in A$ であると仮定する． .... (2)

(1) と空集合の定義より，$x \notin A \cap B$ が成り立つ． .... (3)

(3) と共通部分の定義より，

$x \notin A$ または $x \notin B$ が成り立つ． .... (4)

(2) と (4) より，$x \notin B$ が成り立つ． .... (5)

(2) と (5) と集合差の定義より，$x \in A - B$ が成り立つ．

したがって，$A \subseteq A - B$ が成り立つ．

したがって，$A \cap B = \emptyset$ ならば，$A \subseteq A - B$ となる， □

共通部分の定義とド・モルガンの法則より

$$x \notin A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A \text{ または } x \notin B$$

例題 6

次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B, C に対して

$$A - B = A - C \text{ ならば } B = C$$

が成り立つ．

格言

オイラー図で直感を得る

「〜ならば…である」という命題が正しいか，正しくないか (第 5 回講義の復習)

正しい場合

- 先ほどのように証明する

正しくない場合

- 「〜」を満たすが「…」とならないものを見つける (反例を挙げる)

例題 6

次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B, C に対して

$$A - B = A - C \text{ ならば } B = C$$

が成り立つ．

この命題の否定を書くと：$\neg(\forall\, A, B, C\ (A - B = A - C \rightarrow B = C))$

ここで，

$$\begin{aligned} & \neg(\forall\, A, B, C\ (A - B = A - C \rightarrow B = C)) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\forall\, A, B, C\ (A - B \neq A - C \vee B = C) \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, A, B, C\ (\neg(A - B \neq A - C \vee B = C)) \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, A, B, C\ (A - B = A - C \wedge B \neq C) \end{aligned}$$

つまり，正しくないことを証明するためには

$A - B = A - C$ を満たすが $B \neq C$ となるような集合 A, B, C を見つければよい

例題 6 の解答例

例題 6 の解答例：正しくない．理由は以下の通りである．

集合 $A = \{1, 2\}$，$B = \{2, 3\}$，$C = \{2, 4\}$ を考える．

このとき，$A - B = \{1\}$ と $A - C = \{1\}$ が成り立つ．
したがって，$A - B = A - C$ が成り立つ．
一方，$3 \in B$ かつ $3 \notin C$ なので，$B \neq C$ が成り立つ．

したがって，$A - B = A - C$ は満たすが $B \neq C$ となる集合 A, B, C は存在する． □

つまり，正しくないことを証明するためには

$A - B = A - C$ を満たすが $B \neq C$ となるような集合 A, B, C を見つければよい

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 論理を用いて，部分集合を定義し，それを理解する
- 集合の包含関係に関する証明ができるようになる
- 推論の類型として，4 つの推論規則が使えるようになる
  - モードゥス・ポネンス
  - モードゥス・トレンス
  - 仮言三段論法
  - 選言三段論法

(注：この 4 つの推論規則の名称は重要ではない)