離散数学 第 5 回
証明法 (2)：含意を含む命題の証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 5 月 18 日

最終更新：2017 年 5 月 22 日　10:20

スケジュール 前半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

1 学期間の概要 (再掲)

主題
- 理工学のあらゆる分野に現れる数学の言葉と論理を徹底的に身につける
- これによって，論理的な思考を行う基礎能力を体得し，将来的に，専門書を読み解き，自分で学術的な文書を書くことができるようにする
- キャッチフレーズは「語学としての数学」

達成目標
以下の 2 項目をすべて達成することを目標とする．
1. 数学における基本的な用語 (集合，論理，写像，関係) を正しく使うことができる
2. 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

今日の概要

今日の目標
- 含意 ($\rightarrow$) を含む命題の証明が書けるようになる
- $\exists, \forall, \rightarrow$ が組み合わされた命題の証明が書けるようになる
- 対偶による証明と背理法を理解し，使えるようになる

なぜ証明を勉強するのか？ (再掲)
- 証明は論理的思考の根幹 ⇝ 論理的思考の訓練
- 証明は文章 (主張) ⇝ 文章構造と論理構造の対応に注目

これを通して，文章を論理的に読み書きできるようになる

目次

前回行ったこと

具体的に与えられた命題関数 $P(x)$ に対して

$$\exists\, x\ (P(x)) \quad や \quad \forall\, x\ (P(x))$$

が正しいことを証明すること

証明とは？
命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言
証明は文章．読者に伝わるように書く

証明法 (復習)

格言
- 証明の基本は「定義に立ち戻る」こと
- 証明では「下書き」と「清書」を区別し，証明として書くものは清書のみ

「〜が存在する」という命題の証明法
1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

「任意の〜に対して⋯である」という命題の証明法
1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，⋯である」で終わる
2. それが「⋯である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

実数 x が $x > 3$ を満たすとき，$x^2 > 9$ が成り立つ

文の論理構造：$\forall x \in \mathbb{R}\ (\ (x > 3) \to (x^2 > 9)\ )$

「〜ならば…である」という命題の証明法

1. 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 1

文の論理構造：$\forall x \in \mathbb{R}\ (\ (x > 3) \to (x^2 > 9)\ )$

証明：

任意の実数 x を考える.
$x > 3$ であると仮定する.
$x > 3$ の両辺を 2 乗すると，$x^2 > 9$ が得られる.
したがって，$x^2 > 9$ が成り立つ.
したがって，$x > 3$ を満たすとき，$x^2 > 9$ が成り立つ. □

「〜ならば…である」という命題の証明法

1. 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 1 — 構造の注意

証明：

任意の実数 x を考える.
$x > 3$ であると仮定する.
$x > 3$ の両辺を 2 乗すると，$x^2 > 9$ が得られる.
したがって，$x^2 > 9$ が成り立つ.
したがって，$x > 3$ を満たすとき，$x^2 > 9$ が成り立つ. □

整理

- 証明すること：「$x^2 > 9$」
- 用いる性質：「x は実数である」,「$x > 3$ である」

格言

証明では「証明すること」と「用いる性質」を明確に区別する

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 1 — 書き方の注意

次のように短く証明を書いてもよい

証明：

任意の実数 x を考え，
$x > 3$ であると仮定する.
$x > 3$ の両辺を 2 乗すると，$x^2 > 9$ が得られる.
したがって，$x > 3$ を満たすとき，$x^2 > 9$ が成り立つ. □

変更点

- 「任意の実数 x を考える」と「$x > 3$ を満たすと仮定する」を 1 つの文に押し込んだ
- 「したがって」の連続を抑制した

まどろっこしさが少し消えて，読みやすくなる

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 1 — 清書

例題 1：次の命題を証明せよ

実数 x が $x > 3$ を満たすとき，$x^2 > 9$ が成り立つ

証明 1：任意の実数 x を考える．$x > 3$ であると仮定する．$x > 3$ の両辺を 2 乗すると，$x^2 > 9$ が得られる．したがって，$x^2 > 9$ が成り立つ．したがって，$x > 3$ を満たすとき，$x^2 > 9$ が成り立つ． □

証明 2：任意の実数 x を考え，$x > 3$ であると仮定する．$x > 3$ の両辺を 2 乗すると，$x^2 > 9$ が得られる．したがって，$x > 3$ を満たすとき，$x^2 > 9$ が成り立つ． □

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

実数 x が $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすとき，$x = 1$ または $x = 2$ が成り立つ

文の論理構造：$\forall x \in \mathbb{R}\ (\ x^2 - 3x + 2 = 0 \to (x = 1 \lor x = 2)\ )$

証明：

任意の実数 x を考え，
$x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすと仮定する. ....(1)
式 (1) より，$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 \overset{(1)}{=} 0$ となる.
x は実数なので，$x - 1 = 0$ または $x - 2 = 0$ となる.
したがって，$x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすとき，$x = 1$ または $x = 2$ が成り立つ. □

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

実数 x が $x^2 > 9$ を満たすとき，$x > 3$ が成り立つ

文の論理構造：$\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 9 \to x > 3)$

「〜ならば…である」という命題が正しいか，正しくないか

正しい場合

- 先ほどのように証明する

正しくない場合

- 「〜」を満たすが「…」とならないものを見つける (反例を挙げる)

正しくない場合の証明を正当化する論理 (参照：演習問題 4.3)

$$\neg\forall x\ (P(x) \to Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\ (P(x) \land \neg Q(x))$$

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

実数 x が $x^2 > 9$ を満たすとき，$x > 3$ が成り立つ

文の論理構造：$\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 9 \to x > 3)$

(2)：例題 3 に挙げた命題の否定

$$\neg\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 9 \to x > 3)$$

(3)：(2) と同値な命題

$$\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 9 \land \neg(x > 3))$$

「〜が存在する」という命題の証明法 (前回の講義)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

実数 x が $x^2 > 9$ を満たすとき，$x > 3$ が成り立つ

解答：これは正しくない．理由は以下の通りである．

実数 $x = -4$ を考える．
このとき，$x^2 = 16 > 9$ であるが，$x > 3$ ではない．
したがって，$x^2 > 9$ を満たすが，$x > 3$ を満たさない実数 x は存在する． □

証明すべき命題：$\exists\, x \in \mathbb{R}\ (\ x^2 > 9 \wedge \neg(x > 3)\ )$

目次

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x + y = 0$ となる

文の論理構造：$\forall\, x \in \mathbb{R}\ (\exists\, y \in \mathbb{R}\ (x + y = 0))$

格言

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい
- ∀：相手の手番 (任意の〜に対して)
- ∃：自分の手番 (ある〜が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 1 に挙げた命題の解釈

相手がどんな実数 x を選んでも，自分がある実数 y を選んで，
自分は $x + y = 0$ にできる

より複雑な命題の証明：例題 1

文の論理構造：$\forall\, x \in \mathbb{R}\ (\ \exists\, y \in \mathbb{R}\ (\ x + y = 0\ )\ )$

証明：

任意の実数 x を考える．
実数 $y = -x$ を考える．
このとき，$x + y = x + (-x) = 0$．
したがって，$x + y = 0$ を満たす実数 y は存在する． □

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

より複雑な命題の証明：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$xy = 0$ となる

文の論理構造：$\exists\, x \in \mathbb{R}\ (\forall\, y \in \mathbb{R}\ (xy = 0))$

格言 (再掲)

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい
- ∀：相手の手番 (任意の〜に対して)
- ∃：自分の手番 (ある〜が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 2 に挙げた命題の解釈

自分がある実数 x を選べば，相手がどんな実数 y を選んでも，
自分は $xy = 0$ にできる

より複雑な命題の証明：例題 2

文の論理構造：$\exists\, x \in \mathbb{R}\ (\ \forall\, y \in \mathbb{R}\ (\ xy = 0\ )\ )$

証明：

実数 $x = 0$ を考える．
任意の実数 y を考える．
このとき，$xy = 0 \cdot y = 0$．
したがって，任意の実数 y に対して $xy = 0$ となる． □

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$x + y = 0$ となる

文の論理構造：$\exists\, x \in \mathbb{R}\ (\forall\, y \in \mathbb{R}\ (x + y = 0))$

格言 (再掲)

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい
- ∀：相手の手番 (任意の〜に対して)
- ∃：自分の手番 (ある〜が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 3 に挙げた命題の解釈

自分がある実数 x を選べば，相手がどんな実数 y を選んでも，
自分は $x + y = 0$ にできる

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$x + y = 0$ となる

例題 3 に挙げた命題の否定

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x + y = 0$ とならない

$$\begin{aligned}\neg\exists\, x \in \mathbb{R}\ (\forall\, y \in \mathbb{R}\ (x + y = 0)) &\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}\ (\neg\forall\, y \in \mathbb{R}\ (x + y = 0)) \\ &\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}\ (\exists\, y \in \mathbb{R}\ (x + y \neq 0))\end{aligned}$$

例題 3 に挙げた命題の否定の解釈

相手がどんな実数 x を選んでも，自分がある実数 y を選べば，
自分は $x + y = 0$ とならないようにできる ($x + y \neq 0$ にできる)

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$x + y = 0$ となる

<u>解答</u>：正しくない．その理由は以下の通りである．

任意の実数 x を考える．
このとき，実数 $y = x^2 + x + 2$ を考える．
そうすると，
$x + y = x + (x^2 + x + 2) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0.$
したがって，ある実数 y が存在して，$x + y = 0$ とはならない． □

証明すべき命題：$\forall\, x \in \mathbb{R}\ (\ \exists\, y \in \mathbb{R}\ (\ x + y \neq 0\ )\ )$

例題 4

例題 4

実数 x と y に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ
(1) $xy = 1$ である．
(2) 0 ではないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ である．

「〜と…が同値である」ことの証明法

1. 「〜ならば…である」ことを証明する
2. 「…ならば〜である」ことを証明する

証明法を正当化する論理 (実質同値 (参照：演習問題 2.5.2))

$$P \leftrightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

例題 4

例題 4

実数 x と y に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ
(1) $xy = 1$ である．
(2) 0 ではないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ である．

<u>証明</u>：まず，(1) ならば (2) であることを証明する．

$xy = 1$ であると仮定する．このとき，$x \neq 0$ である．
実数 t を $t = x$ として定める．
このとき，$y = 1/x = 1/t$ となる．
したがって，0 でないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ となる．

証明すべき命題：$xy = 1 \rightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}\ (\ t \neq 0 \wedge x = t \wedge y = 1/t\ )$

例題 4

例題 4

実数 x と y に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ
(1) $xy = 1$ である．
(2) 0 ではないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ である．

<u>証明 (続)</u>：次に，(2) ならば (1) であることを証明する．

0 ではないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ であることを仮定する．
このとき，$xy = t \cdot (1/t) = 1$ となる．
したがって，$xy = 1$ である． □

証明すべき命題：$\exists\, t \in \mathbb{R}\ (t \neq 0 \wedge x = t \wedge y = 1/t) \rightarrow xy = 1$

目次

同値変形による証明すべきことの変換

同値変形の用途

$P \Leftrightarrow Q$ であるとき，
P を証明する代わりに，Q を証明すればよい

このような同値変形の使い方を既にしてきている

- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- $\neg \forall\, x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$

ここでは，他の例を 2 つ挙げる (どちらも重要)

証明法 (1)：対偶による証明

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

対偶法則 (復習)

$$P \rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \neg Q \rightarrow \neg P$$

用語

「$\neg Q \rightarrow \neg P$」は「$P \rightarrow Q$」の対偶

対偶による証明とは，対偶法則を用いた証明

対偶による証明

「$P \rightarrow Q$」を証明する代わりに「$\neg Q \rightarrow \neg P$」を証明する

対偶による証明：例題

例題：次を証明せよ

実数 a, b を考える．
任意の正実数 ϵ に対して $a < b + \epsilon$ が成り立つならば
$a \leq b$ が成り立つ

証明すべき命題：$(\forall\, \epsilon > 0\ (a < b + \epsilon)) \rightarrow (a \leq b)$

対偶による証明

「$P \rightarrow Q$」を証明する代わりに「$\neg Q \rightarrow \neg P$」を証明する

上の命題の対偶：$(a > b) \rightarrow (\exists\, \epsilon > 0\ (a \geq b + \epsilon))$

対偶による証明：例題

証明：対偶による証明を行う． (←これを書くと分かりやすい)
すなわち，証明することは

$a > b$ ならば，ある正実数 ϵ が存在して $a \geq b + \epsilon$ となる

ことである． (←これを書くと分かりやすい)

$a > b$ であると仮定する．
$\epsilon = \dfrac{a-b}{2}$ とおく．
$a > b$ より，$\epsilon > 0$ である．
また，$b + \epsilon = b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{a+a}{2} = a$.
したがって，ある正実数 ϵ が存在して $a \geq b + \epsilon$ となる． □

証明すべき命題：$\boxed{(a > b)} \rightarrow (\boxed{\exists\, \epsilon > 0\ (\boxed{a \geq b + \epsilon})})$

証明法 (2)：背理法

次は恒真式

$$(P \rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad ((P \wedge \neg Q) \rightarrow \mathsf{F})$$

背理法とは，この恒真式を用いた証明

背理法による証明

「$P \rightarrow Q$」を証明する代わりに「$(P \wedge \neg Q) \rightarrow \mathsf{F}$」を証明する

矛盾の導出

任意の命題変数 P に対して，次が成り立つ

矛盾法則

$$P \wedge \neg P \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{F}$$

つまり，
- P が使える性質
- $\neg P$ が使える性質

であるとき，矛盾を導ける

背理法による証明：例題

例題：次を証明せよ

実数 a, b が $a^2 + b = 13$ と $b \neq 4$ を満たすならば，$a \neq 3$ である．

証明すべき命題：$(a^2 + b = 13 \wedge b \neq 4) \rightarrow a \neq 3$

背理法による証明

「$P \rightarrow Q$」を証明する代わりに「$(P \wedge \neg Q) \rightarrow \mathsf{F}$」を証明する

背理法による証明を行うときに証明すべき命題：
$((a^2 + b = 13 \wedge b \neq 4) \wedge a = 3) \rightarrow \mathsf{F}$

背理法による証明：例題

例題：次を証明せよ

実数 a, b が $a^2 + b = 13$ と $b \neq 4$ を満たすならば，$a \neq 3$ である．

証明：背理法による証明を行う． (←これを書くと分かりやすい)

実数 a, b が $a^2 + b = 13, b \neq 4$ と $a = 3$ を満たすと仮定する．
このとき，$a^2 + b = 13$ と $a = 3$ より，

$$b = 13 - a^2 = 13 - 3^2 = 13 - 9 = 4.$$

したがって，$b = 4$ である．
これは $b \neq 4$ であることに矛盾する． □

証明すべき命題：$\boxed{((a^2 + b = 13 \wedge b \neq 4) \wedge a = 3)} \rightarrow \boxed{\mathsf{F}}$

目次

今日のまとめ

今日の目標
- 含意 $(\rightarrow)$ を含む命題の証明が書けるようになる
- $\exists, \forall, \rightarrow$ が組み合わされた命題の証明が書けるようになる
- 対偶による証明と背理法を理解し，使えるようになる

なぜ証明を勉強するのか？(再掲)
- 証明は論理的思考の根幹 $\rightsquigarrow$ 論理的思考の訓練
- 証明は文章 (主張) $\rightsquigarrow$ 文章構造と論理構造の対応に注目

これを通して，文章を論理的に読み書きできるようになる