離散数学 第 3 回
集合と論理 (3)：述語論理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 4 月 27 日

最終更新：2017 年 4 月 26 日　11:25

スケジュール 前半 (予定)

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 13 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 20 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (4 月 27 日)

* 休講 (みどりの日) (5 月 4 日)

4. 証明法 (1)：∃ と ∀ を含む命題の証明 (5 月 11 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 18 日)
6. 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 25 日)
7. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (6 月 1 日)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

9. 写像 (1)：像と逆像 (6 月 8 日)

- 中間試験 (6 月 15 日)

10. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 22 日)
11. 関係 (1)：関係 (6 月 29 日)

* 休講 (出張) (7 月 6 日)

12. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 13 日)
13. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 20 日)

* 休講 (出張) (7 月 27 日)
- 期末試験 (8 月 3 日？)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

今日の目標

- 「∀」と「∃」という記号の意味を理解し，使える
- 「∀」と「∃」を含む論理式に対する同値変形を理解する
(実際に使うのは次回)

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
(どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	×
×	○	○
○	×	×

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」や「後手が必ず勝てる」という命題を
どのように書いたらよいか？

後出しジャンケン

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題を
どのように書いたらよいか？

画像 http://lmsnn.fc2web.com/material/janken.html

目次

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真
- $n = 6$：「6 は素数である」 偽
- $n = 7$：「7 は素数である」 真
- $n = 8$：「8 は素数である」 偽
- ...

命題関数

命題関数とは？(常識に基づく定義)

命題関数とは，変数を具体的な値に定めると真偽が定まる文

例：$P(n)$ =「n は素数である」 (ただし，$n \in \mathbb{N}$ (n は自然数))

- $n = 2$：$P(2)$ =「2 は素数である」 真
- $n = 3$：$P(3)$ =「3 は素数である」 真
- $n = 4$：$P(4)$ =「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：$P(5)$ =「5 は素数である」 真
- $n = 6$：$P(6)$ =「6 は素数である」 偽
- $n = 7$：$P(7)$ =「7 は素数である」 真
- $n = 8$：$P(8)$ =「8 は素数である」 偽
- ...

命題関数：別の例

$R(x, y)$ =「x 県の県庁は y 市にある」 (ただし，x は県名，y は市名))

- x = 石川, y = 金沢：R(石川, 金沢) =「石川県の県庁は金沢市にある」 真
- x = 埼玉, y = 所沢：R(埼玉, 所沢) =「埼玉県の県庁は所沢市にある」 偽
- x = 群馬, y = 高崎：R(群馬, 高崎) =「群馬県の県庁は高崎市にある」 偽
- x = 広島, y = 広島：R(広島, 広島) =「広島県の県庁は広島市にある」 真
- x = 静岡, y = 静岡：R(静岡, 静岡) =「静岡県の県庁は静岡市にある」 真
- x = 長野, y = 松本：R(長野, 松本) =「長野県の県庁は松本市にある」 偽
- x = 茨城, y = 茨木：R(茨城, 茨木) =「茨城県の県庁は茨木市にある」 偽
- x = 愛媛, y = 松山：R(愛媛, 松山) =「愛媛県の県庁は松山市にある」 真
- ...

目次

かつかつかつかつかつかつかつかつ

次のような命題関数を考える

$P(n)$ =「n は正の数である」

- 「2 は正の数であり，かつ，3 は正の数である」という命題は
$$P(2) \wedge P(3)$$
と書ける
- 「1 以上 30 未満の自然数はどれも正の数である」という命題は
$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7) \wedge P(8) \wedge P(9) \wedge P(10) \wedge P(11) \wedge P(12) \wedge P(13) \wedge P(14) \wedge P(15) \wedge P(16) \wedge P(17) \wedge P(18) \wedge P(19) \wedge P(20) \wedge P(21) \wedge P(22) \wedge P(23) \wedge P(24) \wedge P(25) \wedge P(26) \wedge P(27) \wedge P(28) \wedge P(29)$$
と書ける (が，書きたくない) (注：$\wedge$ の結合法則)

全称記号

先ほどの書きたくない命題は次のようにも書く

$$\forall\, n \in A\ (P(n))$$

ただし，$A = \{1, 2, \ldots, 29\}$

対応する日本語
- 集合 A のすべての要素 n に対して $P(n)$ である
- 集合 A の任意の要素 n に対して $P(n)$ である
- 集合 A のどの要素 n に対しても $P(n)$ である

補足
- 「$\forall$」は全称記号と呼ばれる
- 「$\forall$」を使うことの意義
  - 「$\wedge$」を並べれば書けるが，それが面倒であるとき有効
  - 「$\wedge$」を並べて書けなくても「$\wedge$」を並べた意味を表現でき有効

全称記号：別の例

1. 「すべての自然数 n に対して，$2n+1$ は奇数である」という命題
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ (2n+1 \text{ は奇数である})$$
2. 「すべての実数 x に対して，x^2 は非負である」という命題
$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0)$$
3. 「すべての実数 x に対して，$x \geq 1$ ならば $\frac{1}{x} \leq 1$」という命題
$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \left((x \geq 1) \rightarrow \left(\frac{1}{x} \leq 1\right)\right)$$

またはまたはまたはまたはまたはまたはまたはまたは

次のような命題関数を考える

$Q(n)$ =「n は奇数である」

- 「2 は奇数である，または，3 は奇数である」という命題は
$$Q(2) \vee Q(3)$$
と書ける
- 「1 以上 30 未満のある自然数は奇数である」という命題は
$$Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee Q(4) \vee Q(5) \vee Q(6) \vee Q(7) \vee Q(8) \vee Q(9) \vee Q(10) \vee Q(11) \vee Q(12) \vee Q(13) \vee Q(14) \vee Q(15) \vee Q(16) \vee Q(17) \vee Q(18) \vee Q(19) \vee Q(20) \vee Q(21) \vee Q(22) \vee Q(23) \vee Q(24) \vee Q(25) \vee Q(26) \vee Q(27) \vee Q(28) \vee Q(29)$$
と書ける (が，書きたくない) (注：$\vee$ の結合法則)

存在記号

先ほどの書きたくない命題は次のようにも書く

$$\exists\, n \in A\ (Q(n))$$

ただし，$A = \{1, 2, \ldots, 29\}$

対応する日本語
- 集合 A のある要素 n に対して $Q(n)$ である
- 集合 A のある要素 n が存在して $Q(n)$ である
- $Q(n)$ であるような集合 A の要素 n が存在する

補足
- 「$\exists$」は存在記号と呼ばれる
- 「$\exists$」を使うことの意義
  - 「$\vee$」を並べれば書けるが，それが面倒であるとき有効
  - 「$\vee$」を並べて書けなくても「$\vee$」を並べた意味を表現でき有効

存在記号：別の例

1. 「ある自然数 n に対して，$2n^2 - 1$ は素数である」という命題
$$\exists\, n \in \mathbb{N}\ (2n^2 - 1 \text{ は素数である})$$
2. 「ある実数 x に対して，x^2 は非正である」という命題
$$\exists\, x \in \mathbb{R}\ (x^2 \leq 0)$$
3. 「ある実数 x に対して，$x > 1$ ならば $x = 0$」という命題
$$\exists\, x \in \mathbb{R}\ ((x > 1) \to (x = 0))$$

全称命題と存在命題

一般的な記法

- 考える命題関数 $P(x)$ の変数 x が動く範囲を集合 D として定める (この集合を議論領域と呼ぶことがある)
- 「D のすべての要素 x に対して $P(x)$ となる」という命題を
$$\forall\, x \in D\ (P(x))$$
のように表記する (この形の命題を全称命題と呼ぶ)
- 「D のある要素 x に対して $P(x)$ となる」という命題を
$$\exists\, x \in D\ (P(x))$$
のように表記する (この形の命題を存在命題と呼ぶ)

- 次のように書くこともある ($\exists$ も同様)
$$\forall\, x \in D\ P(x), \qquad \forall\, x \in D : P(x), \qquad \forall\, x \in D, P(x)$$
- 全称命題も存在命題も真偽を (だいたい) 定められる

述語論理：文の構造

$$\boxed{\forall\, x \in D\ (\boxed{P(x)})} \qquad \boxed{\exists\, x \in D\ (\boxed{P(x)})}$$

目次

全称命題の真理値：考え方

$D = \{a, b, c\}$ のとき

「$\forall\, x \in D\ (P(x))$」は「$P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$」と同値

$P(a)$	$P(b)$	$P(c)$	$P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

全称命題の真理値

全称命題「$\forall\, x \in D\ (P(x))$」の真理値

- これが T であるのは，すべての $x \in D$ に対して $P(x)$ が T であるとき
- これが F であるのは，ある $x \in D$ に対して $P(x)$ が F であるとき

- 標語的に書くと (混乱するかもしれないけど)
$$\boxed{(\forall\, x \in D\ (P(x))) = \mathrm{T}} \Leftrightarrow \boxed{\forall\, x \in D\ (P(x) = \mathrm{T})}$$
$$\boxed{(\forall\, x \in D\ (P(x))) = \mathrm{F}} \Leftrightarrow \boxed{\exists\, x \in D\ (P(x) = \mathrm{F})}$$
- 便宜上，$D = \emptyset$ のときは常に
$$(\forall\, x \in \emptyset\ (P(x))) = \mathrm{T}$$
とする

先ほどの例：全称命題

- $P(n) =$「n は正の数である」，$A = \{1, 2, \ldots, 29\}$ として
$$\forall\, n \in A\ (P(n))$$
を考える
- この論理式は「真」 (A の要素はどれも正の数)

存在命題の真理値：考え方

$D = \{a, b, c\}$ のとき

「$\exists\, x \in D\ (P(x))$」は「$P(a) \vee P(b) \vee P(c)$」と同値

$P(a)$	$P(b)$	$P(c)$	$P(a) \vee P(b) \vee P(c)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

存在命題の真理値

存在命題「$\exists\, x \in D\ (P(x))$」の真理値

- これが T であるのは，ある $x \in D$ に対して $P(x)$ が T であるとき
- これが F であるのは，すべての $x \in D$ に対して $P(x)$ が F であるとき

- 標語的に書くと (混乱するかもしれないけど)

$$\boxed{(\exists\, x \in D\ (P(x))) = \mathrm{T}} \iff \boxed{\exists\, x \in D\ (P(x) = \mathrm{T})}$$
$$\boxed{(\exists\, x \in D\ (P(x))) = \mathrm{F}} \iff \boxed{\forall\, x \in D\ (P(x) = \mathrm{F})}$$

- 便宜上，$D = \emptyset$ のときは常に

$$(\exists\, x \in \emptyset\ (P(x))) = \mathrm{F}$$

とする

先ほどの例：存在命題

- $Q(n) =$「n は奇数」，$A = \{1, 2, \ldots, 29\}$ として

$$\exists\, n \in A\ (Q(n))$$

を考える
- この論理式は「真」(A の中に奇数が存在する)

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする

- $\forall\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\forall\, n \in A$ (n は偶数である) 偽
- $\exists\, n \in A$ (n は偶数である) 真
- $\exists\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\exists\, n \in A$ (n は素数である) 真
- $\exists\, n \in A$ (n は負の数である) 偽

命題関数に現れる変数が増えると…

次のような文の真偽は？

- すべての自然数 n に対して，$m + n$ は偶数である．
- ある自然数 n が存在して，$m + n$ は偶数である．

これらの文の真偽は m が何であるかに依存する (「命題」ではない)

$P(m, n) =$「$m + n$ は偶数である」とすると

これらの文は次のように書ける

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$
- $\exists\, n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$

自由変数と束縛変数

先ほどの例

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$
- $\exists\, n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$

これらの文において

- m は自由変数 (対応する全称記号，存在記号が出てこない)
- n は束縛変数 (対応する全称記号，存在記号が出てくる)

自由変数がない場合，その文の真偽は (だいたい) 定まる

述語論理式

述語論理式とは？(常識に基づく定義)

述語論理式とは，

- 命題関数，
- 命題の演算 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，
- 全称記号 $\forall$，存在記号 $\exists$ (とそれに伴う「$x \in D$」のような記法)

を意味を成すように組み合わせたもの

述語論理式の例：D を議論領域，$P(x, y)$，$Q(x, y, z)$ を命題関数として

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \rightarrow \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$

閉論理式と開論理式とは？

- 閉論理式：自由変数を持たない述語論理式 (真偽は (だいたい) 定まる)
- 開論理式：自由変数を持つ述語論理式 (真偽は定まらない)

述語論理式：構造

$$\boxed{\forall\, x \in D\ (\boxed{\exists\, y \in D\ (\boxed{\boxed{P(x, y)} \rightarrow \boxed{\forall\, z \in D\ (\boxed{\neg \boxed{Q(x, y, z)}})}})})}$$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\boxed{\forall\, x \in D\ (\boxed{\exists\, y \in D\ (\boxed{\boxed{P(x, y)} \rightarrow \boxed{\forall\, z \in D\ (\boxed{\neg \boxed{Q(x, y, z)}})}})})}$
- $\boxed{(\boxed{\forall\, x \in D\ (\boxed{P(x)})} \vee (\boxed{\forall\, x \in D\ (\boxed{Q(x)})})}$
- $\boxed{\forall\, x \in D\ (\boxed{\exists\, y \in D\ (\boxed{\boxed{P(x)} \wedge \boxed{Q(y, z)}})})}$ (注：これは開論理式)

全称命題と存在命題：注意

注意

議論領域 D が明らかなときは,「$\in D$」を省くこともある
つまり，全称命題と存在命題はそれぞれ次のように書くこともある

$$\forall\, x\ (P(x)) \qquad \exists\, x\ (P(x))$$

次の閉論理式の真偽は？

次の閉論理式の真偽は？

1. $\forall\, m \in \mathbb{N}\ (\forall\, n \in \mathbb{N}\ (m+n$ は偶数である$))$
2. $\exists\, m \in \mathbb{N}\ (\forall\, n \in \mathbb{N}\ (m+n$ は偶数である$))$
3. $\forall\, m \in \mathbb{N}\ (\exists\, n \in \mathbb{N}\ (m+n$ は偶数である$))$
4. $\exists\, m \in \mathbb{N}\ (\exists\, n \in \mathbb{N}\ (m+n$ は偶数である$))$

いきなり考えるのは難しいので

$\mathbb{N}$ ではなく有限集合の場合を考える

$\mathbb{N}$ の場合の証明は次回考える

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン

次の閉論理式の真偽は？

1. $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$
2. $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$
3. $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$
4. $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$

復習

「$\forall$」は「$\wedge$」みたいで,「$\exists$」は「$\vee$」みたい

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (1)

次の閉論理式の真偽は？

1. $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$

$\forall\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$
$\Leftrightarrow \forall\, m \in \{1,2\}$ (「$m+1$ は偶数である」$\wedge$「$m+2$ は偶数である」)
$\Leftrightarrow$ (「$1+1$ は偶数である」$\wedge$「$1+2$ は偶数である」)$\wedge$
(「$2+1$ は偶数である」$\wedge$「$2+2$ は偶数である」)
$\Leftrightarrow (\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}) \wedge (\mathrm{F} \wedge \mathrm{T})$
$\Leftrightarrow \mathrm{F}$ $\square$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (2)

次の閉論理式の真偽は？

2. $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$

$\exists\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$
$\Leftrightarrow \exists\, m \in \{1,2\}$ (「$m+1$ は偶数である」$\wedge$「$m+2$ は偶数である」)
$\Leftrightarrow$ (「$1+1$ は偶数である」$\wedge$「$1+2$ は偶数である」)$\vee$
(「$2+1$ は偶数である」$\wedge$「$2+2$ は偶数である」)
$\Leftrightarrow (\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}) \vee (\mathrm{F} \wedge \mathrm{T})$
$\Leftrightarrow \mathrm{F}$ $\square$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (3)

次の閉論理式の真偽は？

3. $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$

$\forall\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$
$\Leftrightarrow \forall\, m \in \{1,2\}$ (「$m+1$ は偶数である」$\vee$「$m+2$ は偶数である」)
$\Leftrightarrow$ (「$1+1$ は偶数である」$\vee$「$1+2$ は偶数である」)$\wedge$
(「$2+1$ は偶数である」$\vee$「$2+2$ は偶数である」)
$\Leftrightarrow (\mathrm{T} \vee \mathrm{F}) \wedge (\mathrm{F} \vee \mathrm{T})$
$\Leftrightarrow \mathrm{T}$ $\square$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (4)

次の閉論理式の真偽は？

4. $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$

$\exists\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$
$\Leftrightarrow \exists\, m \in \{1,2\}$ (「$m+1$ は偶数である」$\vee$「$m+2$ は偶数である」)
$\Leftrightarrow$ (「$1+1$ は偶数である」$\vee$「$1+2$ は偶数である」)$\vee$
(「$2+1$ は偶数である」$\vee$「$2+2$ は偶数である」)
$\Leftrightarrow (\mathrm{T} \vee \mathrm{F}) \vee (\mathrm{F} \vee \mathrm{T})$
$\Leftrightarrow \mathrm{T}$ $\square$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン：まとめ

次の閉論理式の真偽は？

1. $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$ 偽
2. $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$ 偽
3. $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$ 真
4. $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$ 真

復習

「$\forall$」は「$\wedge$」みたいで,「$\exists$」は「$\vee$」みたい

無限バージョンの真偽は次回以降 (のつもり)

注意

$\forall$ と $\exists$ の順が違うと，真偽も異なる (場合がある)

目次

後出しジャンケン (再掲)

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題を
どのように書いたらよいか？

画像 http://lmsnn.fc2web.com/material/janken.html

後出しジャンケン：述語論理の視点から

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題を
どのように書いたらよいか？

$H = \{$ グー, チョキ, パー $\}$ とすると

$$\forall\, x \in H\ (\exists\, y \in H\ (y \text{ は } x \text{ に勝つ}))$$

画像 http://lmsnn.fc2web.com/material/janken.html

三目並べ (ちょっとルール変更)

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- マス目が全部埋まったときに，先手は一列揃えたい
- それができれば先手の勝ち，できなければ後手の勝ち

×	○	×
×	○	○
○	×	×

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」や「後手が必ず勝てる」という命題を
どのように書いたらよいか？

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\exists g(\forall h(\exists i(\{a, c, e, g, i\} \text{ で一列占めている})))))))))$$

×	○	×
×	○	○
○	×	×

「∃ は自分，∀ は相手」

格言

述語論理は二人ゲーム

- ∃：自分の手番
- ∀：相手の手番

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

そう思って，以前の例を見てみる

次の閉論理式の真偽は？ (再掲)

1. $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n \text{ は偶数である}))$　偽
2. $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\forall\, n \in \{1,2\}\ (m+n \text{ は偶数である}))$　偽
3. $\forall\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n \text{ は偶数である}))$　真
4. $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n \text{ は偶数である}))$　真

目次

論理式の恒真性

真理値表による恒真性の証明

- 命題論理式：できる
- 述語論理式：できないかもしれない (「無限」に対処できない)

同値変形による恒真性の証明

- 命題論理式：できるかもしれない
- 述語論理式：できるかもしれない

しかし，とても役に立つ

述語論理式に対して同値変形を行うためには，
述語論理における「重要な恒真式」を知る必要がある

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定

∀の否定，∃の否定 (重要！)

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して，次が成り立つ

$$\neg(\forall\, x \in D\ (P(x))) \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, x \in D\ (\neg P(x))$$
$$\neg(\exists\, x \in D\ (P(x))) \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, x \in D\ (\neg P(x))$$

$D = \{a, b\}$ のときの証明：∀ と ∃ の定義を思い出し，書き直すと

$$\neg(P(a) \wedge P(b)) \quad\Leftrightarrow\quad \neg P(a) \vee \neg P(b)$$
$$\neg(P(a) \vee P(b)) \quad\Leftrightarrow\quad \neg P(a) \wedge \neg P(b)$$

これらは命題論理におけるド・モルガンの法則と同じ

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 1】

「徳川将軍は全員男である」の否定は？

- ？ 徳川将軍は全員男でない　　　(分かりにくい日本語)
- × 徳川将軍は誰も男でない
- ○ 徳川将軍の誰かは男でない

「すべての人は自転車に乗れる」の否定は？

- × すべての人は自転車に乗れない
- ○ ある人は自転車に乗れない
- ○ 自転車に乗れない人がいる

∀の否定

$$\neg(\forall\, x\ (P(x)) \Leftrightarrow \exists\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 2】

「徳川将軍の誰かは 70 年以上生きた」の否定は？

- × 徳川将軍の誰かは 70 年以上生きていない
- ○ 徳川将軍は誰も 70 年以上生きていない

「ある人は UFO に乗った」の否定は？

- × ある人は UFO に乗っていない
- ？ すべての人は UFO に乗っていない　　　(分かりにくい日本語)
- ○ どの人も UFO に乗っていない

∃の否定

$$\neg(\exists\, x\ (P(x)) \Leftrightarrow \forall\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (2)：分配法則

∀の分配法則，∃の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$，$Q(x)$ に対して，次が成り立つ

$$(\forall\, x \in D\ (P(x))) \wedge (\forall\, x \in D\ (Q(x))) \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, x \in D\ (P(x) \wedge Q(x))$$
$$(\exists\, x \in D\ (P(x))) \vee (\exists\, x \in D\ (Q(x))) \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, x \in D\ (P(x) \vee Q(x))$$

$D = \{a, b\}$ のときの証明：演習問題

注意

次は恒真ではない

$$(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x))) \quad\overset{?}{\Leftrightarrow}\quad \forall\, x \in D\ (P(x) \vee Q(x))$$
$$(\exists\, x \in D\ (P(x))) \wedge (\exists\, x \in D\ (Q(x))) \quad\overset{?}{\Leftrightarrow}\quad \exists\, x \in D\ (P(x) \wedge Q(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (3)：交換法則

交換法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x, y)$ に対して，次が成り立つ

$$\forall\, x \in D\ (\forall\, y \in D\ (P(x, y))) \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, y \in D\ (\forall\, x \in D\ (P(x, y)))$$
$$\exists\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y))) \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, y \in D\ (\exists\, x \in D\ (P(x, y)))$$

$D = \{a, b\}$ のときの証明：演習問題

述語論理における重要な恒真式 (4)：導入

∀の導入，∃の導入

任意の議論領域 D と命題 P に対して，次が成り立つ

$$P \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, x \in D\ (P)$$
$$P \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, x \in D\ (P)$$

注：P の中に x は自由変数として現れない

$D = \{a, b\}$ のときの証明：演習問題

述語論理における重要な恒真式 (5)：分配法則

∀の分配法則，∃の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$，命題 Q に対して，次が成り立つ

$$\forall\, x \in D\ (P(x)) \vee Q \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, x \in D\ (P(x) \vee Q)$$
$$\exists\, x \in D\ (P(x)) \wedge Q \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, x \in D\ (P(x) \wedge Q)$$

注：Q の中に x は自由変数として現れない

$D = \{a, b\}$ のときの証明：演習問題

3 ページ前の分配法則との違いに注意

述語論理における重要な恒真式 (6)：束縛変数の変更

束縛変数の変更

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して，次が成り立つ

$$\forall\, x \in D\ (P(x)) \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, y \in D\ (P(y))$$
$$\exists\, x \in D\ (P(x)) \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, y \in D\ (P(y))$$

注：$P(x)$ の中に y は自由変数として現れず，
　　$P(y)$ の中に x は自由変数として現れない

この正しさはすぐに分かる

参考

積分 (など) でも同じような恒等式がある

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 「∀」と「∃」という記号の意味を理解し，使える
- 「∀」と「∃」を含む論理式に対する同値変形を理解する
  (実際に使うのは次回)