

13:00-14:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にする.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).

採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 集合 A, B を $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ と定義するとき, 次の集合がそれぞれ何であるか, その要素をすべて並べること(外延的定義)により答えよ. また, その集合の要素数が何であるかも合わせて答えよ. ただし, 2^A は A の冪集合を表す.

1. $A \times B$.
2. A^2 .
3. $2^A \cap 2^B$.
4. $2^A \cup 2^B$.
5. $\emptyset \times B$.

問題 2 集合 A, B を $A = \{a, b, c, d\}, B = \{e, f, g, h\}$ と定義する. 写像 $m: A \rightarrow B$ を $m(a) = h, m(b) = g, m(c) = h, m(d) = f$ で定義する. このとき, 次の集合がそれぞれ何であるか, その要素をすべて並べること(外延的定義)により答えよ. なお, 定義されない場合は「定義されない」と答えよ.

1. $m(\{a, b\})$.
2. $m^{-1}(\{e, f\})$.
3. $m^{-1}(m(\{c, d\}))$.

問題 3 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = |a|$$

であるとして定義する. ただし, $|a|$ は a の絶対値を表す.

1. 写像 f が全射ではないことを証明せよ.
2. 写像 f が単射ではないことを証明せよ.

問題 4 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ の上の関係 R を次のように定義する. すなわち,

任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ であることを $|x - y| \leq 2$ であることと定義する.

関係 R を表現するグラフを描け. また, 関係 R が (a) 反射性を持つか答えよ. (b) 完全性を持つか答えよ. (c) 対称性を持つか答えよ. (d) 反対称性を持つか答えよ. (e) 推移性を持つか答えよ. それぞれ理由を答える必要はない.

問題 5 任意の正の整数 n に対して, a_n を

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 9 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. 任意の正整数 n に対して

$$a_n = (-1)^n + 2^{n+1}$$

が成り立つことを証明せよ.

裏面に続く

問題 6 次の (A), (B) のいずれか一方を選択して解答せよ.

(どちらを選んだか明記すること. (A) と (B) の双方を解答している場合は, どちらも採点されない.)

(A) 次の命題は正しいか, 正しくないか, 理由も付けて答えよ.

任意の集合 A, B に対して, $2^A \subseteq 2^B$ ならば, $A \subseteq B$ が成り立つ.

(B) 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の部分集合 $X, X' \subseteq A$ に対して

$$f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$$

が成り立つことを証明せよ.

以上