離散数学	2017 年 8 月 7 日
期末試験	岡本 吉央

17:50–19:20．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1 集合 A, B を $A = \{1,2\}, B = \{a,b,c\}$ と定義するとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．また，その集合の要素数が何であるかも合わせて答えよ．ただし，2^A は A の冪集合を表す．

1. $A \times B$.
2. A^2.
3. $2^A \cap 2^B$.
4. $2^A \cup 2^B$.
5. $A \times \emptyset$.

問題 2 集合 A, B を $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{e,f,g,h\}$ と定義する．写像 $m\colon A \to B$ を $m(a) = g, m(b) = h, m(c) = h, m(d) = e$ で定義する．このとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．なお，定義されない場合は「定義されない」と答えよ．

1. $m(\{a,b\})$.
2. $m^{-1}(\{e,f\})$.
3. $m^{-1}(m(\{c,d\}))$.

問題 3 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = |a|$$

であるとして定義する．ただし，$|a|$ は a の絶対値を表す．

1. 写像 f が全射ではないことを証明せよ．
2. 写像 f が単射ではないことを証明せよ．

問題 4 集合 $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ の上の関係 R を次のように定義する．すなわち，

任意の $x, y \in A$ に対して $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であることを $-1 \leq x + y \leq 1$ であることと定義する．

関係 R を表現するグラフを描け．また，関係 R が (a) 反射性を持つか答えよ．(b) 完全性を持つか答えよ．(c) 対称性を持つか答えよ．(d) 反対称性を持つか答えよ．(e) 推移性を持つか答えよ．それぞれ理由を答える必要はない．

問題 5 任意の正の整数 n に対して，a_n を

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 6 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3a_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．任意の正整数 n に対して

$$a_n = 3^{n-1} + 3$$

が成り立つことを証明せよ．

裏面に続く

問題 6 次の (A)，(B) のいずれか一方を選択して解答せよ．
(どちらを選んだか明記すること．(A) と (B) の双方を解答している場合は，どちらも採点されない．)

(A) 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

任意の集合 A, B に対して，$2^A \subseteq 2^B$ ならば，$A \subseteq B$ が成り立つ．

(B) 任意の集合 A, B，任意の写像 $f\colon A \to B$，任意の部分集合 $X \subseteq A$ に対して

$$X \subseteq f^{-1}(f(X))$$

が成り立つことを証明せよ．

以上