

提出締切：2017年7月20日 講義終了時

授業内問題 11.1 任意の正の整数 n に対して, a_n を

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} - 2a_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. 任意の正整数 n に対して

$$a_n = 2^n - 1$$

が成り立つことを証明せよ.

復習問題 11.2 任意の正の整数 n に対して

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを数学的帰納法により証明せよ.

復習問題 11.3 任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ.

復習問題 11.4 任意の正の整数 n に対して, a_n を

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する. このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ.

復習問題 11.5 任意の正の整数 n に対して, 第 n 番フィボナッチ数 F_n を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ.

追加問題 11.6 任意の正の整数 n に対して

$$11^n - 4^n \text{ が } 7 \text{ で割り切れる}$$

ことを数学的帰納法により証明せよ.

復習問題 11.7 3以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n \leq 3^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ. (ヒント: n は 3以上の任意の正の整数であることに注意する. つまり, 基底段階は $n = 3$ のときとなる.)

追加問題 11.8 任意の正の整数 n に対して, C_n を次のように定義する

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} & (n > 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

となることを証明せよ. (補足: C_n はカタラン数と呼ばれ, よく研究されているものである.)

追加問題 11.9 任意の正の整数 n に対して, a_n を

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 7 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. 2以上の任意の正整数 $n \geq 2$ に対して

$$a_n < 3^n$$

が成り立つことを証明せよ. (ヒント: 基底段階に注意せよ.)

追加問題 11.10 第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき, 任意の正整数 n に対して,

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ.

追加問題 (発展) 11.11 第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \text{ および } F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$$

が成り立つことを証明せよ.

追加問題 (発展) 11.12 2以上の任意の整数 n に対して,
次が正しいことを証明したい.

平面上で, どの2つも平行でないような任意の
 n 個の直線 l_1, l_2, \dots, l_n はある1点で交わる.

次の数学的帰納法による証明は正しく見えるが, この命題
自体は正しくない. すなわち, 証明には誤りがある. 証明
の誤りを見つけ, 指摘せよ.

数学的帰納法により証明を行う.

[基底段階] $n = 2$ のとき, 平行でない2つの直
線は必ず1点で交わるので, 命題は正しい.

[帰納段階] $n = k \geq 2$ のとき, この命題が正
しいと仮定する. 証明すべきことは, 平面上で,
どの2つも平行でないような任意の $k + 1$ 個の
直線 l_1, l_2, \dots, l_{k+1} がある1点で交わることで
ある.

l_1, l_2, \dots, l_k を考えると, 帰納法の仮定から, こ
れらはある1点で交わる. その交点を p とする.

また, $l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, l_{k+1}$ を考えると, 帰納法
の仮定から, これらはある1点で交わる. その
交点を q とする.

ここで, p も q も l_1 と l_2 の交点であり, 平行で
ない2直線は1点でしか交わらないので, $p = q$
である.

すなわち, l_1, l_2, \dots, l_{k+1} は1点 p を共有する.

□