

提出締切：2017年7月13日 講義終了時

授業内問題 10.1 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ の上の関係 R を次のように定義する. すなわち,

任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ であることを $|x - y| \leq 2$ であることと定義する.

関係 R を表現するグラフを描け. また, 関係 R が (a) 反射性を持つか答えよ. (b) 完全性を持つか答えよ. (c) 対称性を持つか答えよ. (d) 反対称性を持つか答えよ. (e) 推移性を持つか答えよ.

復習問題 10.2 次に挙げるそれぞれの集合 A とその上の関係 R に対して, R を表現するグラフを描け. また, それぞれの関係 R が (a) 反射性を持つか答えよ. (b) 完全性を持つか答えよ. (c) 対称性を持つか答えよ. (d) 反対称性を持つか答えよ. (e) 推移性を持つか答えよ.

1. 集合 $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 上の関係 R で, 任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ であることを x が y の約数であることと定義する.
2. 集合 $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 上の関係 R で, 任意の $X, Y \in A$ に対して $X R Y$ であることを $X \subseteq Y$ と定義する.
3. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の関係 R で, 任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ であることを $x < y$ と定義する.
4. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の関係 R で, 任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ であることを $x = y$ と定義する.
5. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の関係 R で, 任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ であることを $x \equiv y \pmod{3}$ と定義する.

復習問題 10.3 \mathbb{R} 上の大小関係 \leq が全順序であることを証明せよ.

復習問題 10.4 任意の集合 A に対して, その冪集合 2^A 上の関係 \subseteq が半順序であることを証明せよ.

復習問題 10.5 1以上の整数全体の集合を \mathbb{Z}_+ と書くことにする. \mathbb{Z}_+ 上の関係 $|$ を次のように定義する. すなわち, 任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して $a | b$ であることは a が b の約数であることとする. このとき, $|$ が半順序であることを証明せよ.

復習問題 10.6 \mathbb{R} 上の関係 $=$ が同値関係であることを証明せよ.

復習問題 10.7 p を 1 以上の整数として, \mathbb{N} を 0 以上の整数全体の集合とする. \mathbb{N} 上の関係 \equiv_p を次のように定義する. すなわち, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $m \equiv_p n$ であることは $m \equiv n \pmod{p}$ であることとする. このとき, \equiv_p が同値関係であることを証明せよ.

追加問題 10.8 集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 上の次の関係 R_1, R_2, R_3 に対して, その関係を表現するグラフを描け. また, それぞれの関係が (a) 反射性を持つか答えよ. (b) 完全性を持つか答えよ. (c) 対称性を持つか答えよ. (d) 反対称性を持つか答えよ. (e) 推移性を持つか答えよ.

1. 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R_1 y$ であることを $x - y \leq 1$ であることとする.
2. 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R_2 y$ であることを $|x - y| \leq 1$ であることとする.
3. 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R_3 y$ であることを $x^2 - y^2 = 0$ であることとする.

追加問題 10.9 \mathbb{R}^2 上の関係 \preceq を次のように定義する. すなわち, 任意の $(x, x'), (y, y') \in \mathbb{R}^2$ に対して, $(x, x') \preceq (y, y')$ であることを $x \leq y$ かつ $x' \leq y'$ であることとする. このとき, \preceq が半順序となることを証明せよ.

追加問題 10.10 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ を考える. A 上の関係 R を次のように定義する. すなわち, 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ であることを $f(x) = f(y)$ であることとする. このとき, R が同値関係となることを証明せよ.

追加問題 (発展) 10.11 \mathbb{R}^2 上の関係 \preceq を次のように定義する. すなわち, 任意の $(x, x'), (y, y') \in \mathbb{R}^2$ に対して, $(x, x') \preceq (y, y')$ であることを

$$x \geq y \text{ ならば } \lceil x = y \text{ かつ } x' \leq y' \rceil$$

であることとする. このとき, \preceq が全順序となることを証明せよ. (ヒント: \mathbb{R} 上の大小関係 \leq が完全性, すなわち, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $\lceil x \leq y \text{ または } y \leq x \rceil$ が成り立つ, というものを使って, 場合分けを行ってみよ.) (補足: これは \mathbb{R}^2 上の辞書式順序と呼ばれるものである.)