

提出締切：2017年5月25日 講義終了時

復習問題 5.1 次の命題を証明せよ。

実数  $x$  が  $x > 3$  を満たすとき、 $x^2 > 9$  が成り立つ。

復習問題 5.2 次の命題を証明せよ。

実数  $x$  が  $x^2 - 3x + 2 = 0$  を満たすとき、 $x = 1$  または  $x = 2$  が成り立つ。

復習問題 5.3 次の命題は正しいか、正しくないか、理由も付けて答えよ。

実数  $x$  が  $x^2 > 9$  を満たすとき、 $x > 3$  が成り立つ。

復習問題 5.4 次の命題を証明せよ。

任意の実数  $x$  に対して、ある実数  $y$  が存在して、 $x + y = 0$  となる。

復習問題 5.5 次の命題を証明せよ。

ある実数  $x$  が存在して、任意の実数  $y$  に対して、 $xy = 0$  となる。

復習問題 5.6 次の命題は正しいか、正しくないか、理由も付けて答えよ。

ある実数  $x$  が存在して、任意の実数  $y$  に対して、 $x + y = 0$  となる。

復習問題 5.7 実数  $x$  と  $y$  に対して、次の2つが同値であることを証明せよ。

- (1)  $xy = 1$  である。
- (2) 0 ではないある実数  $t$  が存在して、 $x = t$  かつ  $y = 1/t$  である。

復習問題 5.8 次の命題を対偶により証明せよ。

実数  $a, b$  を考える。任意の正実数  $\epsilon$  に対して  $a < b + \epsilon$  が成り立つならば、 $a \leq b$  が成り立つ。

復習問題 5.9 次の命題を背理法により証明せよ。

実数  $a, b$  が  $a^2 + b = 13$  と  $b \neq 4$  を満たすならば、 $a \neq 3$  が成り立つ。

補足問題 5.10 任意の命題変数  $P, Q, R$  に対して、次が成り立つことを証明せよ。(真理値表による証明と同値変形による証明のどちらでも構わない。)

1.  $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$ .
2.  $P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \rightarrow F$ .

追加問題 5.11 次の命題を証明せよ。

実数  $x$  が  $x^4 = 16$  を満たすとき、 $x = -2$  または  $x = 2$  が成り立つ。

(注意:「 $x$  が実数である」という性質をどこで使うのか明示すること。)

追加問題 5.12 実数  $x$  に対して、次の2つが同値であることを証明せよ。

- (1)  $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$  を満たす。
- (2)  $x = 3$  である。

(注意:「 $x$  が実数である」という性質をどこで使うのか明示すること。)

追加問題 5.13 次の命題は正しいか、正しくないか、理由も付けて答えよ。

任意の実数  $x$  に対して、ある実数  $y$  が存在して、 $xy = 0$  となる。

追加問題 5.14 次の命題は正しいか、正しくないか、理由も付けて答えよ。

任意の実数  $x$  に対して、ある実数  $y$  が存在して、 $xy = 1$  となる。

追加問題 5.15 次の命題は正しいか、正しくないか、理由も付けて答えよ。

ある実数  $x$  が存在して、任意の実数  $y$  に対して、 $xy = 1$  となる。

追加問題 5.16 次の命題を証明せよ。

実数  $x$  が  $x > 2$  を満たすならば、ある整数  $n$  に対して、 $x < n < x^2$  が成り立つ。

追加問題 5.17 次の命題を背理法により証明せよ.

任意の異なる正整数  $n, m$  に対して,  $n^2 = 1$  ならば,  $m^2 \neq 1$  が成り立つ.

追加問題 (発展) 5.18 次の命題はどれも正しい. 証明せよ.

1. 任意の正実数  $\varepsilon$  に対して, ある正実数  $\delta$  が存在して, 任意の正実数  $x$  に対して,  $x < \delta$  ならば,  $x^2 < \varepsilon$  である.
2. 任意の正整数  $K$  に対して, ある正整数  $k$  が存在して, 任意の正整数  $n$  に対して,  $n > k$  ならば,  $\log_2 n > K$  である.

追加問題 (発展) 5.19 次の命題を背理法により証明せよ.

実数  $a, b$  が  $a \neq 0, b \neq 0, a < \frac{1}{a} < b < \frac{1}{b}$  を満たすとき,  $a < -1$  が成り立つ.

---

授業内問題 5.20 次の命題を証明せよ.

実数  $x$  が  $x^2 = 1$  を満たすとき,  $x = 1$  または  $x = -1$  が成り立つ.

授業内問題 5.21 次の命題は正しいか, 正しくないか, 理由も付けて答えよ.

任意の整数  $a, b$  に対して, ある整数  $c, d$  が存在して,  $a^2 - b^2 = cd$  となる.