

提出締切：2017年4月20日 講義終了時

授業内問題 1.1 命題変数 P, Q を使った命題論理式

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$$

の真理値表を書け。

授業内問題 1.2 次の各集合は何であるか？ その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ。

1. $A = \{n \mid n \text{ は } 0 \text{ 以上 } 10 \text{ 以下の奇数である}\}$.
2. $B = \{2n \mid n \text{ は } 0 \text{ 以上 } 10 \text{ 以下の奇数である}\}$.

復習問題 1.3 命題変数 P, Q を使った次の命題論理式の真理値表を書け。

1. $(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q$.
2. $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$.

復習問題 1.4 集合 A を $A = \{\text{あ, い, う, え, お}\}$ と定める。このとき、次の4つの中で、正しいものはどれか。正しいもののみをすべて挙げよ。

1. $\text{あ} \in A$.
2. $\text{ま} \in A$.
3. $\text{お} \in A$.
4. $\text{う} \in A$.

復習問題 1.5 次の各集合は何であるか？ その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ。

1. $A = \{n \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である}\}$.
2. $B = \{n^2 \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である}\}$.
3. $C = \{m + n \mid m \text{ と } n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である}\}$.

復習問題 (発展) 1.6 次のパズルはスマリヤン [2, 18–19 ページ] による。

「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいました。「赤の王さまが眠っていらっしゃるときは、王さまが信じなさることはすべてまちがっている。つまり本当のことでないのじゃ。けれども、王さまが目覚ましていらっしゃるときは、信じなさることはすべて本当なのじゃ。さて、昨日の晩のぴったり十時に、赤の王さまは、いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っていると信じなさった。ではそのとき、赤の女王さまは、眠っていらっしゃったか、それとも目をさましていらっしゃったか、どうじゃ？」

この問題の主旨は、上のパズルを記号論理の手法で解くことである。命題 P が「赤の王さまは眠っている」こと、命題 Q が「赤の女王さまは眠っている」ことを表すものとする。

1. 赤の王さまが信じていること、つまり、「いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っている」ということを、 P と Q を使った命題論理式で表せ。
2. 赤の王さまの性格と前問の解答となる命題論理式を踏まえて、「赤の王さまが眠っているとき、そのときに限り、『いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っている』は正しくない」ということを、 P と Q を使った命題論理式で表せ。
3. 前問の解答を踏まえて、パズルを解け。すなわち、赤の女王さまは眠っていたのか、どうか、決定せよ。

追加問題 1.7 命題変数 P, Q, R を使った次の命題論理式の真理値表を書け。

1. $((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$.
2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((R \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow Q))$.
3. $(P \rightarrow R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$.

追加問題 1.8 次の各集合は何であるか？ その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ。ただし、 \mathbb{N} は自然数全体の集合であり、すなわち、0以上の整数を全て集めた集合であるとする。

1. $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, \text{ かつ } 5 < n < 10\}$.
2. $B = \{n^2 \mid n \text{ は奇整数, かつ } 0 \leq n < 10\}$.
3. $C = \{n \mid n \in \mathbb{N}, \text{ かつ } n^2 = -1\}$.

追加問題 (発展) 1.9 次の論理パズルはスマリヤンの別の本に依拠する [1].

国勢調査員のマグレガーが「騎士と奇人の島」というヘンテコな島の調査に行く。その島には騎士と奇人しかおらず、騎士は本当のことしか言わず、奇人は間違ったことしか言わない。マグレガーは結婚しているカップルだけを調査の対象にした。

ケース 1: マグレガーがドアをノックすると、夫がドアを半分開いて用件を聞いた。マグレガーはそれに答えて、「国勢調査をしています。あなた方ご夫妻について

お尋ねしたいのですが、それぞれ騎士と奇人のどちらですか？」

「両方とも奇人だよ！」

夫と妻はそれぞれどちらに属するか？

ケース 2：隣りの家でマグレガーが夫の方に尋ねた。「お宅は両方とも奇人ですか？」答は「少なくとも片方はね。」さて、各々どちらか？

ケース 3：マグレガーが次に訪問した家はまたもや難問を出した。ドアをおずおずと開けた内気そうな男に、マグレガーが夫婦がそれぞれどちらか訪ねると、男の答はこれだけだった。「もし私が騎士ならば私の妻も騎士です。」

ちょっと不機嫌になったマグレガーは、歩き去りながら考えた。「こんなあいまいな答じゃ何もわかんないじゃないか！」そしてメモに「夫・妻—両方とも不詳」と書こうとしたちょうどそのとき、彼は大学時代の論理学の講義のことを思い出した。「そうだよ！夫・妻の両方ともわかるじゃないか。」

夫・妻、それぞれどちらか？

この演習問題の主旨は、記号論理を使ってこの3つのパズルを解くことである。命題 P が「夫は奇人である」こと、命題 Q が「妻は奇人である」ことを表すとする。

1. ケース 1 で夫が言ったこと「両方とも奇人だよ！」を P と Q を使った命題論理式で表せ。
2. ケース 2 で夫が言ったこと (の意味すること) 「少なくとも片方は奇人だよ」を P と Q を使った命題論理式で表せ。
3. ケース 3 で夫が言ったこと「もし私が騎士ならば私の妻も騎士です」を P と Q を使った命題論理式で表せ。
4. それぞれのケースにおいて、「夫が奇人であるとき、そのときに限り、夫の言うことは間違っている」ということを、 P と Q を使った命題論理式によって書き下せ。
5. 前問で得られた命題論理式の真理値表を書き下すことにより、それぞれのケースにおいて、夫と妻が騎士なのか奇人なのか、決定せよ。

参考文献

- [1] レイモンド・スマリヤン (著), 長尾 確, 田中 朋之 (訳), 『決定不能の論理パズル』, 白揚社, 1990 年.
- [2] レイモンド・M・スマリヤン (著), 市場 泰男 (訳), 『パズルランドのアリス II 鏡の国篇』, 早川書房, 2004 年.