離散最適化基礎論 第 9 回
木幅と論理：単項二階論理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 1 月 6 日

最終更新：2017 年 1 月 16 日　15:07

スケジュール 前半

1. 離散最適化における木分解の役割 (10/7)

★ 休講 (国内出張) (10/14)

2. 木に対するアルゴリズム設計 (10/23)
3. 道幅と道分解 (10/30)
4. 道分解を用いたアルゴリズム設計 (11/4)

★ 休講 (海外出張) (11/11)

5. 木分解と木幅 (11/18)

★ 休講 (調布祭) (11/25)

6. 木幅の性質 (12/2)

スケジュール 後半 (予定)

7. 木分解を用いたアルゴリズム設計 (12/9)
8. 木分解を用いたアルゴリズム設計：連結性 (12/16)
- ⋆ 休講 (天皇誕生日) (12/23)
- ⋆ 冬季休業 (12/30)
9. 木幅と論理：単項二階論理 (1/6)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/13)
10. 木幅と論理：オートマトン (1/20)
11. 木幅と論理：アルゴリズム設計 (1/27)
12. 木分解構成アルゴリズム：準備 (2/3)
13. 木分解構成アルゴリズム (2/10)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

主題

離散最適化のトピックの１つとして
グラフの木分解を取り上げ,

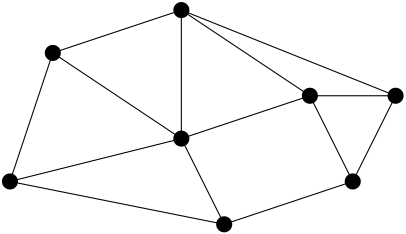
- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

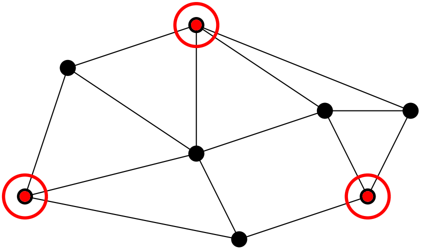
- 「離散最適化の神髄」だから

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



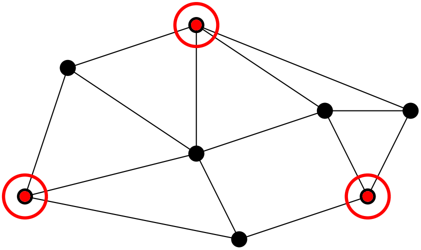
これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ

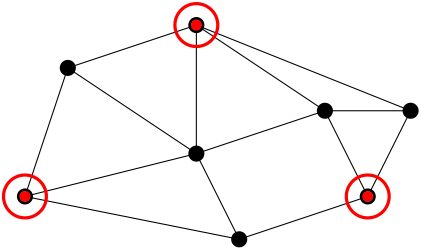


これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

事実

グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

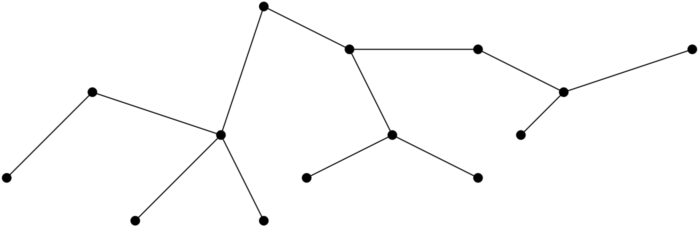
事実

グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

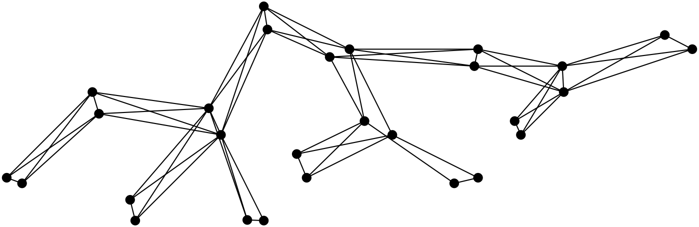
直感？

グラフが木に 近ければ，簡単に解けそう？

これは木

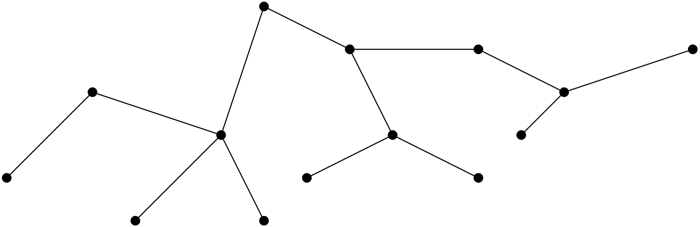


これは木に近い？

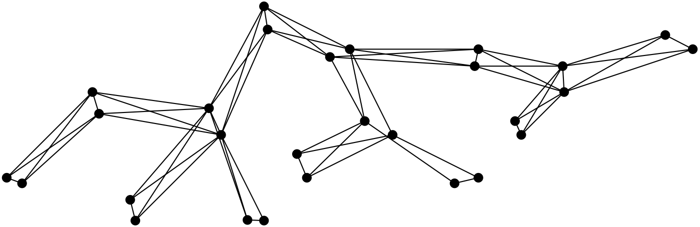


木に近い，とは？

これは木



これは木に近い？ $\rightsquigarrow$ 「木っぽさ」を表す尺度を考える必要あり



木幅 — 「木っぽさ」を表す尺度

この講義のキーワード (と荒っぽい説明)

グラフの木幅	グラフの「木っぽさ」を表す尺度 (の 1 つ)
グラフの木分解	グラフを「木っぽく」表した構造
動的計画法	木分解上の効率的アルゴリズム
オートマトン	動的計画法に基づくアルゴリズムの解釈
Courcelle の定理	上記と論理学に基づく『メタアルゴリズム』

次の主題が有機的に結びつく面白い話題

- グラフ
- アルゴリズム
- オートマトン
- 論理 (特に，有限モデル理論)

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

単項二階論理を用いてグラフの性質や構造が記述できるようになる

- 独立集合
- 支配集合
- 連結性
- ハミルトン閉路 など

Courcelle の定理がどんなものか理解して，使えるようになる

目次

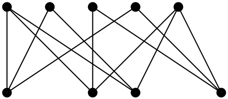
無向グラフ $G = (V, E)$

「G が二部グラフであること」を論理を用いて書くと

$$\exists\, A \subseteq V\ (\exists\, B \subseteq V\ (\ \begin{aligned}[t] &\forall\, v \in V\ ((v \in A \land v \notin B) \lor (v \notin A \land v \in B)) \\ &\land \forall\, u \in A\ (\forall v \in A\ (\neg\, \mathtt{adj}(u, v))) \\ &\land \forall\, u \in B\ (\forall v \in B\ (\neg\, \mathtt{adj}(u, v))))) \end{aligned}$$

ここで，任意の頂点 $u, v \in V$ に対して

$$\mathtt{adj}(u, v) = \mathrm{true} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ と } v \text{ は隣接}$$



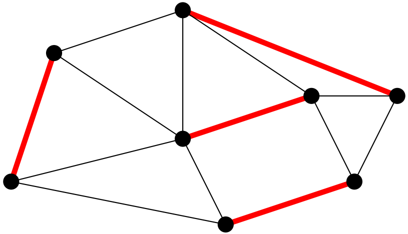
無向グラフ $G = (V, E)$，辺部分集合 $M \subseteq E$

例：「M が G のマッチングである」ことを論理を用いて書くと

$$\forall\, e \in M\ (\forall\, f \in M\ (e \neq f \to \neg\exists\, v \in V\ (\mathtt{inc}(v, e) \land \mathtt{inc}(v, f))))$$

ここで，任意の頂点 $v \in V$ と任意の辺 $e \in E$ に対して

$$\mathtt{inc}(u, e) = \mathrm{true} \quad \Leftrightarrow \quad v \text{ は } e \text{ に接続}$$



無向グラフ $G = (V, E)$

グラフに対する単項二階論理式

変数

- 頂点 $v \in V$
- 辺 $e \in E$
- 頂点部分集合 $X \subseteq V$
- 辺部分集合 $F \subseteq E$

論理結合子

- $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

量化子

- $\forall$, $\exists$

述語

- $u, v \in V$ に対して,「$u = v$」
- $e, f \in E$ に対して,「$e = f$」
- $v \in V$, $X \subseteq V$ に対して,「$v \in X$」
- $e \in E$, $F \subseteq E$ に対して,「$e \in F$」
- $X_1, X_2 \subseteq V$ に対して,「$X_1 \subseteq X_2$」
- $F_1, F_2 \subseteq E$ に対して,「$F_1 \subseteq F_2$」
- $u, v \in V$ に対して,「$\mathtt{adj}(u, v)$」
- $v \in V$, $e \in E$ に対して,「$\mathtt{inc}(v, e)$」

これらを用いて記述できる論理式が単項二階論理式

単項二階論理式 (monadic second-order logic)

単項	部分集合に対する量化が行える (例えば，二項関係に対する量化は行えない)
二階	V, E の要素だけではなく，部分集合も変数として使える

- 頂点部分集合に対する量化と辺部分集合に対する量化を分けて考えることもある
- この講義では，分けず，どちらも行えるものとする

普通の論理と同じように次のような言い換えができる

$$
\begin{aligned}
\phi \rightarrow \psi &\Leftrightarrow \neg\phi \vee \psi \\
\phi \leftrightarrow \psi &\Leftrightarrow (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) \\
&\Leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \phi) \\
\exists\, x\, (\phi) &\Leftrightarrow \neg\forall\, x\, (\neg\phi)
\end{aligned}
$$

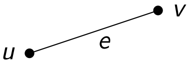
この意味で,「$\rightarrow$」,「$\leftrightarrow$」,「$\exists$」は冗長な記号

普通の論理と同じように次のような言い換えができる

$$
\begin{aligned}
\forall\, v \in X\ (\phi) &\quad\Leftrightarrow\quad \forall\, v \in V\ (v \in X \to \phi)\\
\exists\, v \in X\ (\phi) &\quad\Leftrightarrow\quad \exists\, v \in V\ (v \in X \land \phi)\\
\forall\, e \in F\ (\phi) &\quad\Leftrightarrow\quad \forall\, e \in E\ (e \in F \to \phi)\\
\exists\, e \in F\ (\phi) &\quad\Leftrightarrow\quad \exists\, e \in E\ (e \in F \land \phi)\\
X_1 \subseteq X_2 &\quad\Leftrightarrow\quad \forall\, v \in V\ (v \in X_1 \to v \in X_2)\\
F_1 \subseteq F_2 &\quad\Leftrightarrow\quad \forall\, e \in E\ (e \in F_1 \to e \in F_2)\\
X_1 = X_2 &\quad\Leftrightarrow\quad (X_1 \subseteq X_2) \land (X_2 \subseteq X_1)\\
v \in X \cap Y &\quad\Leftrightarrow\quad v \in X \land v \in Y\\
v \in X \cup Y &\quad\Leftrightarrow\quad v \in X \lor v \in Y\\
v \in X - Y &\quad\Leftrightarrow\quad v \in X \land \neg(v \in Y)
\end{aligned}
$$

グラフの性質から次の言いかえができる

$$\mathtt{adj}(u,v) \quad \Leftrightarrow \quad \neg(u=v) \land \exists\, e \in E\ (\mathtt{inc}(u,e) \land \mathtt{inc}(v,e))$$



また，次のような記号の置きかえも行うことがある

$$\neg(v \in X) \quad \Leftrightarrow \quad v \notin X$$
$$\neg(u = v) \quad \Leftrightarrow \quad u \neq v$$

無向グラフ $G = (V, E)$

「G が二部グラフであること」を論理を用いて書くと

$$\begin{aligned}\exists\, A \subseteq V\ (\exists\, B \subseteq V\ (\quad & \forall\, v \in V\ ((v \in A \land v \notin B) \lor (v \notin A \land v \in B)) \\ & \land \forall\, u \in A\ (\forall v \in A\ (\neg\, \mathtt{adj}(u, v))) \\ & \land \forall\, u \in B\ (\forall v \in B\ (\neg\, \mathtt{adj}(u, v)))))\end{aligned}$$

これは，単項二階論理式

無向グラフ $G = (V, E)$，辺部分集合 $M \subseteq E$

例：「M が G のマッチングである」ことを論理を用いて書くと

$\forall\ e \in M\ (\forall\ f \in M\ (e \neq f \to \neg\exists\ v \in V\ (\texttt{inc}(v, e) \land \texttt{inc}(v, f))))$

これは，単項二階論理式

- M は自由変数 (M を決めないと真理値が定まらない)

単項二階論理式 ϕ

モデル (model)

$\boxed{\phi \text{ が自由変数を持たないとき}}$

- グラフ G において ϕ が成り立つ (真となる) とき，

$$G \models \phi$$

と書き，G は ϕ の**モデル**であるという

$\boxed{\phi \text{ が自由変数 } x\ (\in V) \text{ を持つ (つまり，} \phi = \phi(x)) \text{ とき}}$

- グラフ G と頂点 $v \in V$ に対して $\phi(v)$ が成り立つとき，

$$G \models \phi(v)$$

と書く

他の種類の自由変数のときも同様

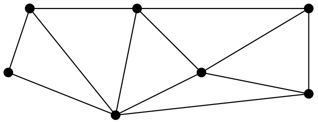
グラフに対する単項二階論理では次のような述語を (直接) 使えない

- 集合の要素数やそれの比較

$$|X| = 3, \quad |A| \geq |B|, \quad |X| \equiv 0 \pmod 2$$

- 平面描画に関する性質

$$\exists \text{ 単射 } \varphi\colon V \to \mathbb{R}^2 \; (\\ \forall\, e \in E\, (\forall\, f \in E\, (e \neq f \to \overline{\varphi(e)} \cap \overline{\varphi(f)} - (\varphi(e \cup f)) = \emptyset)) \\ )$$



目次

この節の目標

グラフに対する様々な性質，様々な部分構造に対して
単項二階論理式による記述を与える

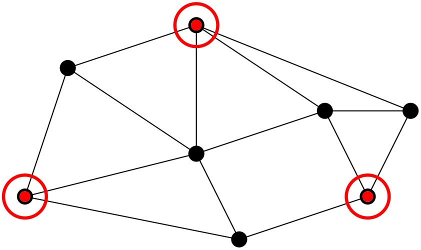
- 独立集合
- 支配集合
- 連結性
- ハミルトン閉路

単項二階論理式の記述力が高いことを見る

無向グラフ $G = (V, E)$

独立集合とは？

G の独立集合 (independent set) とは，
頂点部分集合 $I \subseteq V$ で，I のどの 2 頂点も隣接しないもの

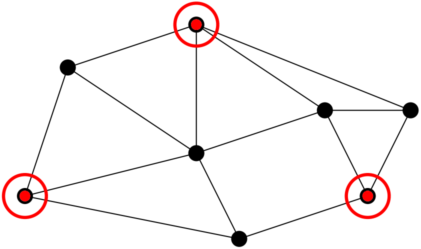


無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $X \subseteq V$

「X が G の独立集合である」ことを単項二階論理式で表すと

$\forall\ u \in X\ (\forall\ v \in X\ (\neg\,\mathtt{adj}(u, v)))$

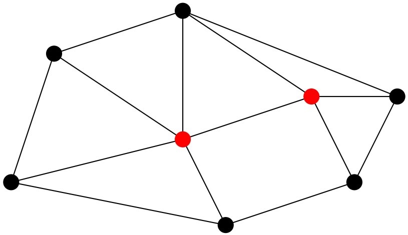
X は自由変数



$G = (V, E)$ 無向グラフ

支配集合とは？

G の支配集合 (dominating set) とは，頂点部分集合 $D \subseteq V$ で，
$V - D$ のどの頂点も D のある頂点に隣接するもの

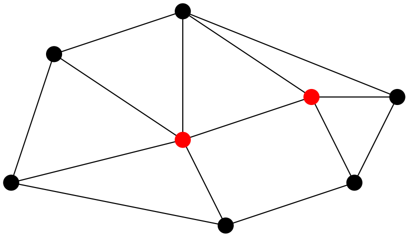


無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $X \subseteq V$

「X が G の支配集合である」ことを単項二階論理式で表すと

$\forall\ v \in V\ (v \notin X \rightarrow \exists\ u \in X\ (\mathtt{adj}(u, v)))$

X は自由変数



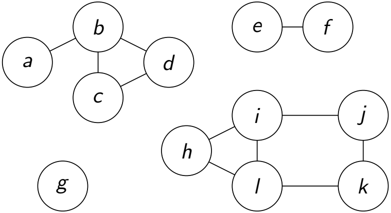
グラフの連結性

無向グラフ $G = (V, E)$

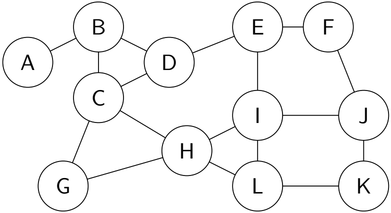
グラフが連結であるとは？

G が連結であるとは,
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは非連結と呼ばれる



非連結グラフ



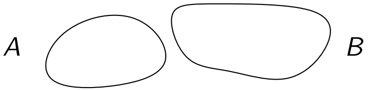
連結グラフ

注：「グラフが連結している」とは言わない

無向グラフ $G = (V, E)$

目標：「G が連結である」ことを単項二階論理式で表す

- そのためには「G が非連結である」ことが表せればよい
- G が非連結である $\Leftrightarrow$
  V の分割 $\{A, B\}$ で，A と B の間に辺がないものが存在する



この後者の条件を単項二階論理式で表せればよい

無向グラフ $G = (V, E)$

「A が空集合ではない」ことを単項二階論理式で表すと

$\exists\ v \in V\ (v \in A)$

「$\{A, B\}$ が V の分割である」ことを単項二階論理式で表すと

$$(\exists\ v \in V\ (v \in A)) \land (\exists\ v \in V\ (v \in B)) \land$$
$$(\forall\ v \in V\ ((v \in A \land v \notin B) \lor (v \notin A \land v \in B)))$$

「A と B の間に辺がない」ことを単項二階論理式で表すと

$\forall\ u \in A\ (\forall\ v \in B\ (\neg\, \mathtt{adj}(u, v)))$

「G が非連結である」ことを単項二階論理式で表すと

$$\begin{aligned}\exists\ A \subseteq V\ (\exists\ B \subseteq V\ ((\exists\ v \in V\ (v \in A)) \land (\exists\ v \in V\ (v \in B))\\ \land\ (\forall\ v \in V\ ((v \in A \land v \notin B) \lor (v \notin A \land v \in B)))\\ \land\ (\forall\ u \in A\ (\forall\ v \in B\ (\neg\, \mathtt{adj}(u, v))))))\end{aligned}$$

無向グラフ $G = (V, E)$

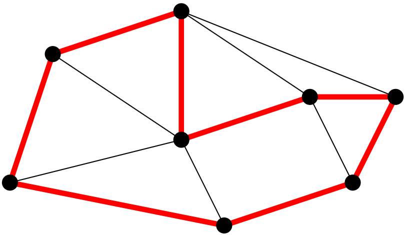
「G が連結である」ことを単項二階論理式で表すと

$$
\begin{aligned}
\neg(\exists\, A \subseteq V\ (\exists\, B \subseteq V\ ((\exists\, v \in V\ (v \in A)) \wedge (\exists\, v \in V\ (v \in B)) \\
\wedge\ (\forall\, v \in V\ ((v \in A \wedge v \notin B) \vee (v \notin A \wedge v \in B))) \\
\wedge\ (\forall\, u \in A\ (\forall\, v \in B\ (\neg\, \mathtt{adj}(u, v)))))))
\end{aligned}
$$

$G = (V, E)$ 無向グラフ

ハミルトン閉路とは？

G のハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle) とは，
G の全域部分閉路

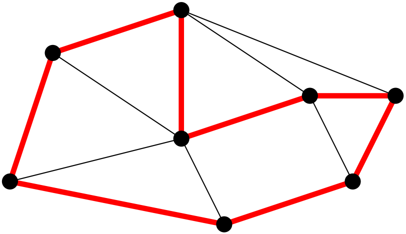


- G の全域部分グラフ (spanning subgraph) とは，
その頂点集合が V であること

無向グラフ $G = (V, E)$

目標：「G がハミルトン閉路を持つ」ことを単項二階論理式で表す

- そのために，ハミルトン閉路を G の辺部分集合であると見なす
- つまり，(V, C) が G のハミルトン閉路であるような $C \subseteq E$ を考える
- C が次の 2 つを満たせば，(V, C) はハミルトン閉路
  - (V, C) が連結
  - (V, C) において，各頂点の次数が 2



課題

「(V, C) が連結」であることをどう表すか？

- 「G が連結」は次のように表せた
  $$\begin{aligned}\neg(\exists\, A \subseteq V\ (\exists\, B \subseteq V\ ((\exists\, v \in V\ (v \in A)) \land (\exists\, v \in V\ (v \in B))\\ \land\ (\forall\, v \in V\ ((v \in A \land v \notin B) \lor (v \notin A \land v \in B)))\\ \land\ (\forall\, u \in A\ (\forall\, v \in B\ (\neg\, \mathtt{adj}(u, v)))))))\end{aligned}$$
- この「$\mathtt{adj}(u, v)$」を (V, C) における隣接性を表すように変える
- 以前行った言い換えを思い出す

$$\mathtt{adj}(u, v) \quad \Leftrightarrow \quad u \neq v \land \exists\, e \in E\ (\mathtt{inc}(u, e) \land \mathtt{inc}(v, e))$$

- つまり，
  (V, C) において u, v が隣接 $\Leftrightarrow$
  $$\neg(u = v) \land \exists\, e \in C\ (\mathtt{inc}(u, e) \land \mathtt{inc}(v, e))$$

「(V, C) が連結」であることを単項二階論理式で表すと

$$\neg(\exists\ A \subseteq V\ (\exists\ B \subseteq V\ ((\exists\ v \in V\ (v \in A)) \land (\exists\ v \in V\ (v \in B))$$
$$\land\ (\forall\ v \in V\ ((v \in A \land v \notin B) \lor (v \notin A \land v \in B)))$$
$$\land\ (\forall\ u \in A\ (\forall\ v \in B\ (\neg(u \neq v \land \exists\ e \in C\ (\mathtt{inc}(u, e) \land \mathtt{inc}(v, e))))))))$$

↑ (V, C) において u, v が隣接

次の課題

「(V, C) において各頂点の次数が 2」であることをどう表すか？

- 「(V, C) において v の次数が 2」をどう表すか，まず考えると
$$\exists\, e \in C\ (\exists\, f \in C\ (e \neq f \wedge \mathtt{inc}(v, e) \wedge \mathtt{inc}(v, f) \wedge (\forall\, g \in C\ (\mathtt{inc}(v, g) \rightarrow (e = g \vee f = g)))))$$
- つまり，

「(V, C) において各頂点の次数が 2」であることを単項二階論理式で表すと

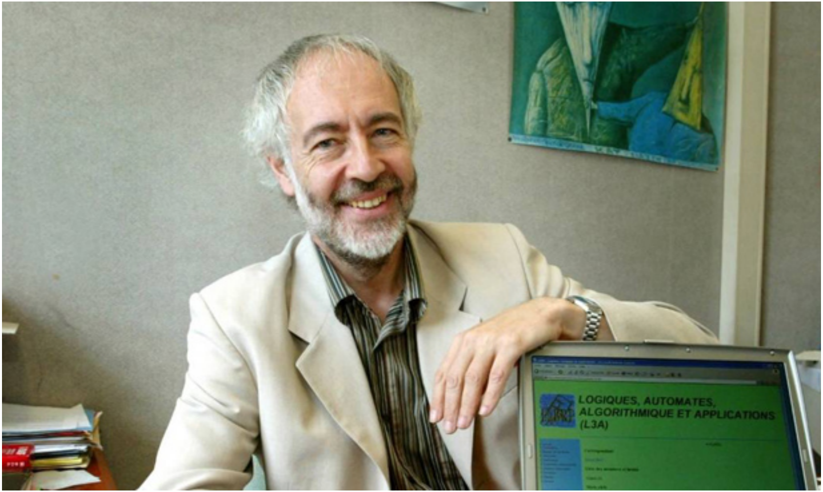
$$\forall\, v \in V\ (\exists\, e \in C\ (\exists\, f \in C\ (e \neq f \wedge \mathtt{inc}(v, e) \wedge \mathtt{inc}(v, f) \wedge (\forall\, g \in C\ (\mathtt{inc}(v, g) \rightarrow (e = g \vee f = g))))))$$

以上の考察をまとめると

「G がハミルトン閉路を持つ」ことを単項二階論理式で表すと

$$
\begin{aligned}
&\exists\, C \subseteq E\ (\\
&\quad \neg(\exists\, A \subseteq V\ (\exists\, B \subseteq V\ ((\exists\, v \in V\ (v \in A)) \land (\exists\, v \in V\ (v \in B))\\
&\quad\ \land (\forall\, v \in V\ ((v \in A \land v \notin B) \lor (v \notin A \land v \in B)))\\
&\quad\ \land (\forall\, u \in A\ (\forall\, v \in B\ (\neg(u \neq v \land \exists\, e \in C\ (\mathtt{inc}(u,e) \land \mathtt{inc}(v,e)))))))))\\
&\quad \land\\
&\quad\ (\forall\, v \in V\ (\exists\, e \in C\ (\exists\, f \in C\ (e \neq f \land \mathtt{inc}(v,e) \land \mathtt{inc}(v,f) \land\\
&\quad\ (\forall\, g \in C\ (\mathtt{inc}(v,g) \rightarrow (e = g \lor f = g)))))))\\
&)
\end{aligned}
$$

目次



http://www.labri.fr/perso/courcell/

Courcelle の定理 (1990)

無向グラフ G と単項二階論理式 ϕ が与えられたとき，
$G \models \phi$ となるか判定することは $O(f(\mathtt{tw}(G), |\phi|)|V|)$ 時間でできる

- ここで，$|\phi|$ は ϕ の長さ (記述長) で，f はある関数
- $\mathtt{tw}(G)$ と $|\phi|$ が定数ならば，この計算量は $O(|V|)$

Courcelle の定理の帰結

G の木幅が定数であれば，単項二階論理式で表現できる性質の判定は線形時間でできる

重要な点

- 判定したい性質を単項二階論理式で書くだけで，自動的に，線形時間アルゴリズムが得られる
- 様々な性質に対するアルゴリズムを包括した「メタアルゴリズム」

単項二階論理式 ϕ が自由変数 $X \subseteq V$ を持つとする

Courcelle の定理 (1990) の系 (Arnborg, Lagergren, Seese '91)

無向グラフ G，単項二階論理式 $\phi(X)$ が与えられたとき，

$$\max\{|S| \mid S \subseteq V, G \models \phi(S)\}$$

という最適化問題は $O(f(\mathtt{tw}(G), |\phi|)|V|)$ 時間で解ける

- ここで，$|\phi|$ は ϕ の長さ (記述長) で，f はある関数
- $\mathtt{tw}(G)$ と $|\phi|$ が定数ならば，この計算量は $O(|V|)$
- 「max」を「min」に変えたバージョンも同じように解ける
- 頂点部分集合ではなく，辺部分集合に対するバージョンも同じように解ける
- 要素数最大化ではなく，重み付き要素数最大化も同じように解ける

今までの考察と Courcelle の定理から次が分かる

G の木幅が定数であるとき，

- 最大独立集合問題は線形時間で解ける
- 最小支配集合問題は線形時間で解ける
- ハミルトン閉路問題は線形時間で解ける

これらは，今までの講義で行ってきた
「動的計画法によるアルゴリズム」でも得られた

注意

「Courcelle の定理から得られるアルゴリズム」では
$O(|V|)$ の定数項が大きくなりがち (f が急激に増加しがち)

今までの考察と Courcelle の定理から次が分かる

G の木幅が定数であるとき，

- 最大独立集合問題は線形時間で解ける
- 最小支配集合問題は線形時間で解ける
- ハミルトン閉路問題は線形時間で解ける

Courcelle の定理：使い方

1. 解きたい問題に現れる性質を単項二階論理式で書いてみる
2. 書ければ，Courcelle の定理が使える
   (ここまでで，木幅が定数のときの線形時間アルゴリズムが得られる)
3. しかし，実際のアルゴリズムは動的計画法を用いて設計する
   (そうすると，より実用的な線形時間アルゴリズムが得られる)

Courcelle の定理を実装するという試みも存在する

Sequoia (Langer, Reidl, Rossmanith, Sikdar '12)

`http://sequoia.informatik.rwth-aachen.de/sequoia/`

- グラフと単項二階論理式を入力すると，解いてくれる
- ただし，アルゴリズムは Courcelle ('90) のものとは違う
  - オートマトンを用いないアルゴリズム
  - 計算量が Courcelle のものよりもよい

目次

今日のまとめと次回の予告

今日の目標

単項二階論理を用いてグラフの性質や構造が記述できるようになる

- 独立集合
- 支配集合
- 連結性
- ハミルトン閉路 など

Courcelle の定理がどんなものか理解して，使えるようになる

次回，次々回の予告

Courcelle の定理の証明の雰囲気を味わう

- そのために，オートマトンをまず扱う

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次