# 離散最適化基礎論 第 8 回
# 木分解を用いたアルゴリズム設計：連結性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 12 月 16 日

最終更新：2016 年 12 月 16 日　10:28

# スケジュール 前半 (予定)

1. 離散最適化における木分解の役割 (10/7)
- ⋆ 休講 (国内出張) (10/14)
2. 木に対するアルゴリズム設計 (10/23)
3. 道幅と道分解 (10/30)
4. 道分解を用いたアルゴリズム設計 (11/4)
- ⋆ 休講 (海外出張) (11/11)
5. 木分解と木幅 (11/18)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/25)
6. 木幅の性質 (12/2)

注意：予定の変更もありうる

# スケジュール 後半 (予定)

7. 木分解を用いたアルゴリズム設計 (12/9)
8. 木分解を用いたアルゴリズム設計：連結性 (12/16)
- ⋆ 休講 (天皇誕生日) (12/23)
- ⋆ 冬季休業 (12/30)
9. 木幅と論理：単項二階論理 (1/6)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/13)
10. 木幅と論理：オートマトン (1/20)
11. 木幅と論理：アルゴリズム設計 (1/27)
12. 木分解構成アルゴリズム：準備 (2/3)
13. 木分解構成アルゴリズム (2/10)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

## 主題

離散最適化のトピックの 1 つとして
グラフの木分解を取り上げ,

- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

## 今日の目標

木分解を用いた効率的アルゴリズムが設計できるようになる
特に，連結性を伴う問題を扱えるようになる

- ハミルトン閉路問題

キーワード：素敵な木分解，再帰，動的計画法

# グラフの木分解：定義

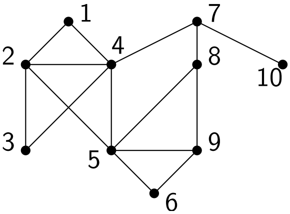
## 木分解 (tree decomposition) とは？

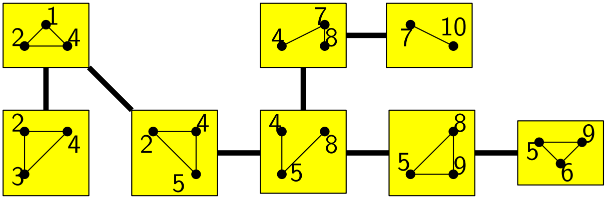
無向グラフ $G = (V, E)$ の**木分解**とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも $V$ の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 $X$ が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で $v$ を含むものは
$\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する



木分解の節点を**バッグ** (bag) と呼ぶことがある

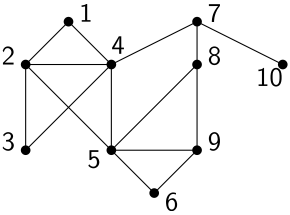
## グラフの木幅とは？

- 無向グラフ $G$ の木分解 $\mathcal{T}$ の幅 (width)

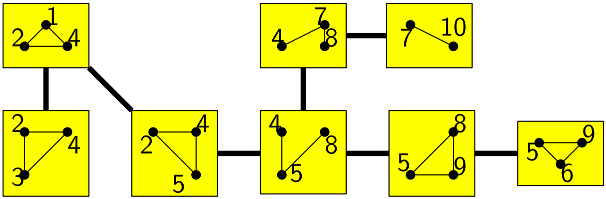
$$\mathtt{tw}(\mathcal{T}) = \max\{|S| - 1 \mid S \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点}\}$$

- 無向グラフ $G$ の木幅 (treewidth)

$$\mathtt{tw}(G) = \min\{\mathtt{tw}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \text{ は } G \text{ の木分解}\}$$




$\mathtt{tw}(G) = 2$



## 素敵な木分解 (nice tree decomposition) とは？

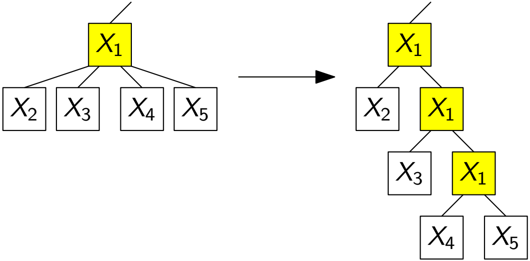
無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 $\mathcal{T}$ が素敵であるとは，
$\mathcal{T}$ の 1 つの節点 $X_r$ を根として $\mathcal{T}$ を根付き木と見なしたときに
次を満たすこと

- $X_r = \emptyset$，かつ，葉である節点 $X$ に対して，$X = \emptyset$
- 各節点の子の数は 2 以下
- 節点 $X$ の子の数が 2 のとき，その子を $X', X''$ とすると，

$$X = X' = X''$$

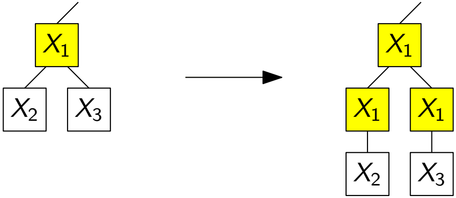
- 節点 $X$ の子の数が 1 のとき，その子を $X'$ とすると，
  次のどちらかが成立
  - ある頂点 $v \notin X'$ が存在して，$X = X' \cup \{v\}$
  - ある頂点 $w \in X'$ が存在して，$X = X' - \{w\}$

木分解から，同じ幅の素敵な木分解が (効率よく) 作れる



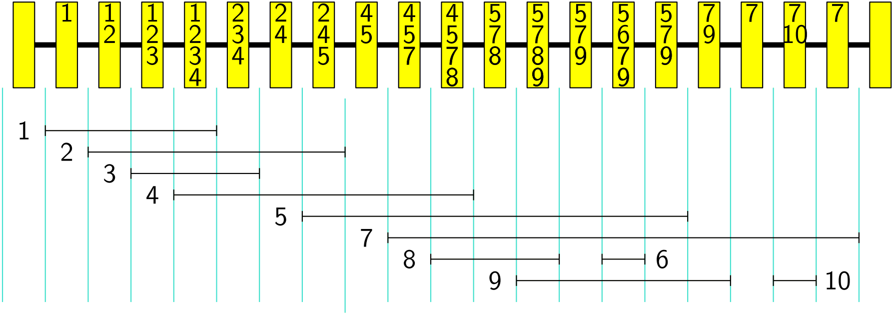

子の数が 3 以上のときは，この操作で子の数を 2 にする

木分解から，同じ幅の素敵な木分解が (効率よく) 作れる



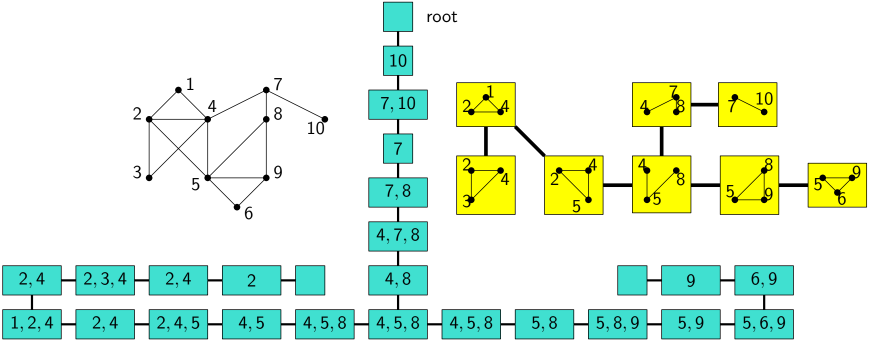

子の数が 2 のとき，親子が同じになるように変形する

木分解から，同じ幅の素敵な木分解が (効率よく) 作れる

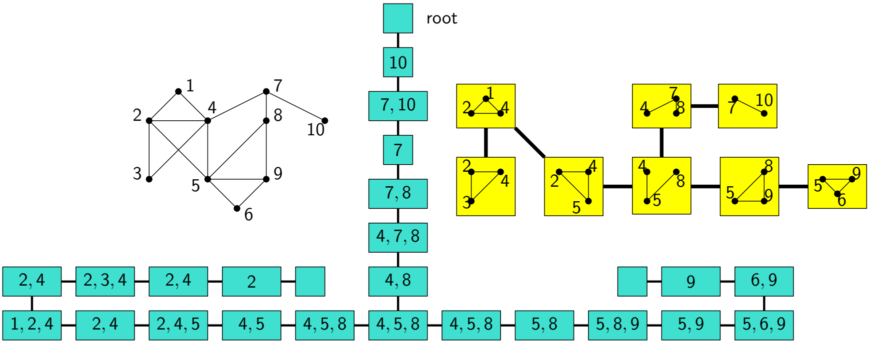



子の数が 1 のところは，素敵な道分解のときと同じように変形する

# 素敵な木分解：例

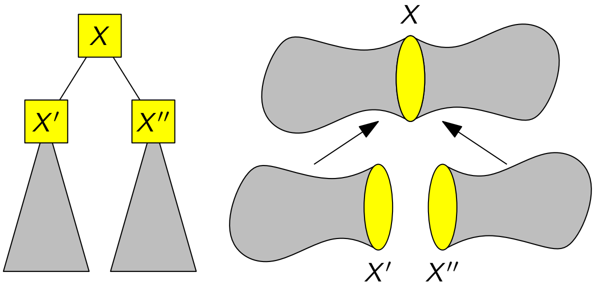

root
10
7, 10
7
7, 8
4, 7, 8
4, 8
2, 4
2, 3, 4
2, 4
2
9
6, 9
1, 2, 4
2, 4
2, 4, 5
4, 5
4, 5, 8
4, 5, 8
4, 5, 8
5, 8
5, 8, 9
5, 9
5, 6, 9
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

# 素敵な木分解：節点の種類



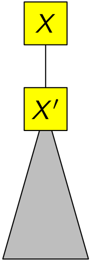

| $X$ の子の数 | $X$ の要素数は<br>$X$ の子の要素数より | |
|---|---|---|
| 2 | — | $X$ は結合節点　(join node) |
| 1 | 大きい | $X$ は導入節点　(introduce node) |
| 1 | 小さい | $X$ は忘却節点　(forget node) |
| 0 | — | $X$ は葉 |

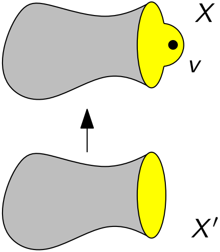
結合節点 $X$ の子が $X', X''$ であるとき



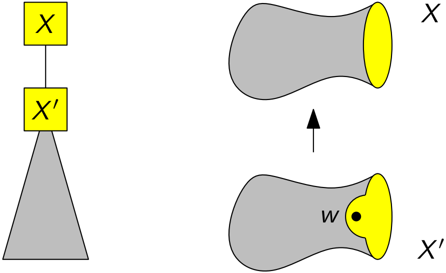
# 導入節点：イメージ

導入節点 $X$ の子が $X'$ であり，$X = X' \cup \{v\}$ のとき



導入節点 $X$ の子が $X'$ であり，$X = X' - \{w\}$ のとき



**木分解を用いたアルゴリズム：基本戦略**

入力：無向グラフ $G$

1. $G$ の素敵な木分解 $\mathcal{T}$ を構成する
2. 木分解 $\mathcal{T}$ 上の動的計画法アルゴリズムを動かす

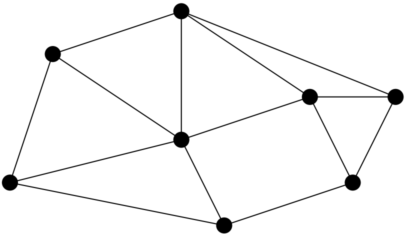
以下，$G$ の素敵な木分解 $\mathcal{T}$ は与えられるものとする

# 目次

$G = (V, E)$ 無向グラフ

## ハミルトン閉路とは？

$G$ のハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle) とは，
$G$ の全域部分閉路

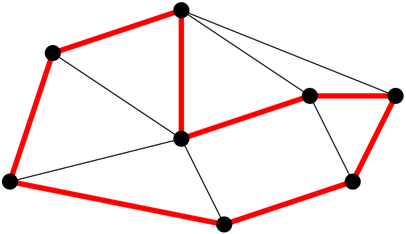


- $G$ の全域部分グラフ (spanning subgraph) とは，
  その頂点集合が $V$ であること

$G = (V, E)$ 無向グラフ

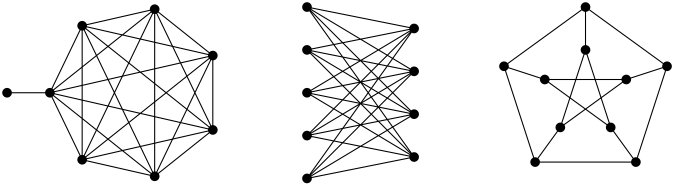
### ハミルトン閉路とは？

$G$ のハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle) とは，
$G$ の全域部分閉路



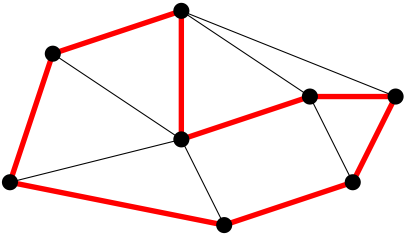
- $G$ の全域部分グラフ (spanning subgraph) とは，
その頂点集合が $V$ であること

すべての無向グラフがハミルトン閉路を持つわけではない



## ハミルトン閉路問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：$G$ がハミルトン閉路を持つならば「true」,
  そうでなければ,「false」



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

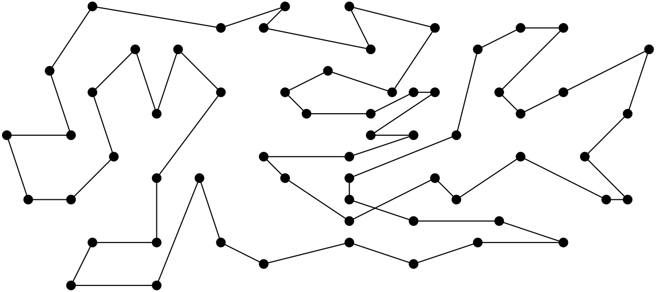
## 目標

素敵な木分解を使って，ハミルトン閉路問題を効率的に解く

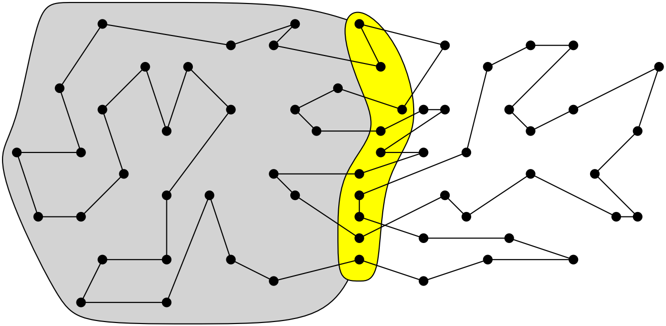
設定

- 無向グラフ $G = (V, E)$
- $G$ の <u>素敵</u> な木分解 $\mathcal{T}$ (その根を $X_r$ とする)
- $t = \mathtt{tw}(\mathcal{T})$ ($\mathcal{T}$ の幅)

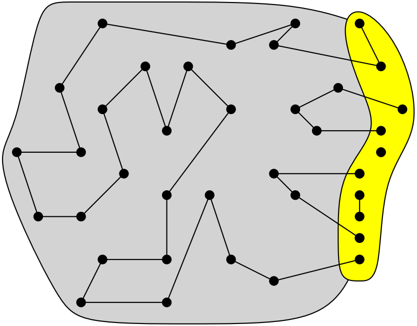
# ハミルトン閉路とその部分 (1)



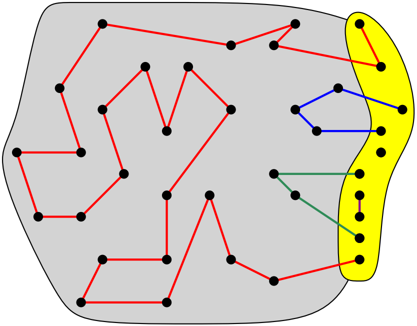
# ハミルトン閉路とその部分 (1)

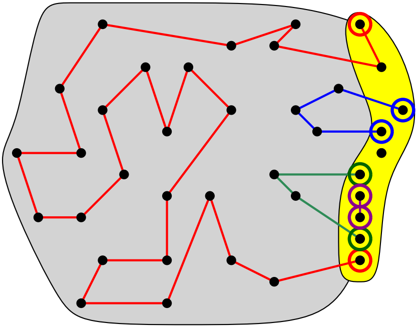


# ハミルトン閉路とその部分 (2)



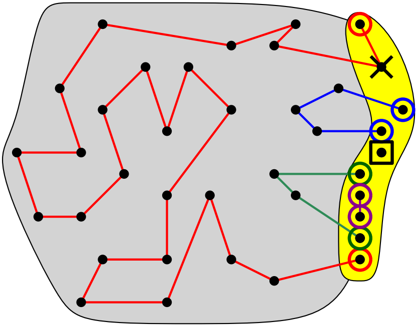
# ハミルトン閉路とその部分 (2)





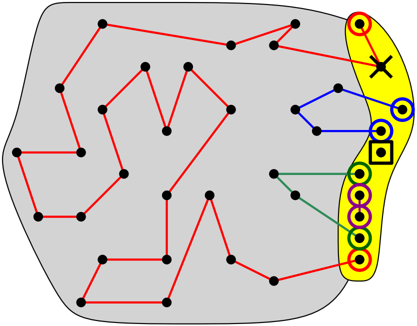
$X_i$ の頂点を見ると，次のいずれか

- ○ 部分道の頂点で，端点であるもの (対になっている)
- × 部分道の頂点で，端点ではないもの
- □ 孤立点

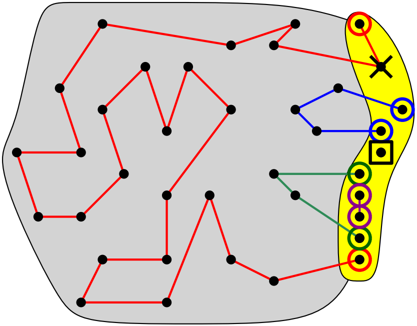


$X_i$ の頂点を見ると，次のいずれか

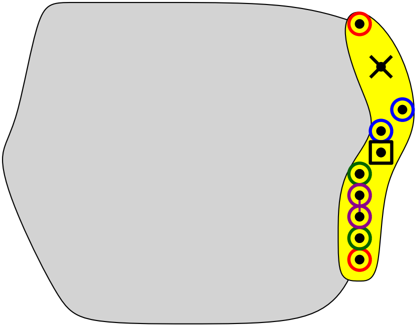
- ○ 部分道の頂点で，端点であるもの (対になっている)
- × 部分道の頂点で，端点ではないもの
- □ 孤立点



- 部分道の端点の対の数 $\leq (|X|+1)/2 \leq (\mathtt{tw}(\mathcal{T})+1)/2$
- これらを区別する



$X_i$ 以外の部分は部分道の一部
(どのようにつながっているかは忘れてよい)



$X_i$ 以外の部分は部分道の一部
(どのようにつながっているかは忘れてよい)

## 目標 (再掲)

素敵な木分解を使って，ハミルトン閉路問題を効率的に解く

設定

- 無向グラフ $G = (V, E)$
- $G$ の素敵な木分解 $\mathcal{T}$ (その根を $X_r$ とする)
- $t = \mathtt{tw}(\mathcal{T})$ ($\mathcal{T}$ の幅)

$\mathcal{T}$ の各節点 $X_i$ に対して，

- $\mathcal{T}_i = X_i$ を根とする $\mathcal{T}$ の部分木
- $V_i = \bigcup_{X \in V(\mathcal{T})} X$
- $G_i = G[V_i]$

$\mathcal{T}$ の各節点 $X_i$ に対して，

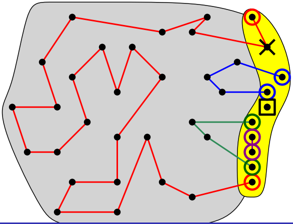
- 以下を満たす写像 $f\colon X_i \to \{\bigcirc_1, \ldots, \bigcirc_{\lfloor(|X_i|+1)/2\rfloor}, \times, \square\}$ を考える

$$\text{任意の } j \in \{1, \ldots, k\} \text{ に対して，} \quad |f^{-1}(\{\bigcirc_j\})| \in \{0, 2\}$$

- そのような $f$ を「よい $f$」と呼ぶことにして，よい $f$ に対して，次を満たす $G_i$ の「よい全域部分グラフ $H_f$」を考える

$$\deg_{H_f}(v) = \begin{cases} 0 & (v \in X_i \text{ かつ } f(v) = \square \text{ のとき}), \\ 1 & (v \in X_i \text{ かつ，ある } j \text{ に対して } f(v) = \bigcirc_j \text{ のとき}), \\ 2 & (v \in X_i \text{ かつ } f(v) = \times\text{，または，} \quad v \notin X_i \text{ のとき}) \end{cases}$$

各 $j$ に対して，$|f^{-1}(\{\bigcirc_j\})| = 2$ のとき，
$f^{-1}(\{\bigcirc_j\}) = \{u, v\}$ とすると，
$H_f$ において，$u$ と $v$ を端点とする道が存在する
$G \neq G_i$ のとき，部分的な閉路がない

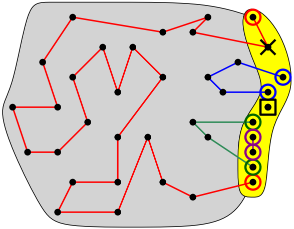


$\mathcal{T}$ の各節点 $X_i$ に対して，

- よい $f$ と $H_f$ に対して，次の $s(i;f)$ を考える

$$s(i;f) = \begin{cases} \text{true} & (G_i \text{ が全域部分グラフ } H_f \text{ を持つとき}) \\ \text{false} & (G_i \text{ が全域部分グラフ } H_f \text{ を持たないとき}) \end{cases}$$

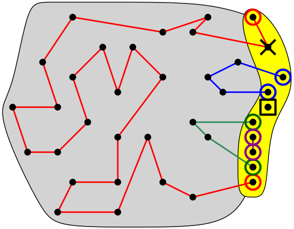
このとき，$s(r;f) = \text{true} \Leftrightarrow G$ がハミルトン閉路を持つ



注意：
$X_i = \emptyset$ の場合，
よい $f$ はただ 1 つ存在する (空写像)

$\mathcal{T}$ は素敵な木分解なので，$X_i$ が次の場合に再帰式を考えればよい

- $X_i$ が導入節点の場合
- $X_i$ が忘却節点の場合
- $X_i$ が結合節点の場合

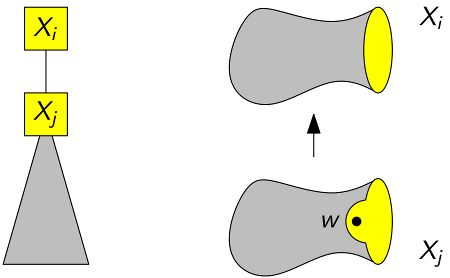


# 目次

$X_i$ が忘却節点の場合

($X_j$ を $X_i$ の子として，ある $w \in X_j$ が存在して，$X_i = X_j - \{v\}$)

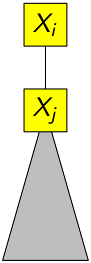
- $X_i$ に対してよい $f_i$，$X_j$ に対してよい $f_j$ を考える
- $f_i$ が $f_j$ と整合していることを次で定義
  - $f_j$ から得られる $G_j$ のよい部分グラフ $H_{f_j}$ が $f_i$ から得られる $G_i$ のよい部分グラフとなる
  - 特に，任意の $x \in X_i$ に対して，$f_i(x) = f_j(x)$

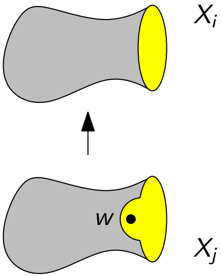


## いつ，$f_i$ が $f_j$ と整合しているのか？

$f_j(w)$ によって場合分け

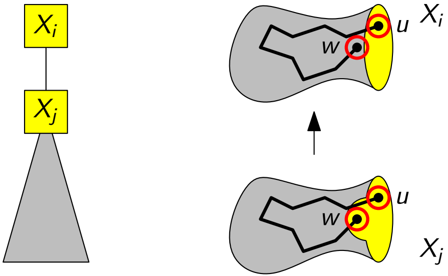
- $f_j(w) = \bigcirc_\ell$ のとき (ある $\ell$ に対して)
- $f_j(w) = \times$ のとき
- $f_j(w) = \square$ のとき



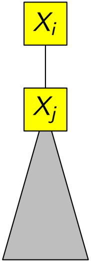
$f_j(w) = \bigcirc_\ell$ のとき (ある $\ell$ に対して)

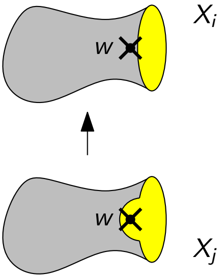
- このとき，$f_j(u) = \bigcirc_\ell$ を満たす $u \in X_j$ が存在
- $f_i$ と $f_j$ が整合しているならば，$f_i(u) = f_j(u) = \bigcirc_\ell$
- つまり，$|f_i^{-1}(\{\bigcirc_\ell\})| = 1$ なので，$f_i$ がよいことに矛盾



$f_j(w) = \times$ のとき

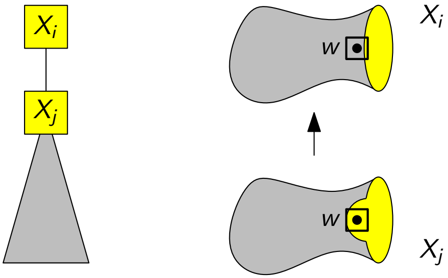
- このとき，$d_{H_{f_j}}(w) = 2$
- つまり，$H_{f_j}$ は $G_i$ のよい部分グラフ
- つまり，$f_i$ と $f_j$ は整合している



$f_j(w) = \square$ のとき

- このとき，$d_{H_{f_j}}(w) = 0$
- $f_i$ と $f_j$ が整合しているならば，$H_{f_j}$ は $G_i$ のよい部分グラフなので $w \notin X_i$ より，$d_{H_{f_j}}(w) = 2$
- これは矛盾

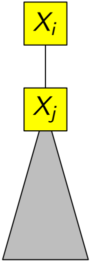


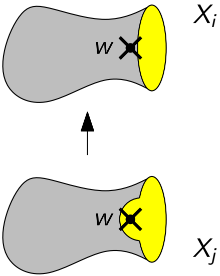
## つまり

$f_i$ と $f_j$ が整合しているのは，$f_j(w) = \times$ のときのみ

ここから，次の再帰式が得られる

$$
\begin{aligned}
s(i; f_i) &= \bigvee \{ s(j; f_j) \mid f_i \text{ と } f_j \text{ が整合} \} \\
&= \bigvee \left\{ s(j; f_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} f_i(x) = f_j(x) \ (\forall\, x \in X_i), \\ f_j(w) = \times \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$



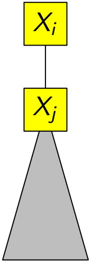



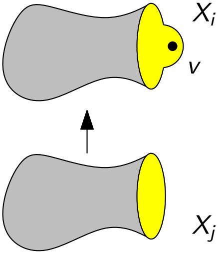
# 目次

$X_i$ が導入節点の場合

$(X_j$ を $X_i$ の子として，ある $v \notin X_j$ が存在して，$X_i = X_j \cup \{v\})$

- $X_i$ に対してよい $f_i$，$X_j$ に対してよい $f_j$ を考える
- $f_i$ が $f_j$ と整合していることを次で定義
  - $f_j$ から得られる $G_j$ のよい部分グラフ $H_{f_j}$ に $v$ を追加して $f_i$ から得られる $G_i$ のよい部分グラフを作れる

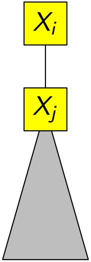


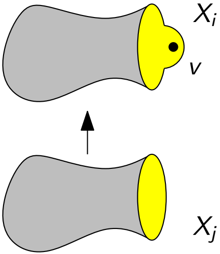



## いつ，$f_i$ が $f_j$ と整合しているのか？

$f_i(v)$ によって場合分け

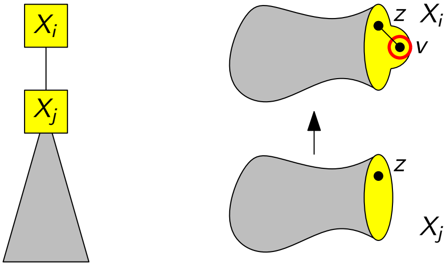
- $f_i(v) = \bigcirc_\ell$ のとき (ある $\ell$ に対して)
- $f_i(v) = \times$ のとき
- $f_i(v) = \square$ のとき



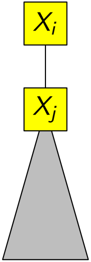
$f_i(v) = \bigcirc_\ell$ のとき (ある $\ell$ に対して)

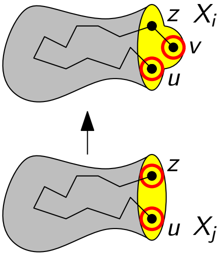
- このとき，$G_i$ のよい部分グラフを作るため，$v$ と $z \in X_j$ を辺で結ぶとする
- $f_i(z)$ により場合分け



$f_i(v) = \bigcirc_\ell$，$f_i(z) = \times$ のとき

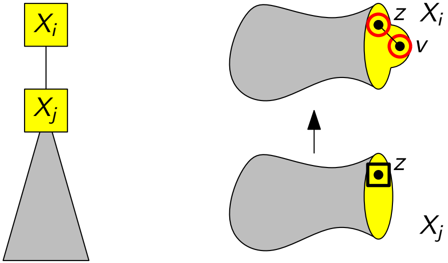
- このとき，$f_i(u) = \bigcirc_\ell$ を満たす $u \in X_i - \{v\}$ がただ１つ存在



$f_i(v) = \bigcirc_\ell$，$f_i(z) = \bigcirc_\ell$ のとき

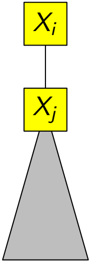
- $f_i$ と $f_j$ が整合しているならば，$f_j(z) = \square$ でなければならない

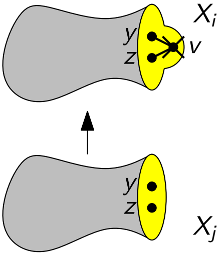



この 2 つ以外に，$f_i(v) = \bigcirc_\ell$ の場合はない

$f_i(v) = \times$ のとき

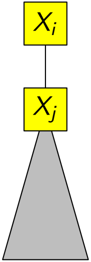
- このとき，$v$ と隣接する 2 頂点 $y, z$ が $X_i$ になくてはならない
- $H_{f_j}$ に $v$ を追加したら，$y, z$ の次数が 1 だけ大きくなるとする
- つまり，$d_{H_{f_j}}(y) \in \{0, 1\}$, $d_{H_{f_j}}(z) \in \{0, 1\}$
- いろいろと場合分け

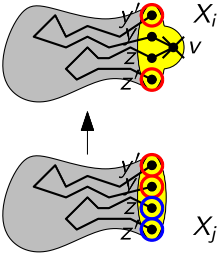


$f_i(v) = \times$, $f_j(y) = \bigcirc_\ell$, $f_j(z) = \bigcirc_m$ のとき ($\ell \neq m$)

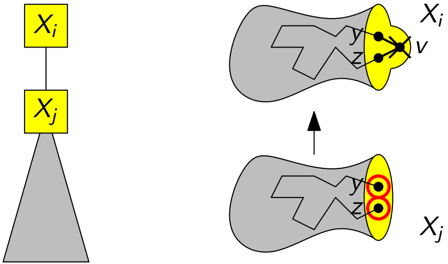
- ある $y' \in X_j$ に対して，$f_j(y') = \bigcirc_\ell$ であり，
  ある $z' \in X_j$ に対して，$f_j(z') = \bigcirc_m$ である
- このとき，$f_i(y) = \times, f_i(z) = \times$ となる
- また,「$f_i(y') = f_i(z') = \bigcirc_\ell$」か「$f_i(y') = f_i(z') = \bigcirc_m$」となる



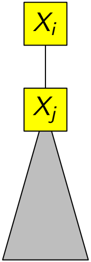
$f_i(v) = \times$，$f_j(y) = \bigcirc_\ell$, $f_j(z) = \bigcirc_\ell$ のとき

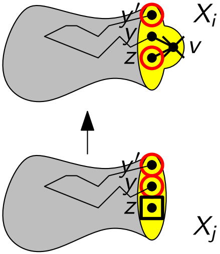
- これが可能であるのは，$G_i = G$ であるときのみ
  (そうでなければ，部分的な閉路ができてしまう)
- このとき，$f_i(y) = \times, f_i(z) = \times$ となる



$f_i(v) = \times$， $f_j(y) = \bigcirc_\ell$, $f_j(z) = \square$ のとき

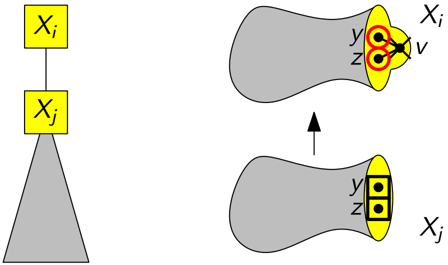
- ある $y' \in X_j$ に対して， $f_j(y') = \bigcirc_\ell$
- このとき， $f_i(y) = \times, f_i(z) = \bigcirc_\ell$ となる



$f_i(v) = \times$, $f_j(y) = \Box$, $f_j(z) = \Box$ のとき

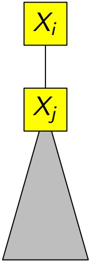
- このとき，$X_j$ において使われていない $\ell$ に対して $f_i(y) = \bigcirc_\ell, f_i(z) = \bigcirc_\ell$ となる

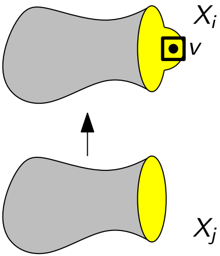



$X_j$ で使われていない $\ell$ : $|f_j^{-1}(\{\bigcirc_\ell\})| = 0$

$f_i(v) = \square$ のとき

- 何も変更はなし




これですべての場合の整合性判定条件を書けた

ここから，次の再帰式が得られる

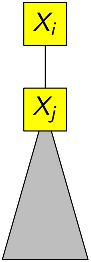
$$
\begin{aligned}
s(i; f_i) &= \bigvee \{ s(j; f_j) \mid f_i \text{ と } f_j \text{ が整合} \} \\
&= \bigvee \left\{ s(j; f_j) \,\middle|\, \begin{array}{l} z \in X_i - \{v\}, \{v, z\} \text{ は } G_i \text{ の辺}, \\ f_i(v) = \bigcirc_\ell, f_i(z) = \times, f_j(z) = \bigcirc_j, \\ f_i(x) = f_j(x)\ (\forall\, x \in X_i - \{v, z\}) \end{array} \right\} \\
&\quad \vee \bigvee \left\{ s(j; f_j) \,\middle|\, \begin{array}{l} z \in X_i - \{v\}, \{v, z\} \text{ は } G_i \text{ の辺}, \\ f_i(v) = \bigcirc_\ell, f_i(z) = \bigcirc_j, f_j(z) = \square, \\ f_i(x) = f_j(x)\ (\forall\, x \in X_i - \{v, z\}) \end{array} \right\} \\
&\quad \vee \bigvee \left\{ s(j; f_j) \,\middle|\, \begin{array}{l} y, z, y', z' \in X_i - \{v\}, \text{ 互いに異なる}, \\ \{v, y\} \text{ と } \{v, z\} \text{ は } G_i \text{ の辺}, \\ f_i(v) = \times, f_i(y) = \times, f_i(z) = \times, \\ f_j(y) = \bigcirc_\ell, f_j(z) = \bigcirc_m, \ell \neq m, \\ f_j(y') = \bigcirc_\ell, f_j(z') = \bigcirc_m, \\ f_i(y') = f_i(z') = \bigcirc_\ell \vee f_i(y') = f_i(z') = \bigcirc_m, \\ f_i(x) = f_j(x)\ (\forall\, x \in X_i - \{v, y, z, y', z'\}) \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

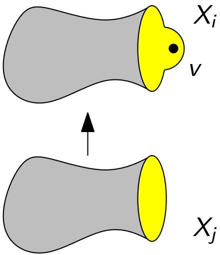
$$\vee \bigvee \left\{ s(j; f_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} y, z \in X_i - \{v\}, y \neq z, \\ \{v, y\} \text{ と } \{v, z\} \text{ は } G_i \text{ の辺}, \\ f_i(v) = \times, f_i(y) = \times, f_i(z) = \times, \\ f_j(y) = \bigcirc_\ell, f_j(z) = \bigcirc_\ell, G_i = G, \\ f_i(x) = f_j(x) \ (\forall\, x \in X_i - \{v, y, z\}) \end{array} \right\}$$

$$\vee \bigvee \left\{ s(j; f_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} y, y', z \in X_i - \{v\}, \text{ 互いに異なる}, \\ \{v, y\} \text{ と } \{v, z\} \text{ は } G_i \text{ の辺}, f_i(v) = \times, \\ f_i(y) = \times, f_i(y') = \bigcirc_\ell, f_i(z) = \bigcirc_\ell, \\ f_j(y) = \bigcirc_\ell, f_j(y') = \bigcirc_\ell, f_j(z) = \square, \\ f_i(x) = f_j(x) \ (\forall\, x \in X_i - \{v, y, y', z\}) \end{array} \right\}$$

$$\vee \bigvee \left\{ s(j; f_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} y, z \in X_i - \{v\}, y \neq z, \\ \{v, y\} \text{ と } \{v, z\} \text{ は } G_i \text{ の辺}, \\ f_i(v) = \times, f_i(y) = \bigcirc_\ell, f_i(z) = \bigcirc_\ell, \\ f_j(y) = \square, f_j(z) = \square, |f_j^{-1}(\{\bigcirc_\ell)| = 0, \\ f_i(x) = f_j(x) \ (\forall\, x \in X_i - \{v, y, z\}) \end{array} \right\}$$

$$\vee \bigvee \left\{ s(j; f_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} f_i(v) = \square, \\ f_i(x) = f_j(x) \ (\forall\ x \in X_i - \{v\}) \end{array} \right\}.$$



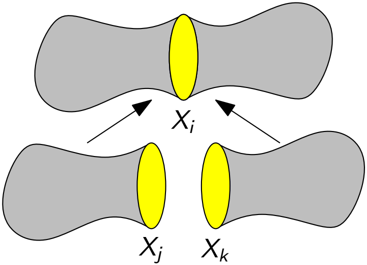



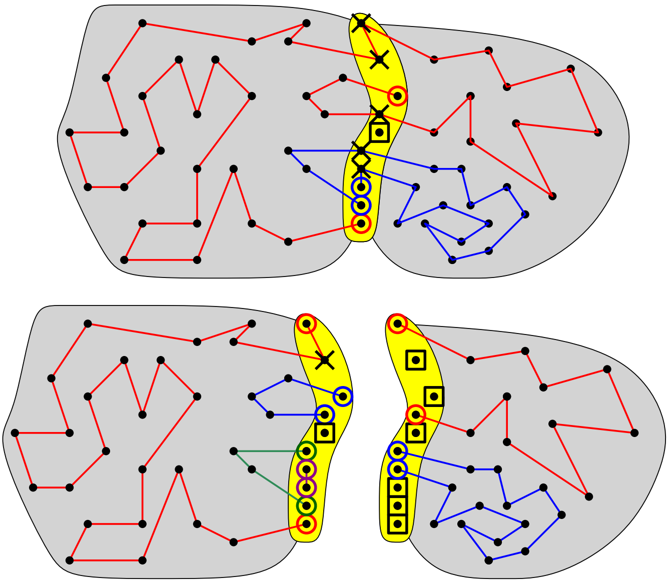
# 目次

## $X_i$ が結合節点の場合

($X_j, X_k$ を $X_i$ の子として，$X_i = X_j = X_k$)

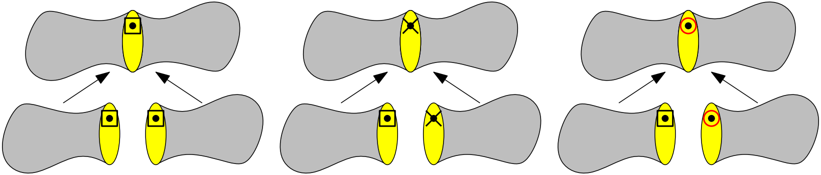
- $X_i, X_j, X_k$ に対してよい $f_i, f_j, f_k$ を考える
- $f_i$ が $f_j, f_k$ と整合していることを次で定義
  - $f_j$ から得られる $G_j$ のよい部分グラフ $H_{f_j}$ と
    $f_k$ から得られる $G_J$ のよい部分グラフ $H_{f_k}$ に対して，
    $H_{f_j} \cup H_{f_k}$ が $f_i$ から得られる $G_i$ のよい部分グラフとなる





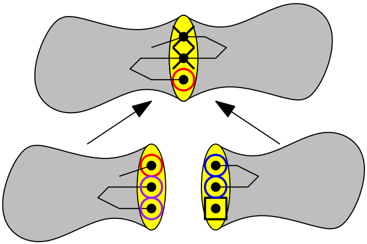
$f_i$ が $f_j, f_k$ と整合しているのは，どんなときか？

- $f_j(v) = \square, f_k(v) = \square$ のとき，$f_i(v) = \square$
- $f_j(v) = \times, f_k(v) = \square$ のとき，$f_i(v) = \times$
- $f_j(v) = \bigcirc_\ell, f_k(v) = \square$ のとき，$f_i(v) = \bigcirc_\ell$



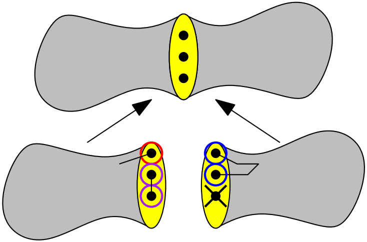
$f_i$ が $f_j, f_k$ と整合しているのは，どんなときか？

- $f_j(v) = \bigcirc_\ell, f_k(v) = \bigcirc_m$ のとき
  - 別の頂点 $v_1$ に対して，$f_k(v_1) = \bigcirc_m$
  - $f_j(v_1) = \bigcirc_{m_1}$ とすると，別の頂点 $v_2$ に対して，$f_j(v_2) = \bigcirc_{m_2}$
  - これを繰り返していき，逆向きも同じように繰り返し，どちらも □ の頂点で終われば，整合している
  - 最後の頂点を $u$ とすれば，ある $\ell'$ に対して $f_i(u) = \bigcirc_{\ell'}$ で，他の頂点については，$f_i(v) = f_i(v_1) = \cdots = \times$



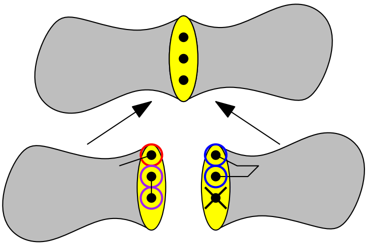
$f_i$ が $f_j, f_k$ と整合しているのは，どんなときか？

- $f_j(v) = \bigcirc_\ell, f_k(v) = \bigcirc_m$ のとき
  - 繰り返していき，× の頂点で終わったら，どうか？
  - 最後の頂点に 3 つの辺が接続することになり，整合していないことになる



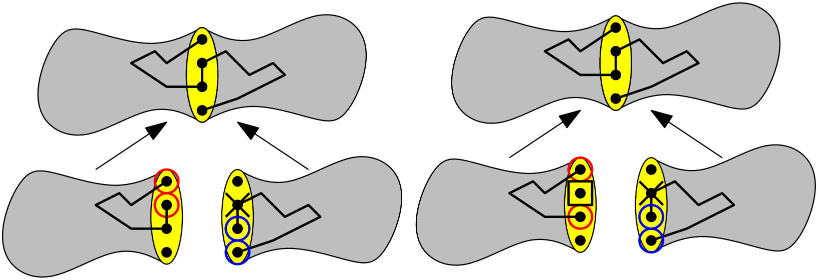
$f_i$ が $f_j, f_k$ と整合しているのは，どんなときか？

- $f_j(v) = \bigcirc_\ell, f_k(v) = \bigcirc_m$ のとき
  - 繰り返していき，$\square, \times$ で終わらず，一回りしたら？
  - $G_i = G$ のときに限り OK
    (そうでないと部分的な閉路ができてしまう)
  - かかわったすべての頂点 $u$ に対して，$f_i(u) = \times$



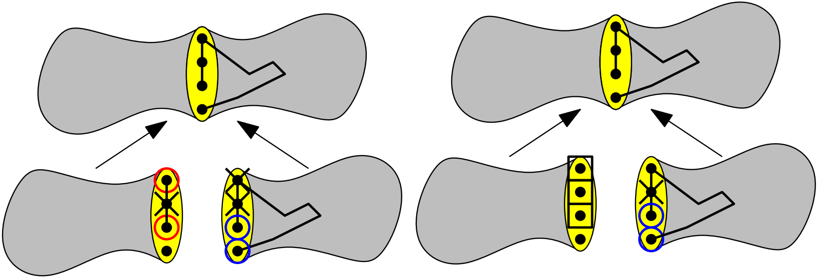
$f_i$ が $f_j, f_k$ と整合しているのは，どんなときか？

- $f_j(v) = \bigcirc_\ell, f_k(v) = \times$ のとき
  - $H_j$ において $v$ に接続する辺は，
    $H_k$ においても $v$ に接続していなければならない
  - それらをつないで道ができるならば，
    「$f_j(v) = \square, f_k(v) = \times$ のとき」に帰着できる
  - つまり，この場合は考えなくてよい



$f_i$ が $f_j, f_k$ と整合しているのは，どんなときか？

- $f_j(v) = \times, f_k(v) = \times$ のときも
  「$f_j(v) = \square, f_k(v) = \times$ のとき」に帰着できる



これですべての場合の整合性判定ができるようになった

- 再帰式を書くのは大変なので省略

- 素敵な木分解の各節点 $X_i$ において $s(i; f_i)$ を計算する
- 候補となる $f_i$ の総数 $= |X_i|^{(|X_i|+1)/2+2} \leq t^{(t+1)/2+2} = t^{O(t)}$

($t$ は木幅)

- 全体の計算量は

$$t^{O(t)} \cdot (\mathcal{T}\text{ の節点数}) \cdot (\text{再帰式の計算時間})$$

- 導入節点の場合：1 つの $s(i; f_i)$ の計算時間 $\leq O(t^4)$
- 忘却節点の場合：1 つの $s(i; f_i)$ の計算時間 $\leq O(1)$

- 結合節点の場合：
  - $f_j$ の候補の数 $\leq t^{O(t)}$
  - $f_k$ の候補の数 $\leq t^{O(t)}$
  - $\therefore$ 1 つの $s(i, f_i)$ の計算時間 $\leq (t^{O(t)})^2 = t^{O(t)}$

$\mathcal{T}$ の節点数は $O(t|V|)$ なので，まとめると，全体の計算量は

$$t^{O(t)} \cdot O(t|V|) \cdot t^{O(t)} = O(t^{O(t)}|V|)$$

**まとめ**

無向グラフ $G = (V, E)$ のハミルトン閉路存在性判定は，
$G$ の素敵な木分解 $\mathcal{T}$ が与えられていれば，
$O(t^{O(t)}|V|)$ 時間で行なえる $(t = \mathtt{tw}(\mathcal{T}))$

現在最速のアルゴリズム：だいたい $O(15^t|V|^2), O(17.4^t|V|)$
(Bodlaender, Cygan, Kratsch, Nederlof '15)

# 目次

## 今日の目標

木分解を用いた効率的アルゴリズムが設計できるようになる
特に，連結性を伴う問題を扱えるようになる

- ハミルトン閉路問題

キーワード：素敵な木分解，再帰，動的計画法

## 次回の予告

グラフの性質を論理 (単項二階論理) によって表す

- グラフ，アルゴリズム，論理，オートマトンの関連に進んでいく

# 残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

# 目次