離散最適化基礎論 第 6 回
木幅の性質

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 12 月 2 日

最終更新：2016 年 12 月 7 日　11:46

スケジュール 前半 (予定)

1. 離散最適化における木分解の役割 (10/7)
- ⋆ 休講 (国内出張) (10/14)
2. 木に対するアルゴリズム設計 (10/23)
3. 道幅と道分解 (10/30)
4. 道分解を用いたアルゴリズム設計 (11/4)
- ⋆ 休講 (海外出張) (11/11)
5. 木分解と木幅 (11/18)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/25)
6. 木幅の性質 (12/2)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 木分解を用いたアルゴリズム設計：頂点集合の選択・分割 (12/9)
8. 木分解を用いたアルゴリズム設計：辺集合の選択・分割 (12/16)
- ⋆ 休講 (天皇誕生日) (12/23)
- ⋆ 冬季休業 (12/30)

9. 木幅と論理：単項二階論理 (1/6)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/13)

10. 木幅と論理：オートマトン (1/20)
11. 木幅と論理：アルゴリズム設計 (1/27)
12. 木分解構成アルゴリズム：準備 (2/3)
13. 木分解構成アルゴリズム (2/10)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

主題

離散最適化のトピックの１つとして
グラフの木分解を取り上げ，

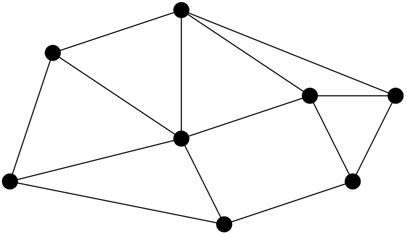
- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

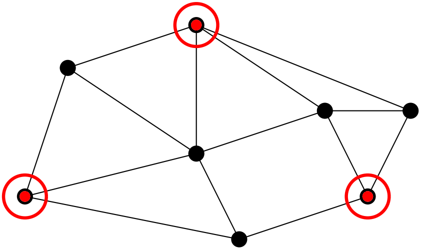
- 「離散最適化の神髄」だから

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



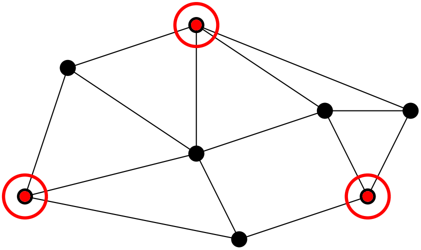
これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ

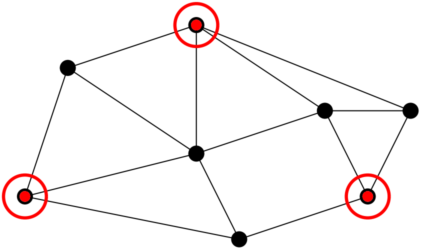


これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

事実

グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

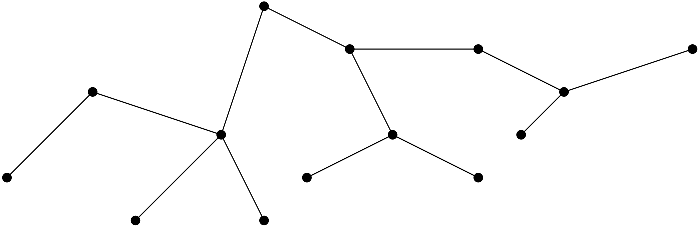
事実

グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

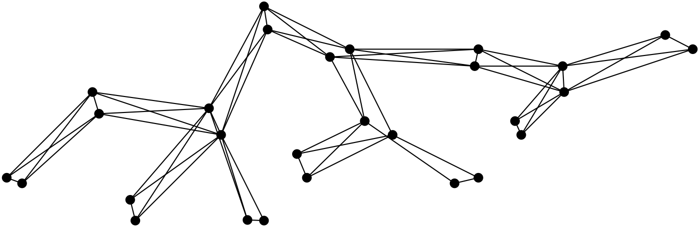
直感？

グラフが木に 近ければ，簡単に解けそう？

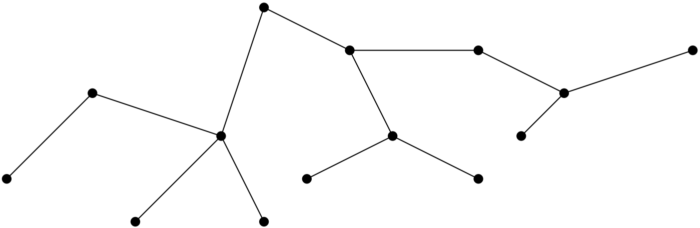
これは木



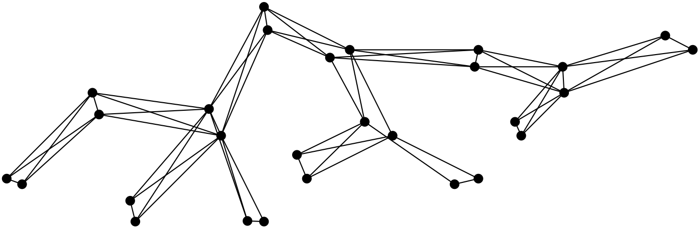
これは木に近い？



これは木



これは木に近い？ $\rightsquigarrow$ 「木っぽさ」を表す尺度を考える必要あり



木幅 — 「木っぽさ」を表す尺度

この講義のキーワード (と荒っぽい説明)

グラフの木幅	グラフの「木っぽさ」を表す尺度 (の 1 つ)
グラフの木分解	グラフを「木っぽく」表した構造
動的計画法	木分解上の効率的アルゴリズム
オートマトン	動的計画法に基づくアルゴリズムの解釈
Courcelle の定理	上記と論理学に基づく『メタアルゴリズム』

次の主題が有機的に結びつく面白い話題

- グラフ
- アルゴリズム
- オートマトン
- 論理 (特に，有限モデル理論)

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

木幅と木分解の性質をさらに理解する

- 辺の縮約とマイナー
- 部分 k 木
- 格子の木幅

目次

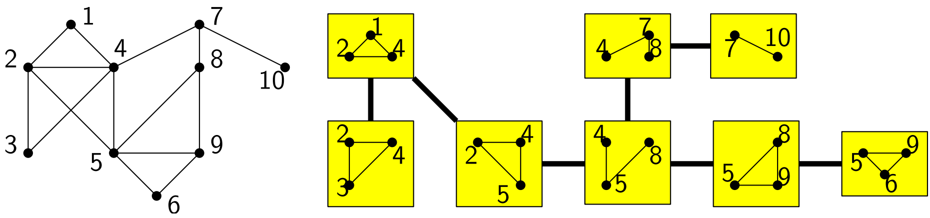
木分解 (tree decomposition) とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは $\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する



木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

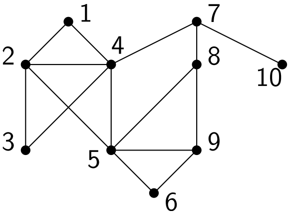
グラフの木幅とは？

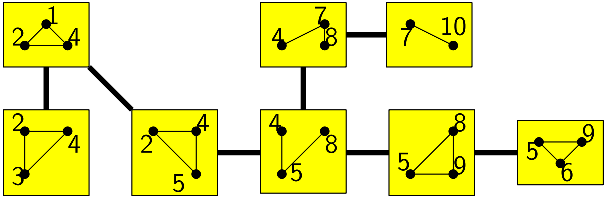
- 無向グラフ G の木分解 $\mathcal{T}$ の幅 (width)

$$\mathtt{tw}(\mathcal{T}) = \max\{|S| - 1 \mid S \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点}\}$$

- 無向グラフ G の木幅 (treewidth)

$$\mathtt{tw}(G) = \min\{\mathtt{tw}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \text{ は } G \text{ の木分解}\}$$





$\mathtt{tw}(G) = 2$

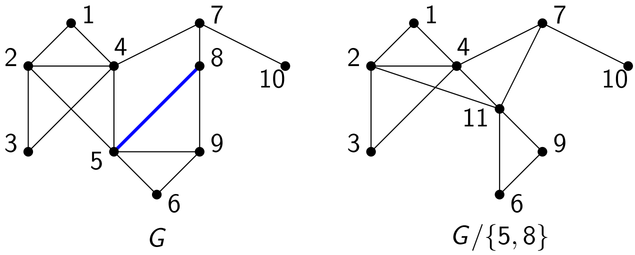
目次

無向グラフ $G = (V, E)$，$e = \{u, v\} \in E$

辺の縮約 (contraction) とは？

頂点 u, v を削除し，新たな頂点 w を追加し，
次のように辺を追加してできるグラフ

$x \in V - \{u, v\}$ が
$\{x, u\} \in E$ または $\{x, v\} \in E$ を満たす $\Rightarrow$ 辺 $\{x, w\}$ を追加



この操作によってできるグラフを G/e と書く

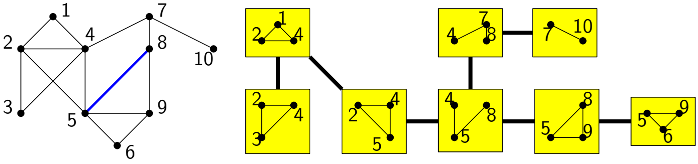
辺の縮約と木幅

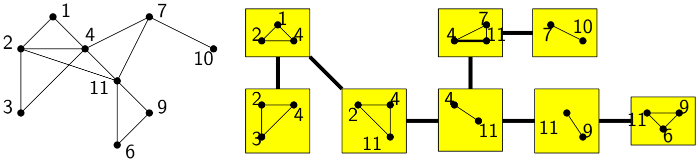
無向グラフ $G = (V, E)$， $e = \{u, v\} \in E$

命題：辺の縮約と木幅の関係

$\mathtt{tw}(G/e) \leq \mathtt{tw}(G)$

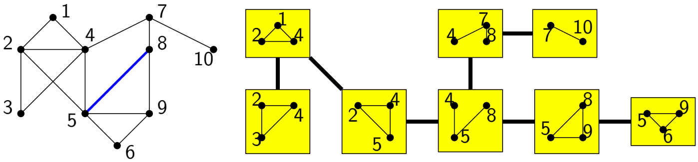
証明に対する直感

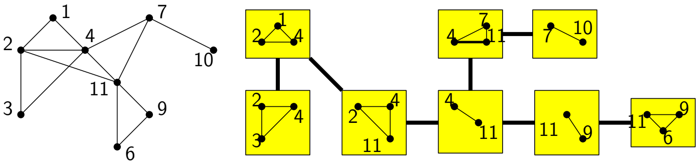




証明：$\mathcal{T}$ を G の木分解とする

- $\mathcal{T}$ から G/e の木分解 $\mathcal{T}'$ を次のように得る
  - $\mathcal{T}$ の節点に現れる u, v を新たに追加した頂点 w に置き換える
- これが本当に G/e の木分解であることを確認することは簡単 (演習問題)
- $\mathcal{T}'$ の幅は $\mathcal{T}$ の幅以下 □

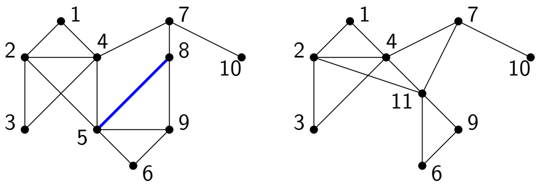




無向グラフ G, H

マイナーとは？

H が G のマイナーであるとは，
G の頂点や辺の除去，辺の縮約を繰り返しで H が得られること



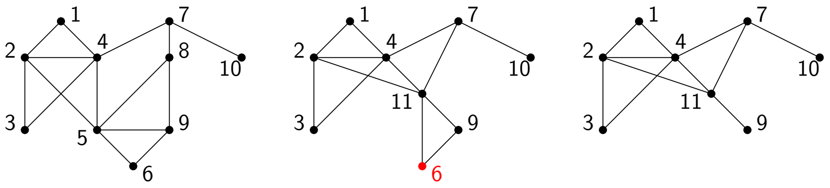
今までの議論の帰結

H が G のマイナー $\Rightarrow \mathtt{tw}(H) \leq \mathtt{tw}(G)$

無向グラフ G, H

マイナーとは？

H が G のマイナーであるとは，
G の頂点や辺の除去，辺の縮約を繰り返しで H が得られること



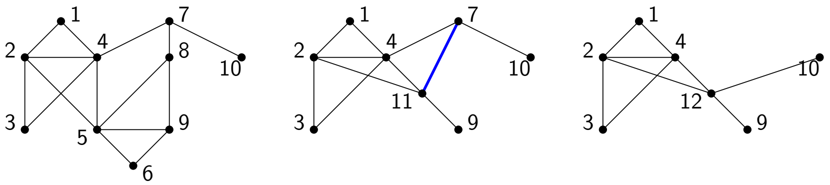
今までの議論の帰結

H が G のマイナー $\Rightarrow \mathtt{tw}(H) \leq \mathtt{tw}(G)$

無向グラフ G, H

マイナーとは？

H が G のマイナーであるとは，
G の頂点や辺の除去，辺の縮約を繰り返しで H が得られること



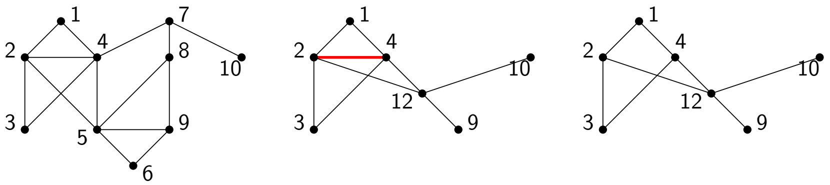
今までの議論の帰結

H が G のマイナー $\Rightarrow \mathtt{tw}(H) \leq \mathtt{tw}(G)$

無向グラフ G, H

マイナーとは？

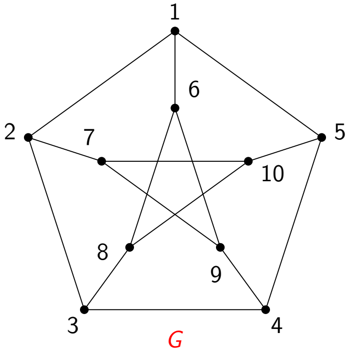
H が G のマイナーであるとは，
G の頂点や辺の除去，辺の縮約を繰り返しで H が得られること



今までの議論の帰結

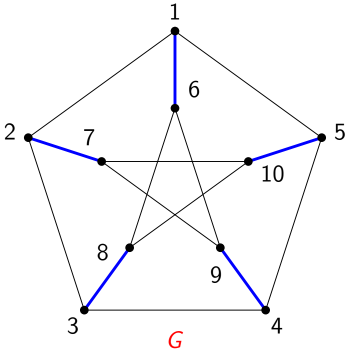
H が G のマイナー $\Rightarrow \mathtt{tw}(H) \leq \mathtt{tw}(G)$

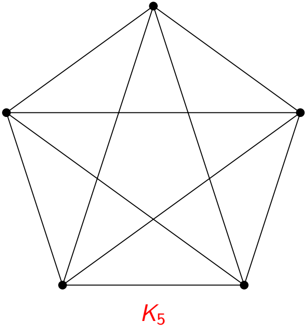
次のグラフ G の木幅は何か？



- K_5 は G のマイナーなので，$\mathtt{tw}(K_5) \leq \mathtt{tw}(G)$
- $\mathtt{tw}(K_5) = 4$
- したがって，$\mathtt{tw}(G) \geq 4$

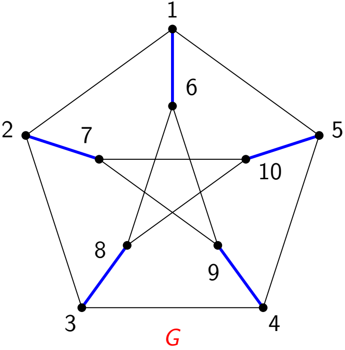
次のグラフ G の木幅は何か？

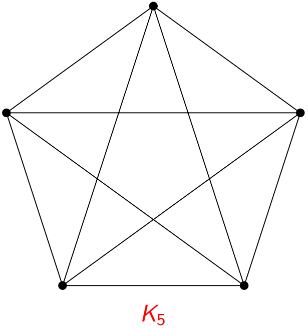




- K_5 は G のマイナーなので，$\mathtt{tw}(K_5) \leq \mathtt{tw}(G)$
- $\mathtt{tw}(K_5) = 4$
- したがって，$\mathtt{tw}(G) \geq 4$

次のグラフ G の木幅は何か？





- K_5 は G のマイナーなので，$\mathtt{tw}(K_5) \leq \mathtt{tw}(G)$
- $\mathtt{tw}(K_5) = 4$
- したがって，$\mathtt{tw}(G) \geq 4$
- また，$\mathtt{tw}(G) \leq 4$ (演習問題)
- したがって，$\mathtt{tw}(G) = 4$

目次

無向グラフ G

目標とする定理

任意の自然数 $k \geq 1$ に対して

$$G \text{ は部分 } k \text{ 木} \quad \Leftrightarrow \quad \mathtt{tw}(G) \leq k$$

いまから行うこと

- 部分 k 木の定義
- 定理の証明
- 定理の応用 (辺の数)

無向グラフ $G = (V, E)$

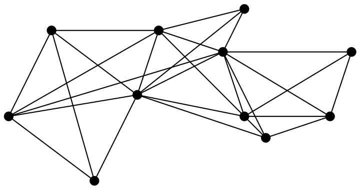
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k+1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

例：3 木



無向グラフ $G = (V, E)$

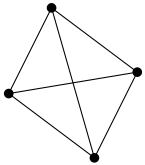
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k+1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

例：3 木



無向グラフ $G = (V, E)$

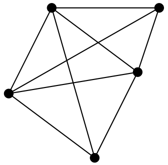
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k+1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

例：3 木



無向グラフ $G = (V, E)$

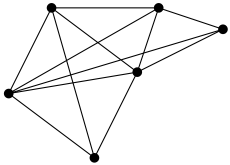
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k+1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

例：3 木



無向グラフ $G = (V, E)$

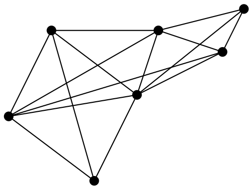
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k+1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

例：3 木



無向グラフ $G = (V, E)$

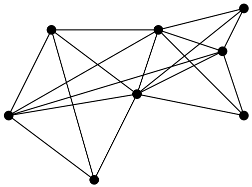
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k+1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \dots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$$

例：3 木



無向グラフ $G = (V, E)$

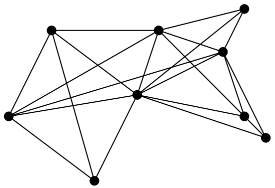
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k+1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

例：3 木



無向グラフ $G = (V, E)$

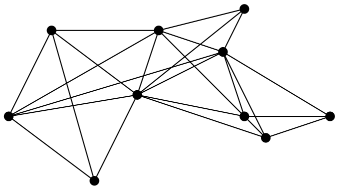
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k+1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

例：3 木



無向グラフ $G = (V, E)$

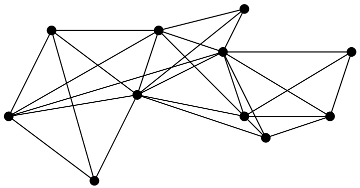
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k+1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

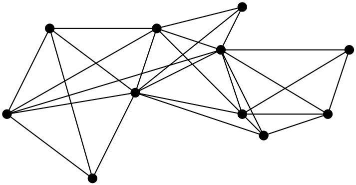
例：3 木



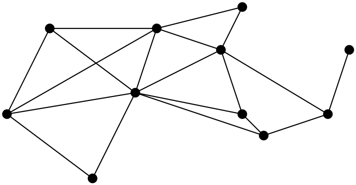
無向グラフ $G = (V, E)$

部分 k 木 (partial k-tree) とは？

G が部分 k 木であるとは，それが k 木の部分グラフであること



3 木



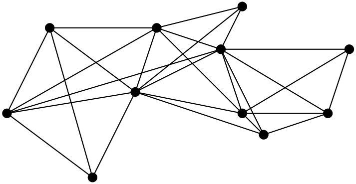
部分 3 木

無向グラフ G

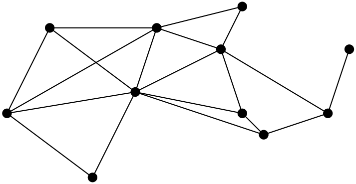
目標とする定理

任意の自然数 $k \geq 1$ に対して

$$G \text{ は部分 } k \text{ 木} \quad \Leftrightarrow \quad \mathtt{tw}(G) \leq k$$



3 木



部分 3 木

つまり，$\mathtt{tw}(\text{部分 } 3 \text{ 木}) \leq 3$

証明 ($\Rightarrow$)：G が部分 k 木であるとする

- G を部分グラフとする k 木 $H = (V, E)$ が存在する
- このとき，$\mathtt{tw}(G) \leq \mathtt{tw}(H)$
- ここからは頂点数 $|V|$ に関する数学的帰納法

H の頂点数 $|V| \leq k + 1$ のとき

- $\mathtt{tw}(H) \leq |V| - 1 = k$ であり，証明終了

H の頂点数 $|V| = k + t$ のときに成り立つと仮定して，$|V| = k + t + 1$ とする (ただし，$t \geq 1$)

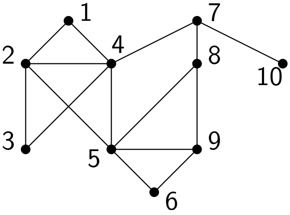
- k 木 $H' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する H' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，
$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$
- 帰納法の仮定より，$\mathtt{tw}(H') \leq k$
- したがって，H' の木分解 $\mathcal{T}'$ で幅が k 以下のものが存在する
- $\mathcal{T}'$ の節点 X' で，$\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq X'$ となるものが存在する
- ここで，H の木分解 $\mathcal{T}$ を次のように構成する
  - 新しい節点 $X = \{v, w_1, \ldots, w_k\}$ を考える
  - X と X' を辺で結ぶ
- これが本当に H の木分解であることを確認する (演習問題)

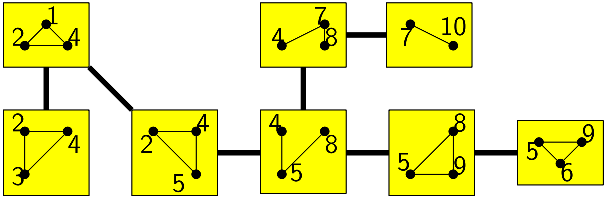
証明 ($\Leftarrow$)：$\mathtt{tw}(G) \leq k$ と仮定

- つまり，G の木分解 $\mathcal{T}$ で，各節点の要素数が $k+1$ のものが存在する
- 各節点は異なると仮定してよい (そうでなければ，縮約できる)
- $|V| \leq k+1$ のとき，G は K_{k+1} の部分グラフなので，部分 k 木
- $|V| \geq k+2$ のときを考える
- G と $\mathcal{T}$ より，次のグラフ $H = (V, E')$ を作る

$$E_H = E \cup \{\{u,v\} \mid u,v \in X, X \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点}\}$$

- G は H の部分グラフで，$\mathcal{T}$ は H の木分解



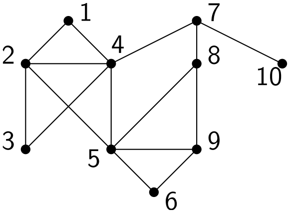


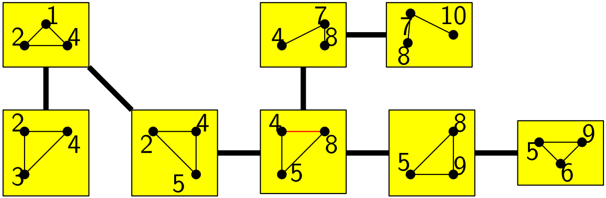
証明 ($\Leftarrow$)：$\mathtt{tw}(G) \le k$ と仮定

- つまり，G の木分解 $\mathcal{T}$ で，各節点の要素数が $k+1$ のものが存在する
- 各節点は異なると仮定してよい (そうでなければ，縮約できる)
- $|V| \le k+1$ のとき，G は K_{k+1} の部分グラフなので，部分 k 木
- $|V| \ge k+2$ のときを考える
- G と $\mathcal{T}$ より，次のグラフ $H = (V, E')$ を作る

$$E_H = E \cup \{\{u, v\} \mid u, v \in X, X \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点}\}$$

- G は H の部分グラフで，$\mathcal{T}$ は H の木分解



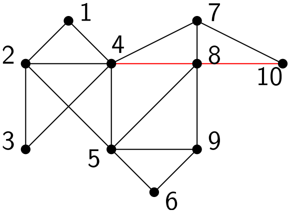


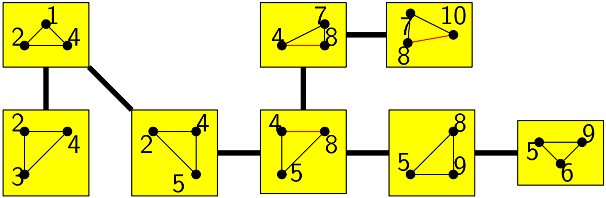
証明 ($\Leftarrow$)：$\mathtt{tw}(G) \leq k$ と仮定

- つまり，G の木分解 $\mathcal{T}$ で，各節点の要素数が $k+1$ のものが存在する
- 各節点は異なると仮定してよい (そうでなければ，縮約できる)
- $|V| \leq k+1$ のとき，G は K_{k+1} の部分グラフなので，部分 k 木
- $|V| \geq k+2$ のときを考える
- G と $\mathcal{T}$ より，次のグラフ $H = (V, E')$ を作る

$$E_H = E \cup \{\{u, v\} \mid u, v \in X, X \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点}\}$$

- G は H の部分グラフで，$\mathcal{T}$ は H の木分解





主張：H は k 木

- $\mathcal{T}$ の節点数が 1 ならば，H は頂点数 $k+1$ の完全グラフなので，それは k 木
- $\mathcal{T}$ の節点数が 2 以上ならば，$\mathcal{T}$ には葉が存在する
- X を $\mathcal{T}$ の葉として，Y を X に隣接する節点とする
- $|X| = |Y| = k+1$，$X \neq Y$ なので，$v \in X - Y$ を満たす G の頂点が存在する

主張 (再掲)：H は k 木

- このとき，$\mathcal{T}$ において，X 以外の節点は v を持たない
- したがって，$\mathcal{T}$ から X を除去したものは $H - v$ の木分解で，各節点の要素数は $k + 1$
- つまり，$H - v$ の木幅は k 以下で，帰納法の仮定より，$H - v$ は k 木
- H において v に隣接する頂点は X の要素 ((T2), (T3) より)
- したがって，v に隣接する頂点の集合は H において完全部分グラフを誘導する
- したがって，H は k 木 □

無向グラフ $G = (V, E)$

命題：次数の小さな頂点の存在

$\mathtt{tw}(G) \leq k \quad \Rightarrow \quad G$ には次数が k 以下の頂点が存在

証明：$\mathtt{tw}(G) \leq k$ と仮定する

- つまり，G は部分 k 木
- したがって，G はある k 木 H の部分グラフ
- H には次数 k 以下の頂点が存在
- したがって，G にも次数 k 以下の頂点が存在 $\square$

無向グラフ $G = (V, E)$

命題：辺の数

$$\mathtt{tw}(G) \leq k \qquad \Rightarrow \qquad |E| \leq k|V| - \frac{1}{2}k(k+1)$$

前のページの命題を使えば，頂点数に関する帰納法で証明できる

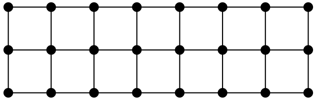
帰結：木幅が定数であるグラフの辺数は小さい

k が定数であるとき，$\mathtt{tw}(G) \leq k$ ならば，$|E| = O(|V|)$

目次

格子とは？

$m \times n$ の格子 (grid) とは次のグラフのこと



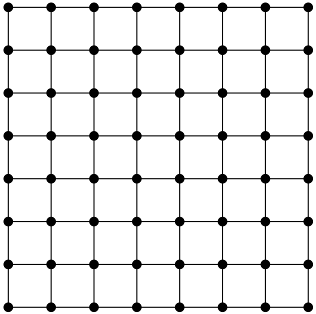
$(m = 3,\ n = 8$ の場合$)$

注意 : 格子グラフ $\neq$ 格子

- 格子グラフとは格子の部分グラフのこと

格子の木幅 (上界)

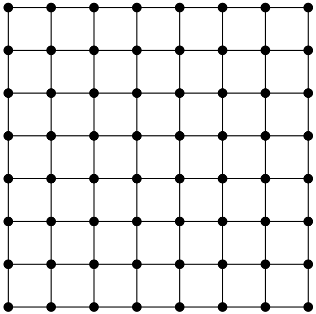
$k \times k$ 格子の木幅は k 以下



実際に，幅 k の木分解を構成すればよい (演習問題)

格子の木幅 (下界)

$k \times k$ 格子の木幅は k 以上



証明は時間がかかるので，少し弱い下界をここでは証明

帰結

$k \times k$ 格子の木幅は k

格子の木幅 (下界)

$k \times k$ 格子の木幅は $k-1$ 以上

証明：$k \times k$ 格子 G の木分解 $\mathcal{T}$ を考える

- $\mathcal{T}$ において隣接する 2 節点 X, Y に対して，$X \not\subseteq Y$ が成り立つと仮定してよい
  - $X \subseteq Y$ ならば，$\mathcal{T}/\{X, Y\}$ は G の木分解である

主張

G のすべての行の頂点を含むか，あるいは，
G のすべての列の頂点を含む節点 X が存在する

- そうではないと仮定する

- 節点 X に対して，$G - X$ は G のある行 R の頂点をすべて含んでいる
- G の各行は連結部分グラフを誘導する
- $\therefore$ $T - X$ の部分木で，R の頂点が必ずその節点に含まれるものが存在する
- そのような部分木と X を結ぶ辺を X から部分木に向かって向き付けする

- これをすべての節点 X に対して，行う
- すると，両向きに向き付けられた辺 $\{X, Y\}$ が必ず存在する
- このとき，辺 $\{X, Y\}$ を削除してできる部分木 $\mathcal{T}', \mathcal{T}''$ を見ると $\mathcal{T}'$ の節点に含まれる行 R' と $\mathcal{T}''$ の節点に含まれる行 R'' があると分かる

- R' の頂点 v' と R'' の頂点 v'' で同じ列に含まれるものを考える
- v' と v'' を結ぶ (列に沿った) 最短道を考える
- その道に沿ったある頂点は X に含まれる (演習問題)
- つまり，G の各列の頂点が 1 つ以上 X に含まれる $\square$

目次

今日の目標

木幅と木分解の性質をさらに理解する

- 辺の縮約とマイナー
- 部分 k 木
- 格子の木幅

次回の予告

木分解と動的計画法

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次