離散最適化基礎論 第 5 回
木分解と木幅

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 11 月 18 日

最終更新：2016 年 11 月 29 日　02:05

スケジュール 前半 (予定)

1. 離散最適化における木分解の役割 (10/7)
- ⋆ 休講 (国内出張) (10/14)
2. 木に対するアルゴリズム設計 (10/23)
3. 道幅と道分解 (10/30)
4. 道分解を用いたアルゴリズム設計 (11/4)
- ⋆ 休講 (海外出張) (11/11)
5. 木分解と木幅 (11/18)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/25)
6. 木幅の性質 (12/2)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 木分解を用いたアルゴリズム設計：頂点集合の選択・分割 (12/9)
8. 木分解を用いたアルゴリズム設計：辺集合の選択・分割 (12/16)
- ⋆ 休講 (天皇誕生日) (12/23)
- ⋆ 冬季休業 (12/30)
9. 木幅と論理：単項二階論理 (1/6)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/13)
10. 木幅と論理：オートマトン (1/20)
11. 木幅と論理：アルゴリズム設計 (1/27)
12. 木分解構成アルゴリズム：準備 (2/3)
13. 木分解構成アルゴリズム (2/10)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

主題

離散最適化のトピックの１つとして
グラフの木分解を取り上げ,

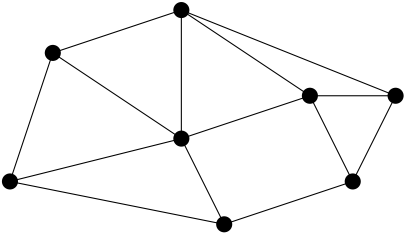
- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

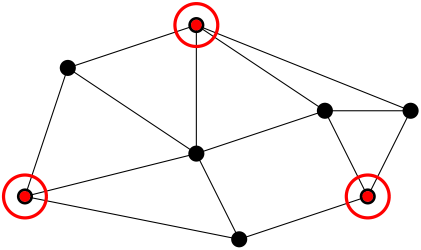
- 「離散最適化の神髄」だから

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



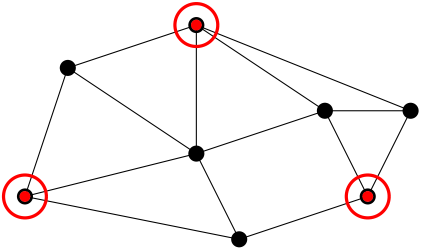
これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ

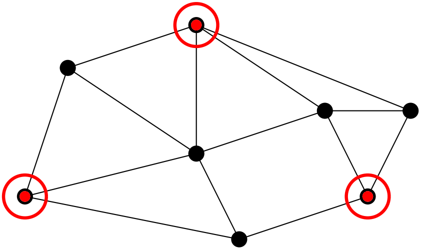


これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

事実

グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

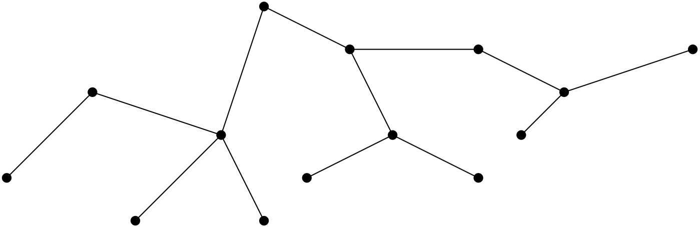
事実

グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

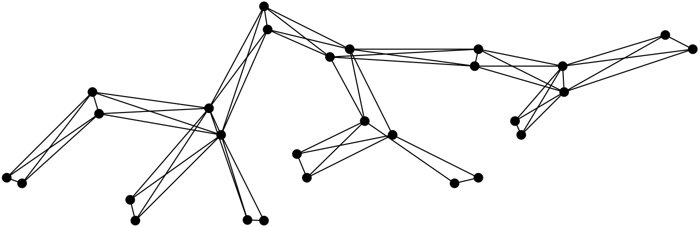
直感？

グラフが木に 近ければ，簡単に解けそう？

これは木

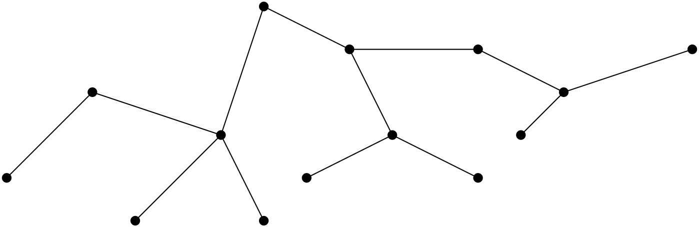


これは木に近い？

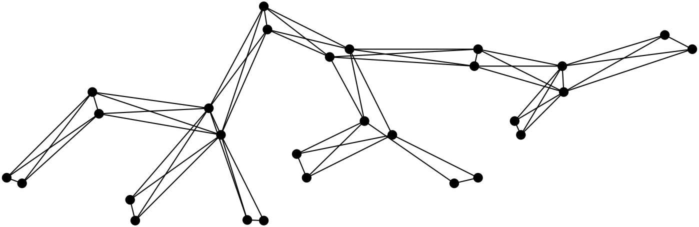


木に近い，とは？

これは木



これは木に近い？ ⇝ 「木っぽさ」を表す尺度を考える必要あり



この講義のキーワード (と荒っぽい説明)

グラフの木幅	グラフの「木っぽさ」を表す尺度 (の 1 つ)
グラフの木分解	グラフを「木っぽく」表した構造
動的計画法	木分解上の効率的アルゴリズム
オートマトン	動的計画法に基づくアルゴリズムの解釈
Courcelle の定理	上記と論理学に基づく『メタアルゴリズム』

次の主題が有機的に結びつく面白い話題

- グラフ
- アルゴリズム
- オートマトン
- 論理 (特に，有限モデル理論)

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

木幅と木分解の性質を理解する

- 木分解による分離
- 特殊なグラフの木幅
- 素敵な木分解

目次

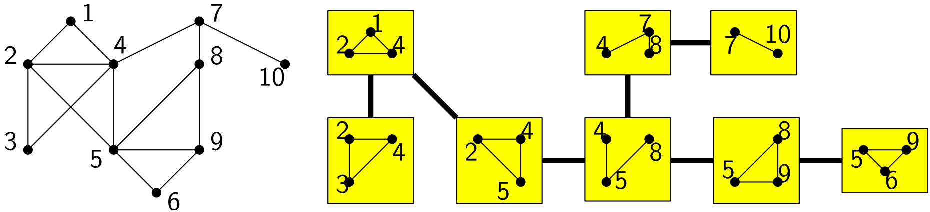
木分解 (tree decomposition) とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは
$\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する



木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

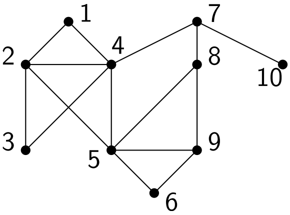
グラフの木幅とは？

- 無向グラフ G の木分解 $\mathcal{T}$ の**幅** (width)

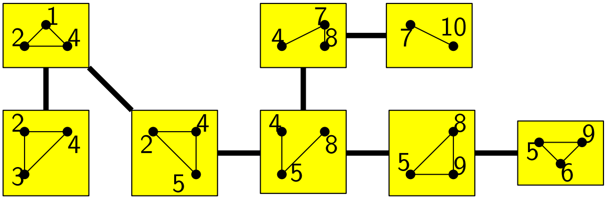
$$\mathtt{tw}(\mathcal{T}) = \max\{|S| - 1 \mid S \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点}\}$$

- 無向グラフ G の**木幅** (treewidth)

$$\mathtt{tw}(G) = \min\{\mathtt{tw}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \text{ は } G \text{ の木分解}\}$$

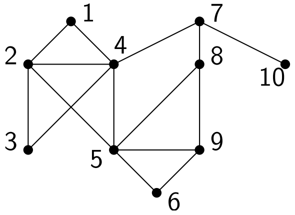


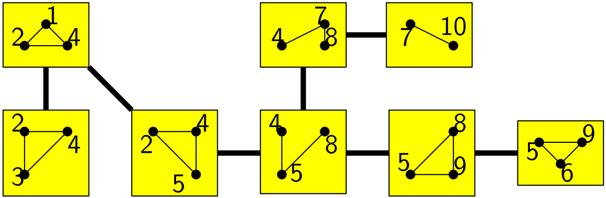
$\mathtt{tw}(G) = 2$

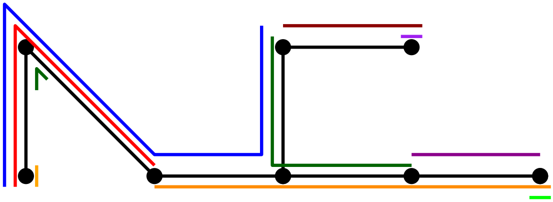


木分解の見方

「木の中の部分木の集まり」と見ることができる



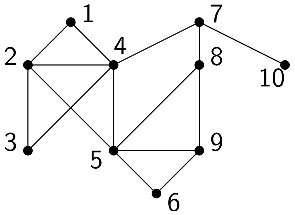


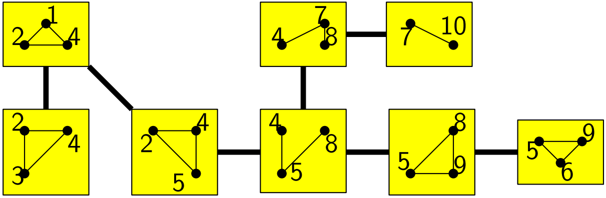


無向グラフ $G = (V, E)$，G の木分解 $\mathcal{T}$

設定

- $\mathcal{T}$ の節点 $X_1, X_2, \ldots, X_r$
- 葉ではない任意の節点 X_j を考える
- $\mathcal{T}$ から X_j を除去することで，$\mathcal{T}$ が連結成分に分かれる
- 連結成分の 2 つを $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ とする

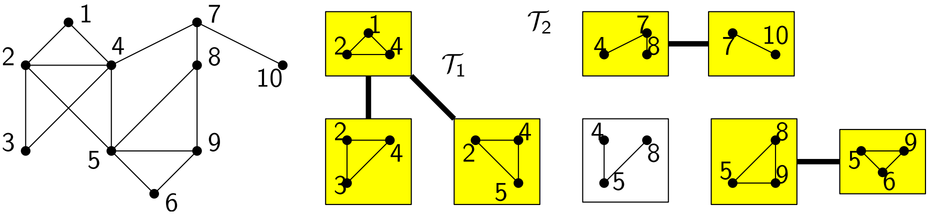




無向グラフ $G = (V, E)$，G の木分解 $\mathcal{T}$

設定

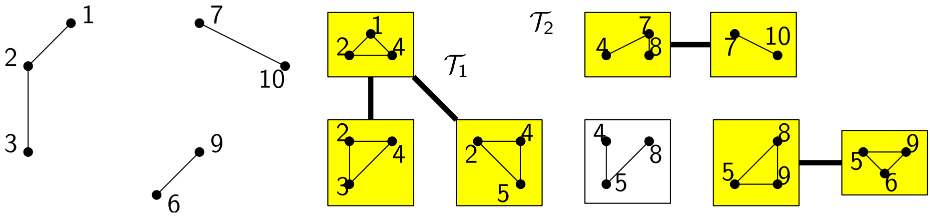
- $\mathcal{T}$ の節点 $X_1, X_2, \ldots, X_r$
- 葉ではない任意の節点 X_j を考える
- $\mathcal{T}$ から X_j を除去することで，$\mathcal{T}$ が連結成分に分かれる
- 連結成分の 2 つを $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ とする



このとき，

木分解の性質：節点による分離

$$\left(\bigcup_{X_i \in V(\mathcal{T}_1)} X_i\right) - X_j \text{ の頂点と } \left(\bigcup_{X_k \in V(\mathcal{T}_2)} X_k\right) - X_j \text{ の頂点を結ぶ}$$
G の辺はない



証明 (背理法)：そのような辺 $\{u, v\} \in E$ があると仮定

- ある $X_i \in V(\mathcal{T}_1)$ に対して $u \in X_i - X_j$，かつ，
  ある $X_k \in V(\mathcal{T}_2)$ に対して $v \in X_k - X_j$ と仮定してよい

主張

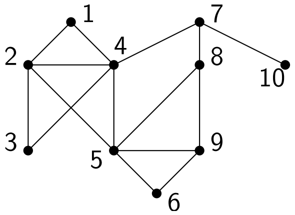
$u \in X_j$ または $v \in X_j$ (つまり，矛盾)

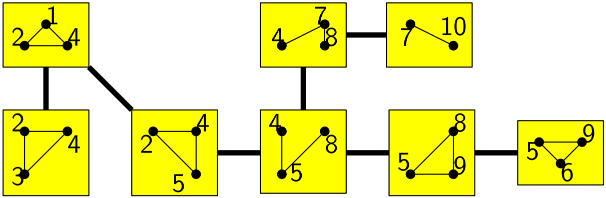
- $\{u, v\} \in E$ なので，(T2) より，ある節点 X_ℓ が存在して，$u, v \in X_\ell$
- $X_\ell \in V(\mathcal{T}_1)$ ならば，(T3) より，$v \in X_j$
- $X_\ell \in V(\mathcal{T}_2)$ ならば，(T3) より，$u \in X_j$ □

無向グラフ $G = (V, E)$，G の木分解 $\mathcal{T}$

木分解の性質：完全部分グラフ

$S \subseteq V$ が G の完全部分グラフを誘導する $\Rightarrow$
$\mathcal{T}$ の節点で S を含むものが存在する





無向グラフ $G = (V, E)$，G の木分解 $\mathcal{T}$

木分解の性質：完全部分グラフ

$S \subseteq V$ が G の完全部分グラフを誘導する $\Rightarrow$
$\mathcal{T}$ の節点で S を含むものが存在する

証明：次の補題を用いると証明できる

補題：木の Helly 性

任意の木 T と，その 3 つの部分木 T_1, T_2, T_3 が次を満たすとする

$$V(T_1) \cap V(T_2) \neq \emptyset, \quad V(T_1) \cap V(T_3) \neq \emptyset, \quad V(T_2) \cap V(T_3) \neq \emptyset$$

このとき，$V(T_1) \cap V(T_2) \cap V(T_3) \neq \emptyset$

補題を使って，どのように証明するのかは演習問題

補題の証明：$|V(T)|$ に関する数学的帰納法

- $|V(T)| = 1$ のとき，$T_1 = T_2 = T_3$ であり，成り立つ
- $|V(T)| = n \geq 1$ のとき成り立つとして，
  $|V(T)| = n + 1$ のときに成り立つことを示す

$V(T_1) \cap V(T_2) \neq \emptyset$, $V(T_1) \cap V(T_3) \neq \emptyset$, $V(T_2) \cap V(T_3) \neq \emptyset$ を仮定する

- $|V(T_1)| = 1$ のとき，$V(T_1) = \{v\}$ とする
- このとき，$V(T_1) \cap V(T_2) = V(T_1) \cap V(T_3) = \{v\}$
- $\therefore v \in V(T_2) \cap V(T_3)$
- $\therefore V(T_1) \cap V(T_2) \cap V(T_3) = \{v\} \neq \emptyset$

- $|V(T_2)| = 1, |V(T_3)| = 1$ のときも同様

$|V(T_1)|, |V(T_2)|, |V(T_3)| \geq 2$ とする

- $n+1 \geq 2$ なので，T は葉を持つ
- v を T の葉，u を T における v の隣接頂点とする
- このとき，$T'_i = T_i - v$ とすると，
  $V(T'_1) \cap V(T'_2) \neq \emptyset$, $V(T'_1) \cap V(T'_3) \neq \emptyset$, $V(T'_2) \cap V(T'_3) \neq \emptyset$
  (なぜ？)

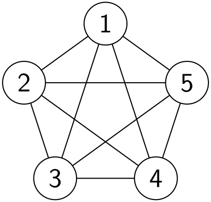
$|V(T_1)|, |V(T_2)|, |V(T_3)| \geq 2$ とする

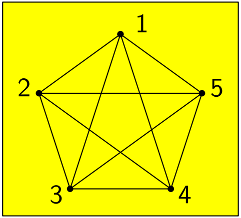
- $n+1 \geq 2$ なので，T は葉を持つ
- v を T の葉，u を T における v の隣接頂点とする
- このとき，$T'_i = T_i - v$ とすると，
  $V(T'_1) \cap V(T'_2) \neq \emptyset$, $V(T'_1) \cap V(T'_3) \neq \emptyset$, $V(T'_2) \cap V(T'_3) \neq \emptyset$
  (なぜ？)
- したがって，$T - v$ に帰納法の仮定を適用すると，
  $V(T'_1) \cap V(T'_2) \cap V(T'_3) \neq \emptyset$
- したがって，$V(T_1) \cap V(T_2) \cap V(T_3) \neq \emptyset$ □

つまり,

完全グラフの木幅

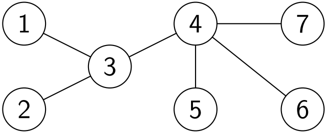
完全グラフ K_n の木幅は $n-1$

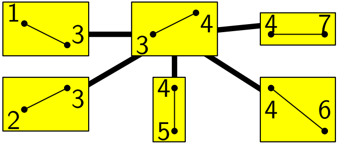




木の木幅

頂点数 2 以上の木の木幅は 1





木の頂点数に関する帰納法

- 頂点数が 2 のときは完全グラフで，幅は 1
- 頂点数が $n \geq 2$ の任意の木の木幅が 1 であると仮定して，頂点数が $n+1$ の任意の木 T を考える
- v を T の葉，u を T における v の隣接頂点とする
- $T' = T - v$ とすると，帰納法の仮定より，T' は幅 1 の木分解 $\mathcal{T}'$ を持つ
- (T3) より，$\mathcal{T}'$ には u を要素として持つ節点 X が存在
- T の木分解 $\mathcal{T}$ を以下のように $\mathcal{T}'$ から作る

  $\{u, v\}$ を新たな節点として，X に隣接させる
- この $\mathcal{T}$ が (T1)，(T2)，(T3) を満たすことを確認するのは演習問題 $\square$

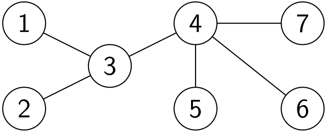
無向グラフ $G = (V, E)$

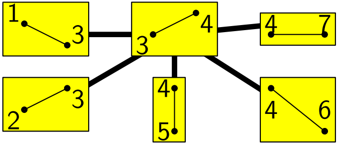
命題 (演習問題)

$\mathtt{tw}(G) = 1 \Rightarrow G$ は森

つまり，

$$G \text{ は森} \quad \Leftrightarrow \quad \mathtt{tw}(G) \leq 1$$





素敵な木分解 (nice tree decomposition) とは？

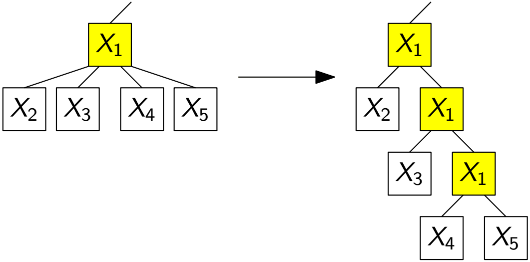
無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 $\mathcal{T}$ が素敵であるとは，
$\mathcal{T}$ の 1 つの節点 X_r を根として $\mathcal{T}$ を根付き木と見なしたときに
次を満たすこと

- $X_r = \emptyset$，かつ，葉である節点 X に対して，$X = \emptyset$
- 各節点の子の数は 2 以下
- 節点 X の子の数が 2 のとき，その子を X', X'' とすると，

$$X = X' = X''$$

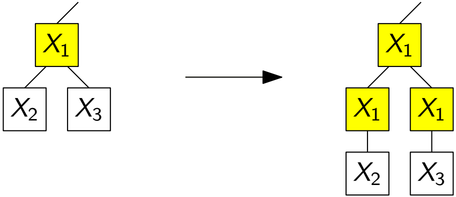
- 節点 X の子の数が 1 のとき，その子を X' とすると，
次のどちらかが成立
  - ある頂点 $v \notin X'$ が存在して，$X = X' \cup \{v\}$
  - ある頂点 $w \in X'$ が存在して，$X = X' - \{w\}$

木分解から，同じ幅の素敵な木分解が (効率よく) 作れる



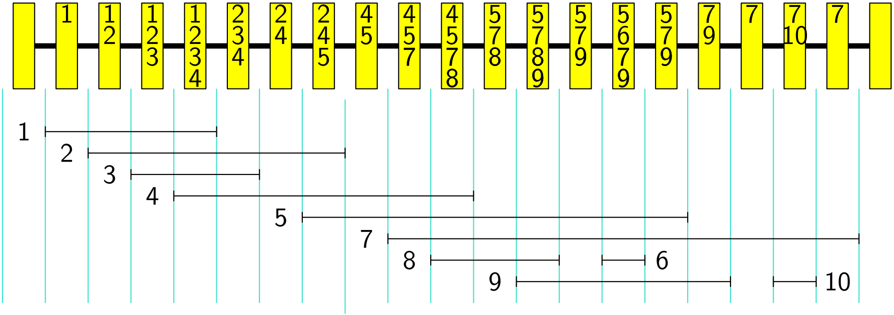
子の数が 3 以上のときは，この操作で子の数を 2 にする

木分解から，同じ幅の素敵な木分解が (効率よく) 作れる



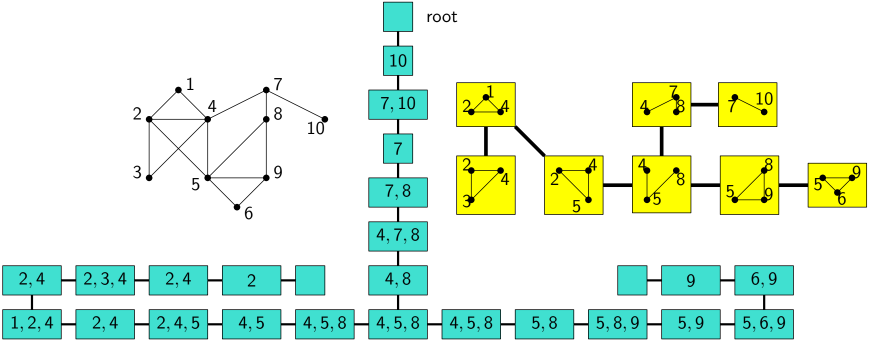
子の数が 2 のとき，親子が同じになるように変形する

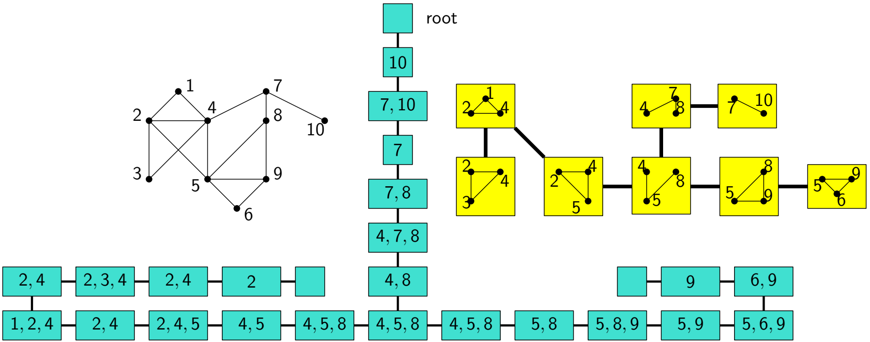
木分解から，同じ幅の素敵な木分解が (効率よく) 作れる



子の数が 1 のところは，素敵な道分解のときと同じように変形する

素敵な木分解：例


root
10
7, 10
7
7, 8
4, 7, 8
4, 8
2, 4
2, 3, 4
2, 4
2
9
6, 9
1, 2, 4
2, 4
2, 4, 5
4, 5
4, 5, 8
4, 5, 8
4, 5, 8
5, 8
5, 8, 9
5, 9
5, 6, 9
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10



X の子の数	X の要素数は X の子の要素数より	
2	—	X は結合節点　(join node)
1	大きい	X は導入節点　(introduce node)
1	小さい	X は忘却節点　(forget node)
0	—	X は葉

素敵な木分解を考える理由 1

次が正しいと分かる (演習問題)

> 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 $\mathcal{T}$ に対して，
> G の木分解で，$\mathcal{T}$ と同じ幅を持ち，
> 節点数が $O(\mathtt{tw}(\mathcal{T}) \cdot |V|)$ となるものが存在

素敵な木分解を考える理由 2

動的計画法に基づくアルゴリズムを設計しやすくなる

$\rightsquigarrow$ 次々回の内容

目次

道幅と木幅の関係

任意の無向グラフ $G=(V,E)$ に対して

$$\mathtt{tw}(G) \le \mathtt{pw}(G) \le O(\mathtt{tw}(G)\log|V|)$$

証明：左側の不等号は前々回の演習問題
右側の不等号は今回の演習問題

- ヒント 1：素敵な木分解を考える
- ヒント 2：木の道幅は $O(\log|V|)$

今日の目標

木幅と木分解の性質を理解する

- 木分解による分離
- 特殊なグラフの木幅
- 素敵な木分解

次回の予告

木幅と木分解の性質をより深く理解する

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次