離散最適化基礎論 第 4 回
道分解を用いたアルゴリズム設計

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 11 月 4 日

最終更新：2016 年 11 月 29 日　02:05

スケジュール 前半 (予定)

1. 離散最適化における木分解の役割 (10/7)
- ⋆ 休講 (国内出張) (10/14)
2. 木に対するアルゴリズム設計 (10/23)
3. 道幅と道分解 (10/30)
4. 道分解を用いたアルゴリズム設計 (11/4)
- ⋆ 休講 (海外出張) (11/11)
5. 木分解と木幅 (11/18)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/25)
6. 木幅の性質 (12/2)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 木分解を用いたアルゴリズム設計：頂点集合の選択・分割 (12/9)
8. 木分解を用いたアルゴリズム設計：辺集合の選択・分割 (12/16)
- ⋆ 休講 (天皇誕生日) (12/23)
- ⋆ 冬季休業 (12/30)
9. 木幅と論理：単項二階論理 (1/6)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/13)
10. 木幅と論理：オートマトン (1/20)
11. 木幅と論理：アルゴリズム設計 (1/27)
12. 木分解構成アルゴリズム：準備 (2/3)
13. 木分解構成アルゴリズム (2/10)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

主題

離散最適化のトピックの１つとして
グラフの木分解を取り上げ,

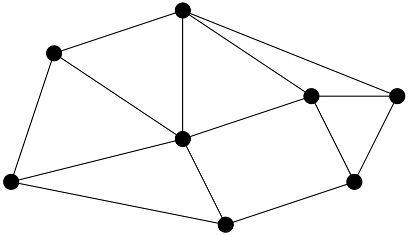
- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

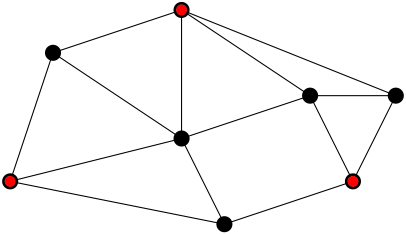
- 「離散最適化の神髄」だから

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



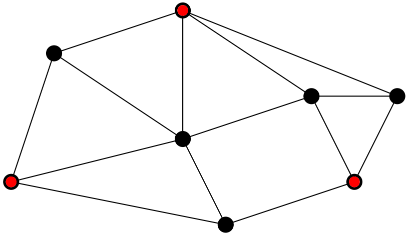
これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ

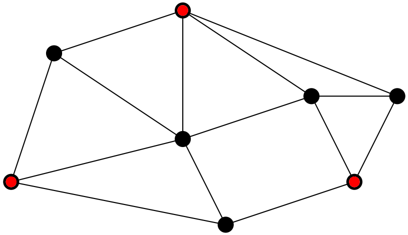


これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

事実

グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

事実

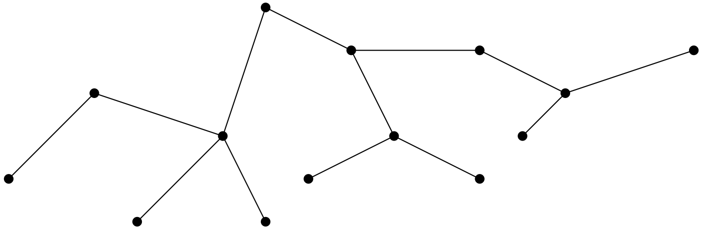
グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

直感？

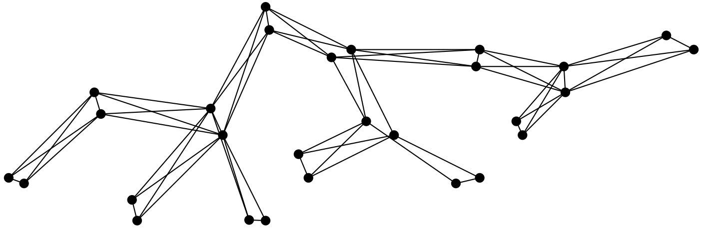
グラフが木に 近ければ，簡単に解けそう？

木に近い，とは？

これは木

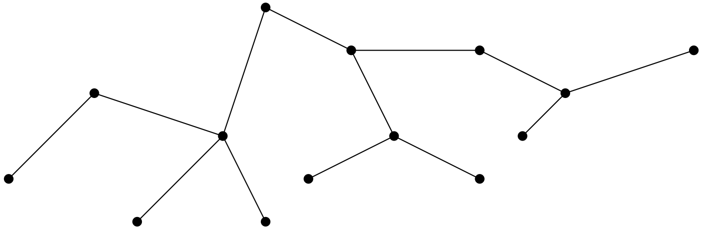


これは木に近い？

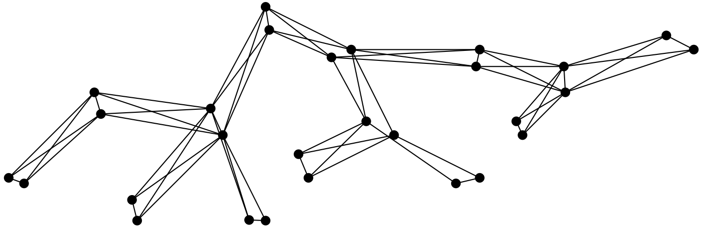


木に近い，とは？

これは木



これは木に近い？ $\rightsquigarrow$ 「木っぽさ」を表す尺度を考える必要あり



木幅 — 「木っぽさ」を表す尺度

この講義のキーワード (と荒っぽい説明)

グラフの木幅	グラフの「木っぽさ」を表す尺度 (の 1 つ)
グラフの木分解	グラフを「木っぽく」表した構造
動的計画法	木分解上の効率的アルゴリズム
オートマトン	動的計画法に基づくアルゴリズムの解釈
Courcelle の定理	上記と論理学に基づく『メタアルゴリズム』

木幅と木分解の面白さ

次の主題が有機的に結びつく面白い話題

- グラフ
- アルゴリズム
- オートマトン
- 論理 (特に，有限モデル理論)

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

道分解を用いた効率的アルゴリズムが設計できるようになる

- 最大独立集合問題
- 最小支配集合問題

キーワード：素敵な道分解，再帰，動的計画法

目次

1. 木分解と道分解 (復習)
2. 最大独立集合
3. 最小支配集合問題
4. 今日のまとめ と 次回の予告

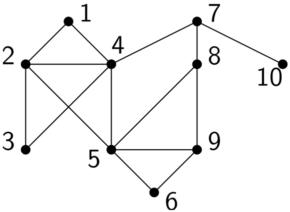
木分解 (tree decomposition) とは？

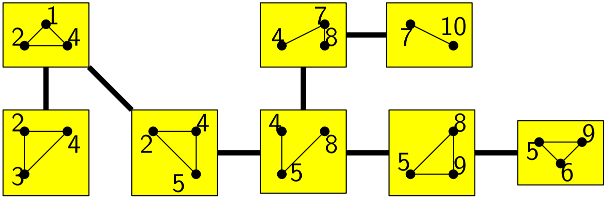
無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは $\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する





木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

道分解 (path decomposition) とは？

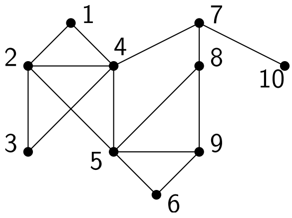
無向グラフ $G = (V, E)$ の道分解 とは道 $\mathcal{P}$ で，

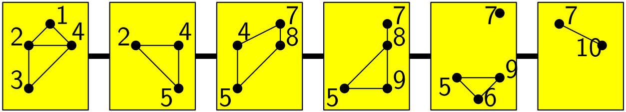
(T1) $\mathcal{P}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{P}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{P}$ の節点で v を含むものは $\mathcal{P}$ の (連結で非空な) 部分道を誘導する

つまり，道分解とは，道であるような木分解のこと





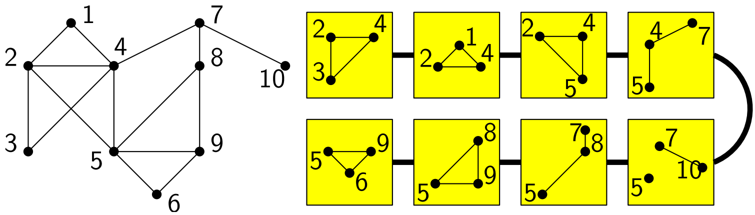
グラフの道幅とは？

- 無向グラフ G の道分解 $\mathcal{P}$ の幅 (width)

$$\mathtt{pw}(\mathcal{P}) = \max\{|S| - 1 \mid S \text{ は } \mathcal{P} \text{ の節点}\}$$

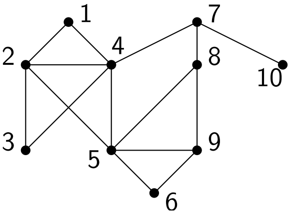
- 無向グラフ G の道幅 (pathwidth)

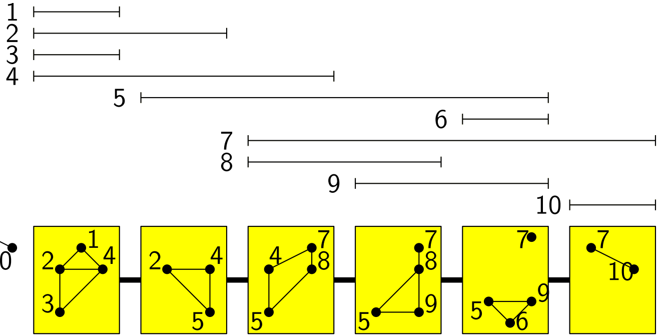
$$\mathtt{pw}(G) = \min\{\mathtt{pw}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ は } G \text{ の道分解}\}$$



$\mathtt{pw}(G) = 2$

道分解の見方





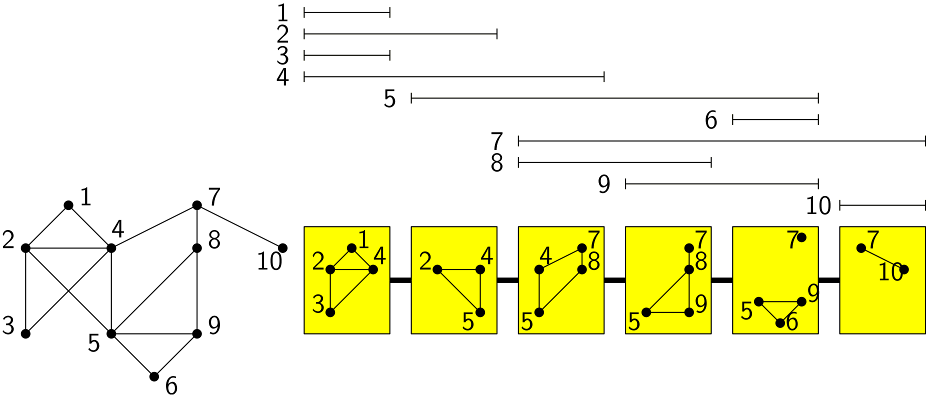
素敵な道分解 (nice path decomposition) とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ の道分解 $\mathcal{P}$ が**素敵** であるとは，
$\mathcal{P}$ の節点を順に $X_1, X_2, \ldots, X_r$ と並べたとき，次を満たすこと

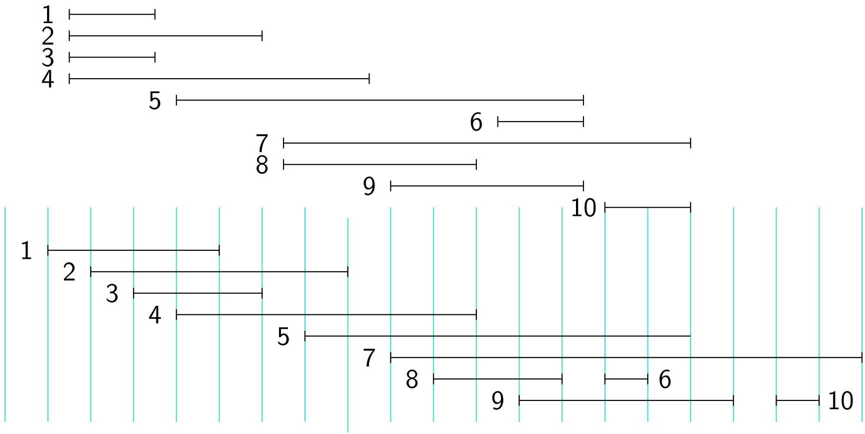
- $X_1 = X_r = \emptyset$
- 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ に対して，次のどちらかが成り立つ
  1. ある頂点 $v \notin X_i$ が存在して，$X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$
  2. ある頂点 $w \in X_i$ が存在して，$X_{i+1} = X_i - \{w\}$

つまり，空集合を端点として，隣接する節点の差分は必ず 1 頂点

道分解から，同じ幅の素敵な道分解が (効率よく) 作れる

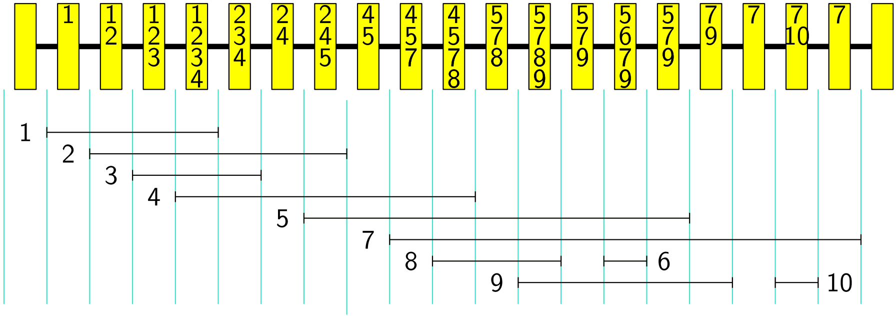


道分解から，同じ幅の素敵な道分解が (効率よく) 作れる

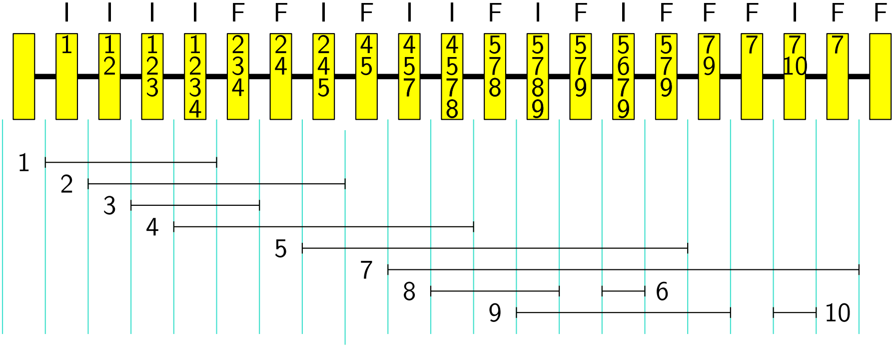


すべての区間の端点が異なるようにずらす

道分解から，同じ幅の素敵な道分解が (効率よく) 作れる



道分解から，同じ幅の素敵な道分解が (効率よく) 作れる



- $X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$ のとき，X_{i+1} は導入節点 (introduce node)
- $X_{i+1} = X_i - \{w\}$ のとき，X_{i+1} は忘却節点 (forget node)

道分解を用いたアルゴリズム：基本戦略

入力：無向グラフ G

1. G の素敵な道分解 $\mathcal{P}$ を構成する
2. 道分解 $\mathcal{P}$ 上の動的計画法アルゴリズムを動かす

以下，G の素敵な道分解 $\mathcal{P}$ は与えられるものとする

目次

1 木分解と道分解 (復習)

2 最大独立集合

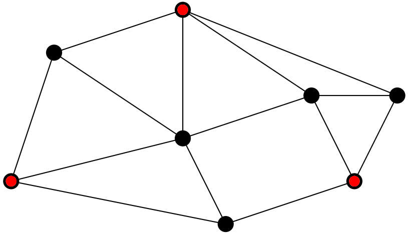
3 最小支配集合問題

4 今日のまとめ と 次回の予告

$G = (V, E)$ 無向グラフ

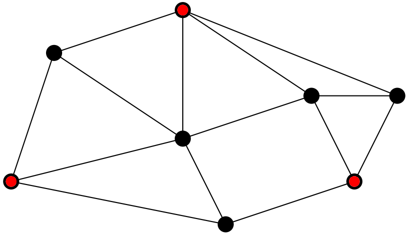
独立集合とは？

G の独立集合 (independent set) とは，
頂点部分集合 $I \subseteq V$ で，I のどの 2 頂点も隣接しないもの



最大独立集合問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の最大独立集合 (の要素数)



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

目標

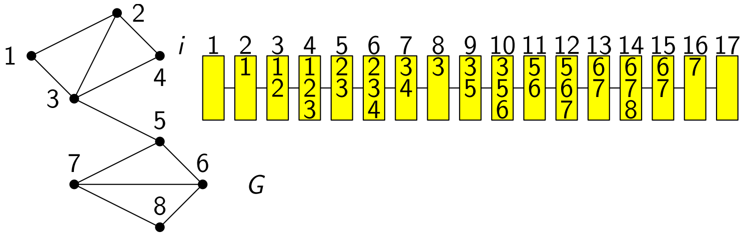
素敵な道分解を使って，最大独立集合問題を効率的に解く

設定

- 無向グラフ $G = (V, E)$
- G の素敵な道分解 $\mathcal{P}$
- $\mathcal{P}$ の節点を端から順に $X_1, X_2, \ldots, X_r$
- $p = \mathrm{pw}(\mathcal{P})$ ($\mathcal{P}$ の幅)

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

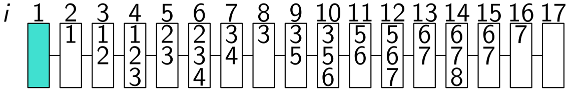
- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数



求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \dots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数

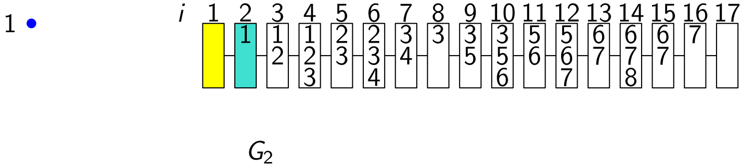


G_1

求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

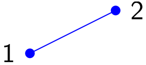
- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数

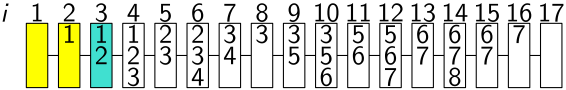


求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数





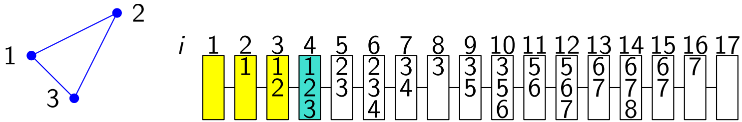
G_3

求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数

$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数



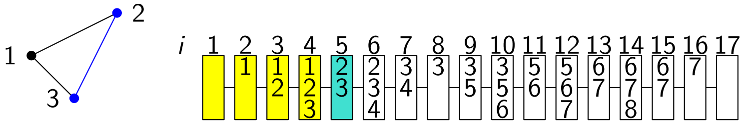
G_4

求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数

$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数



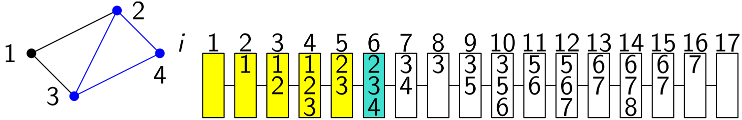
G_5

求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$= G$ の最大独立集合の要素数

最大独立集合問題：基本的な考え方 (1)

各 $i \in \{1,\ldots,r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数

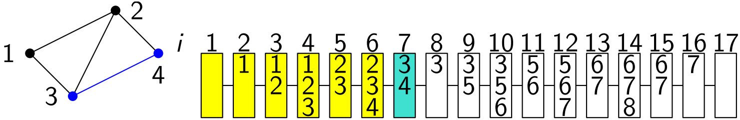


G_6

求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$\qquad\qquad\qquad = G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数



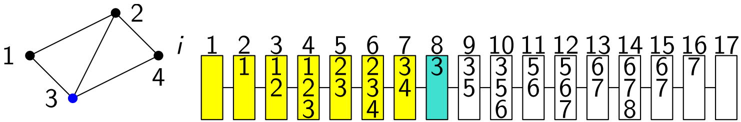
G_7

求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数

$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数

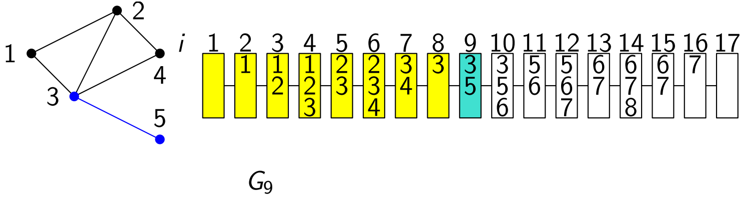


G_8

求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$\qquad\qquad\qquad\quad = G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数

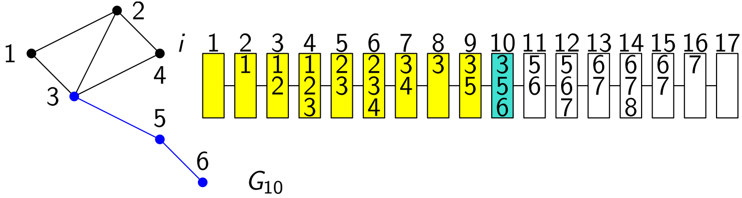


求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数

$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \dots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数

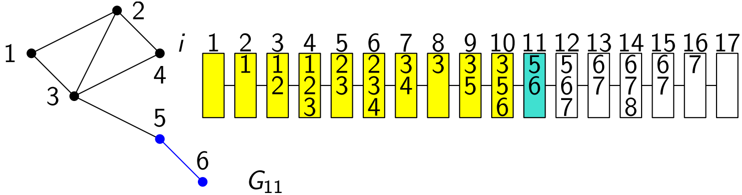


求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数

$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1,\dots,r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \dots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数

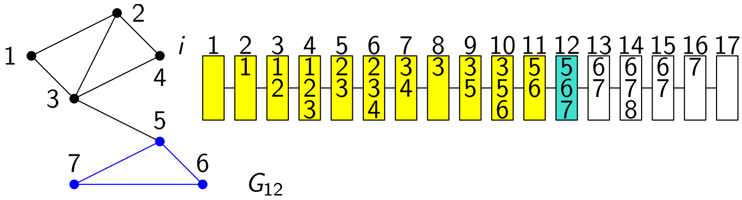


求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$= G$ の最大独立集合の要素数

最大独立集合問題：基本的な考え方 (1)

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数

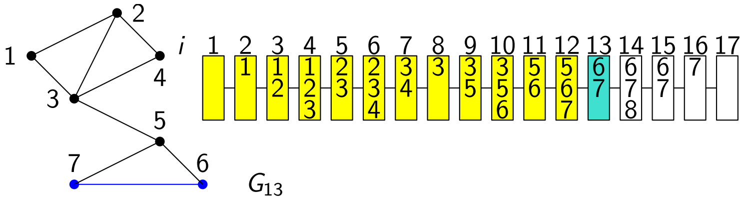


求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数

$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

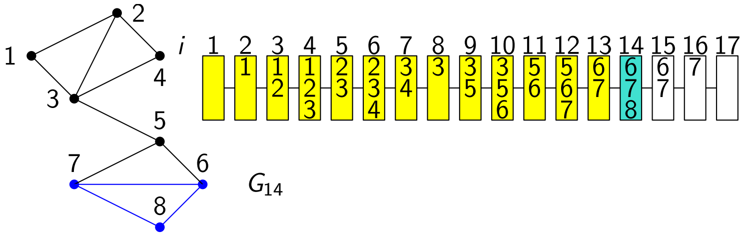
- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数



求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

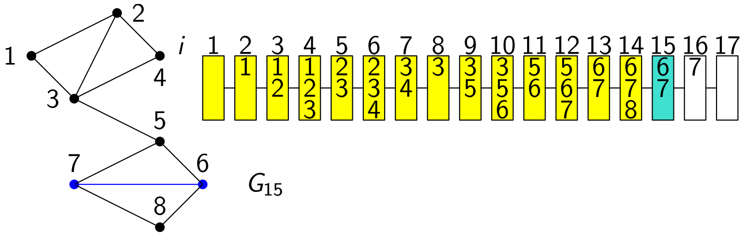
- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数



求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数

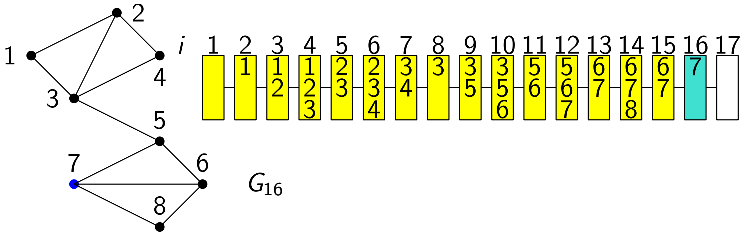


求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数

$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数

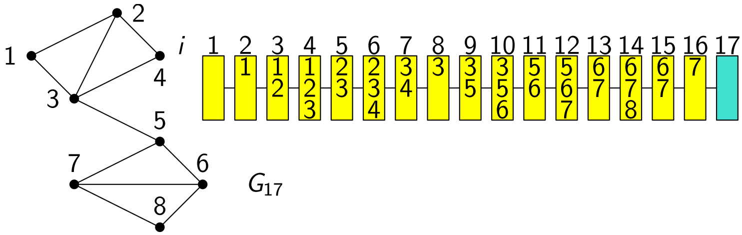


求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$= G$ の最大独立集合の要素数

最大独立集合問題：基本的な考え方 (1)

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最大独立集合の要素数



求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最大独立集合の要素数
$= G$ の最大独立集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- A_i, B_i が次を満たすとする

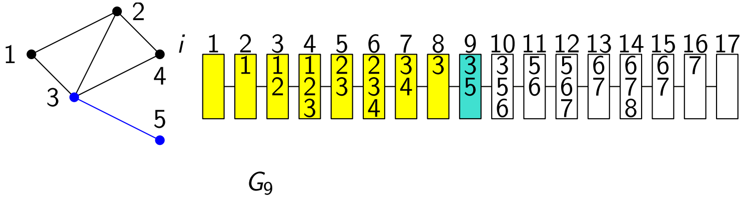
$$A_i \cup B_i = X_i, \quad A_i \cap B_i = \emptyset$$

- $s(i; A_i, B_i)$ を次のように定義

$$s(i; A_i, B_i) = \max \left\{ |S_i| \;\middle|\; \begin{array}{l} S_i \subseteq X_1 \cup \cdots \cup X_i, \\ S_i \text{ は } G_i \text{ の独立集合}, \\ A_i \subseteq S_i, B_i \cap S_i = \emptyset \end{array} \right\}$$

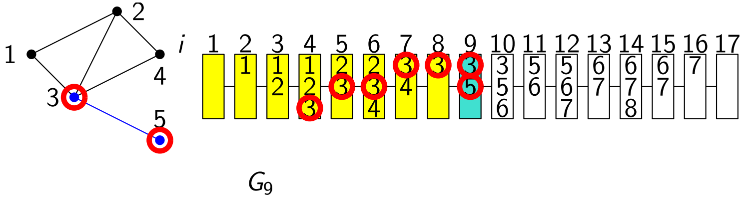
- つまり，$s(i; A_i, B_i)$ は G_i の独立集合の中で，
  A_i の頂点をすべて含み，B_i の頂点をどれも含まないものの
  最大要素数

このとき，$s(i) = \max \{ s(i; A_i, B_i) \mid A_i \cup B_i = X_i, A_i \cap B_i = \emptyset \}$



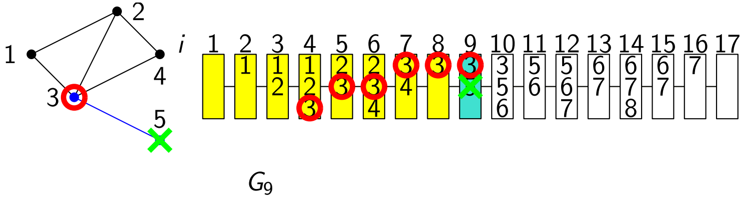
$X_9 = \{3, 5\}$

- $s(9; \{3,5\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(9; \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \{5\}, \{3\}) = 3$
- $s(9; \emptyset, \{3,5\}) = 2$



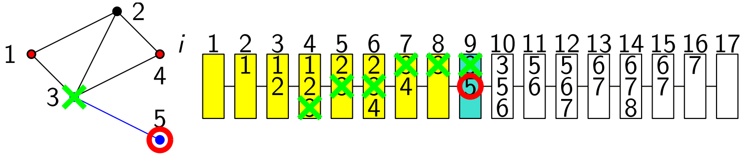
$X_9 = \{3, 5\}$

- $s(9; \{3, 5\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(9; \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \{5\}, \{3\}) = 3$
- $s(9; \emptyset, \{3, 5\}) = 2$



$X_9 = \{3, 5\}$

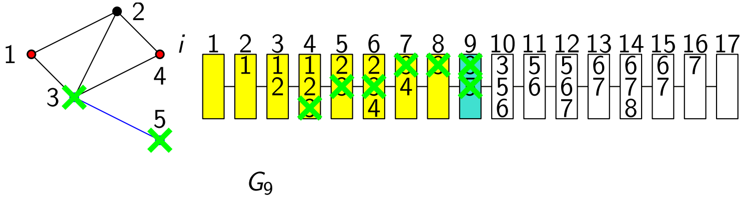
- $s(9; \{3, 5\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(9; \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \{5\}, \{3\}) = 3$
- $s(9; \emptyset, \{3, 5\}) = 2$



G_9

$X_9 = \{3, 5\}$

- $s(9; \{3,5\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(9; \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \{5\}, \{3\}) = 3$
- $s(9; \emptyset, \{3,5\}) = 2$

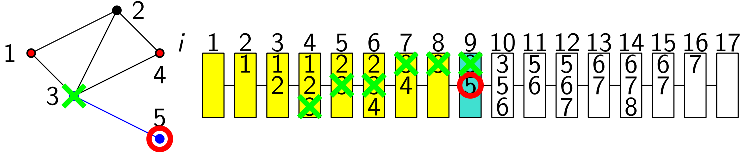


$X_9 = \{3, 5\}$

- $s(9; \{3,5\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(9; \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \{5\}, \{3\}) = 3$
- $s(9; \emptyset, \{3,5\}) = 2$

X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

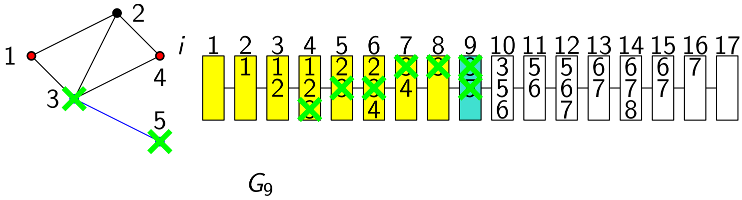
- A_i, B_i が $A_i \cup B_i = X_i$, $A_i \cap B_i = \emptyset$ を満たすとする
- S_i は G_i の独立集合で，
  A_i の頂点をすべて含み，B_i の頂点をどれも含まないものとする
- $v \in A_i$ の場合と $v \in B_i$ の場合で分ける



G_9

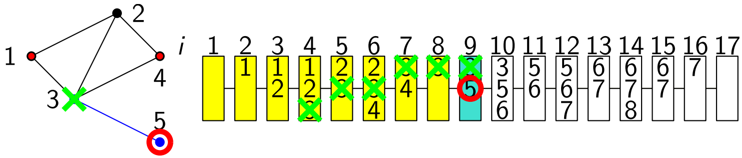
X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

- A_i, B_i が $A_i \cup B_i = X_i$, $A_i \cap B_i = \emptyset$ を満たすとする
- S_i は G_i の独立集合で，
  A_i の頂点をすべて含み，B_i の頂点をどれも含まないものとする
- $v \in A_i$ の場合と $v \in B_i$ の場合で分ける



X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

- $v \in A_i$ のとき，$A_{i-1} = A_i - \{v\}$, $B_{i-1} = B_i$ とすると，
  $S_i - \{v\}$ は G_{i-1} の独立集合で，
  A_{i-1} の頂点をすべて含み，B_{i-1} の頂点をどれも含まないものである

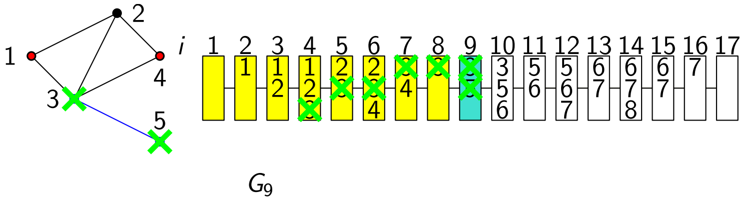


G_9

最大独立集合問題：導入節点の場合 (3)

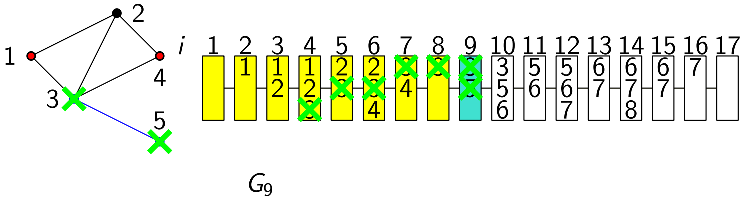
X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

- $v \in B_i$ のとき，$A_{i-1} = A_i$, $B_{i-1} = B_i - \{v\}$ とすると，
  S_i は G_{i-1} の独立集合で，
  A_{i-1} の頂点をすべて含み，B_{i-1} の頂点をどれも含まないものである



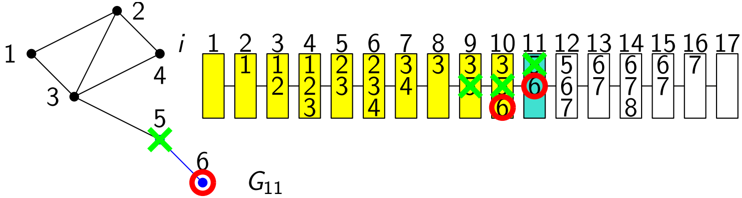
X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

$$s(i; A_i, B_i) = \begin{cases} -\infty & (A_i \text{ に隣接 2 頂点が存在}) \\ s(i-1; A_i - \{v\}, B_i) + 1 & (A_i \text{ に隣接 2 頂点が非存在,} \\ & \text{かつ}, v \in A_i) \\ s(i-1; A_i, B_i - \{v\}) & (A_i \text{ に隣接 2 頂点が非存在,} \\ & \text{かつ}, v \in B_i) \end{cases}$$



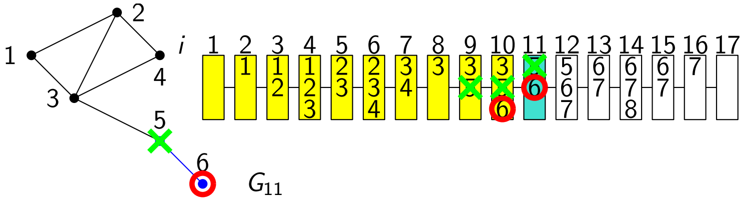
X_i が忘却節点の場合 (ある $w \in X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} - \{w\}$)

- A_i, B_i が $A_i \cup B_i = X_i$, $A_i \cap B_i = \emptyset$ を満たすとする
- S_i は G_i の独立集合で，
  A_i の頂点をすべて含み，B_i の頂点をどれも含まないものとする
- このとき，S_i は G_{i-1} の独立集合である　　　　($\because G_i = G_{i-1}$)

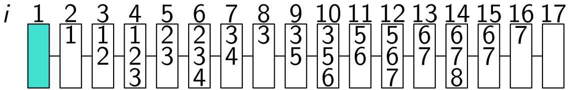


X_i が忘却節点の場合 (ある $w \in X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} - \{w\}$)

$$s(i; A_i, B_i) = \max\{s(i-1; A_i \cup \{w\}, B_i), s(i-1; A_i, B_i \cup \{w\})\}$$



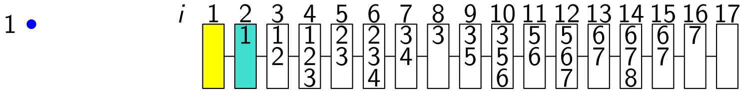
これで，アルゴリズムが完成した！



G_1

$X_1 = \emptyset$

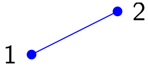
- $s(1; \emptyset, \emptyset) = 0$

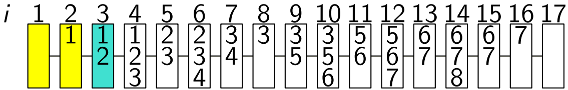


G_2

$X_2 = \{1\}$ 導入節点

- $s(2; \{1\}, \emptyset) = s(1; \emptyset, \emptyset) + 1 = 0 + 1 = 1$
- $s(2; \emptyset, \{1\}) = s(1; \emptyset, \emptyset) = 0$

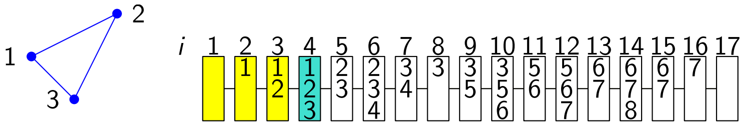




G_3

$X_3 = \{1, 2\}$ 導入節点

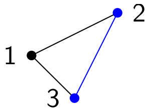
- $s(3; \{1, 2\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(3; \{1\}, \{2\}) = s(2; \{1\}, \emptyset) = 1$
- $s(3; \{2\}, \{1\}) = s(2; \emptyset, \{1\}) + 1 = 0 + 1 = 1$
- $s(3; \emptyset, \{1, 2\}) = s(2; \emptyset, \{1\}) = 0$



G_4

$X_4 = \{1, 2, 3\}$ 導入節点

- $s(4; {\color{red}\{1, 2, 3\}}, {\color{green}\emptyset}) = -\infty$
- $s(4; {\color{red}\{1, 2\}}, {\color{green}\{3\}}) = -\infty$
- $s(4; {\color{red}\{1, 3\}}, {\color{green}\{2\}}) = -\infty$
- $s(4; {\color{red}\{2, 3\}}, {\color{green}\{1\}}) = -\infty$
- $s(4; {\color{red}\{1\}}, {\color{green}\{2, 3\}}) = s(3; \{1\}, \{2\}) = 1$
- $s(4; {\color{red}\{2\}}, {\color{green}\{1, 3\}}) = s(3; \{2\}, \{1\}) = 1$
- $s(4; {\color{red}\{3\}}, {\color{green}\{1, 2\}}) = s(3; \emptyset, \{1, 2\}) + 1 = 0 + 1 = 1$
- $s(4; {\color{red}\emptyset}, {\color{green}\{1, 2, 3\}}) = s(3; \emptyset, \{1, 2\}) = 0$

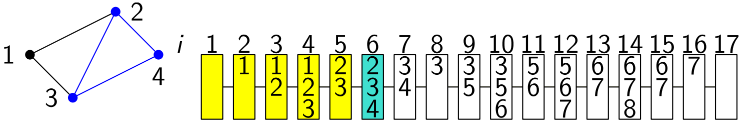


i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
		1	1, 2	1, 2, 3	2, 3	2, 3, 4	3, 4	3	3, 5	3, 5, 6	5, 6	5, 6, 7	6, 7	6, 7, 8	6, 7	7	

G_5

$X_5 = \{2, 3\}$ 忘却節点

- $s(5; \{2, 3\}, \emptyset) = \max\{\underbrace{s(4; \{1, 2, 3\}, \emptyset)}_{-\infty}, \underbrace{s(4; \{2, 3\}, \{1\})}_{-\infty}\} = -\infty$
- $s(5; \{2\}, \{3\}) = \max\{\underbrace{s(4; \{1, 2\}, \{3\})}_{-\infty}, \underbrace{s(4; \{2\}, \{1, 3\})}_{1}\} = 1$
- $s(5; \{3\}, \{2\}) = \max\{\underbrace{s(4; \{1, 3\}, \{2\})}_{-\infty}, \underbrace{s(4; \{3\}, \{1, 2\})}_{1}\} = 1$
- $s(5; \emptyset, \{2, 3\}) = \max\{\underbrace{s(4; \{1\}, \{2, 3\})}_{1}, \underbrace{s(4; \emptyset, \{1, 2, 3\})}_{0} = 1$

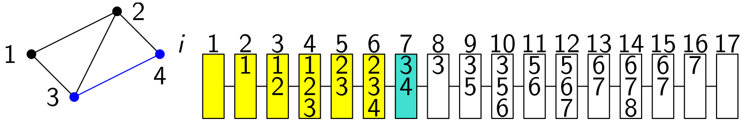


G_6

$X_6 = \{2, 3, 4\}$ 導入節点

- $s(6; \{2, 3, 4\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(6; \{2, 3\}, \{4\}) = -\infty$
- $s(6; \{2, 4\}, \{3\}) = -\infty$
- $s(6; \{3, 4\}, \{2\}) = -\infty$
- $s(6; \{2\}, \{3, 4\}) = s(5; \{2\}, \{3\}) = 1$
- $s(6; \{3\}, \{2, 4\}) = s(5; \{3\}, \{2\}) = 1$
- $s(6; \{4\}, \{2, 3\}) = s(5; \emptyset, \{2, 3\}) + 1 = 1 + 1 = 2$
- $s(6; \emptyset, \{2, 3, 4\}) = s(5; \emptyset, \{2, 3\}) = 1$

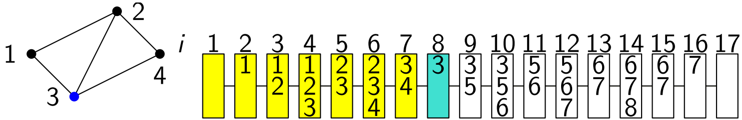
最大独立集合問題：アルゴリズムの動作例 (7)



G_7

$X_7 = \{3, 4\}$ 忘却節点

- $s(7; \{3,4\}, \emptyset) = \max\{s(6; \{2,3,4\}, \emptyset), s(6; \{3,4\}, \{2\})\} = -\infty$
- $s(7; \{3\}, \{4\}) = \max\{s(6; \{2,3\}, \{4\}), s(6; \{3\}, \{2,4\})\} = 1$
- $s(7; \{4\}, \{3\}) = \max\{s(6; \{2,4\}, \{3\}), s(6; \{4\}, \{2,3\})\} = 2$
- $s(7; \emptyset, \{3,4\}) = \max\{s(6; \{2\}, \{3,4\}), s(6; \emptyset, \{2,3,4\}) = 1$

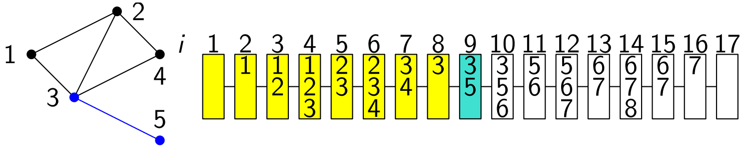


G_8

$X_8 = \{3\}$ 忘却節点

- $s(8; \{3\}, \emptyset) = \max\{s(7; \{3,4\}, \emptyset), s(7; \{3\}, \{4\})\} = 1$
- $s(8; \emptyset, \{3\}) = \max\{s(7; \{4\}, \{3\}), s(7; \emptyset, \{3,4\})\} = 2$

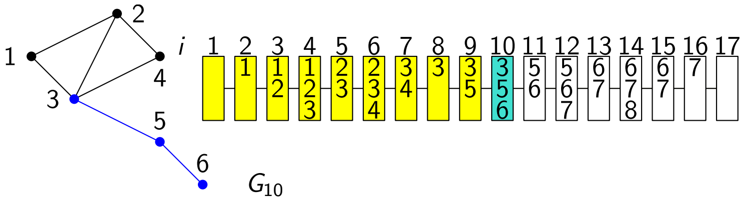
最大独立集合問題：アルゴリズムの動作例 (9)



G_9

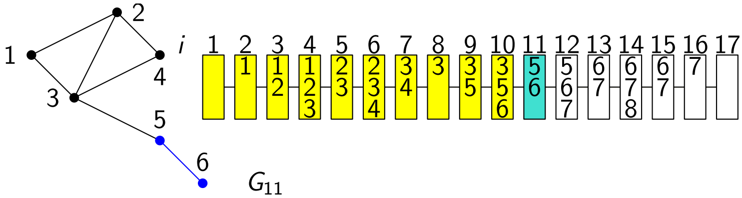
$X_9 = \{3, 5\}$ 導入節点

- $s(9; \{3, 5\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(9; \{3\}, \{5\}) = s(8; \{3\}, \emptyset) = 1$
- $s(9; \{5\}, \{3\}) = s(8; \emptyset, \{3\}) + 1 = 2 + 1 = 3$
- $s(9; \emptyset, \{3, 5\}) = s(8; \emptyset, \{3\}) = 2$



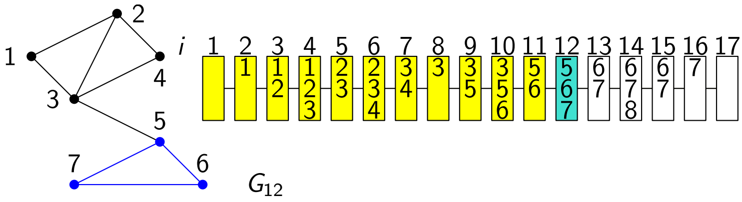
$X_{10} = \{3, 5, 6\}$ 導入節点

- $s(10; \{3, 5, 6\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(10; \{3, 5\}, \{6\}) = -\infty$
- $s(10; \{3, 6\}, \{5\}) = s(9; \{3\}, \{5\}) + 1 = 1 + 1 = 2$
- $s(10; \{5, 6\}, \{3\}) = s(9; \{5\}, \{3\}) + 1 = 3 + 1 = 4$
- $s(10; \{3\}, \{5, 6\}) = s(9; \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(10; \{5\}, \{3, 6\}) = s(9; \{5\}, \{3\}) = 3$
- $s(10; \{6\}, \{3, 5\}) = s(9; \emptyset, \{3, 5\}) + 1 = 2 + 1 = 3$
- $s(10; \{\emptyset\}, \{3, 5, 6\}) = s(9; \emptyset, \{3, 5\}) = 2$



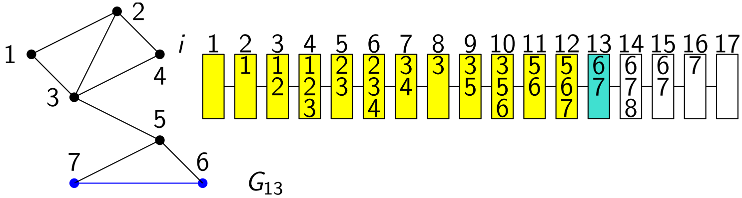
$X_{11} = \{5, 6\}$ 忘却節点

- $s(11; \{5, 6\}, \emptyset) = \max\{s(10; \{3, 5, 6\}, \emptyset), s(10; \{5, 6\}, \{3\})\} = -\infty$
- $s(11; \{5\}, \{6\}) = \max\{s(10; \{3, 5\}, \{6\}), s(10; \{5\}, \{3, 6\})\} = 3$
- $s(11; \{6\}, \{5\}) = \max\{s(10; \{3, 6\}, \{5\}), s(10; \{6\}, \{3, 5\})\} = 3$
- $s(11; \emptyset, \{5, 6\}) = \max\{s(10; \{3\}, \{5, 6\}), s(10; \emptyset, \{3, 5, 6\})\} = 2$



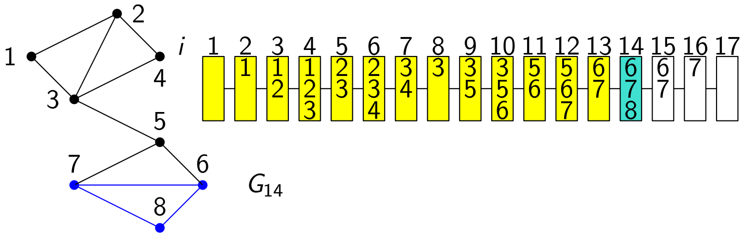
$X_{12} = \{5, 6, 7\}$ 導入節点

- $s(12; \{5, 6, 7\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(12; \{5, 6\}, \{7\}) = -\infty$
- $s(12; \{5, 7\}, \{6\}) = -\infty$
- $s(12; \{6, 7\}, \{5\}) = -\infty$
- $s(12; \{5\}, \{6, 7\}) = s(11; \{5\}, \{6\}) = 3$
- $s(12; \{6\}, \{5, 7\}) = s(11; \{6\}, \{5\}) = 3$
- $s(12; \{7\}, \{5, 6\}) = s(11; \emptyset, \{5, 6\}) + 1 = 2 + 1 = 3$
- $s(12; \emptyset, \{5, 6, 7\}) = s(11; \emptyset, \{5, 6\}) = 2$



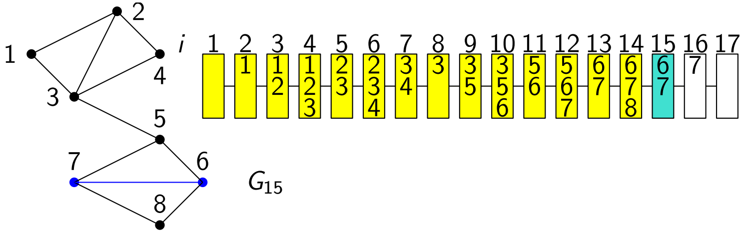
$X_{13} = \{6, 7\}$ 忘却節点

- $s(13; \{6, 7\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(13; \{6\}, \{7\}) = \max\{s(12; \{5, 6\}, \{7\}), s(12; \{6\}, \{5, 7\})\} = 3$
- $s(13; \{7\}, \{6\}) = \max\{s(12; \{5, 7\}, \{6\}), s(12; \{7\}, \{5, 6\})\} = 3$
- $s(13; \emptyset, \{6, 7\}) = \max\{s(12; \{5\}, \{6, 7\}), s(12; \emptyset, \{5, 6, 7\})\} = 3$



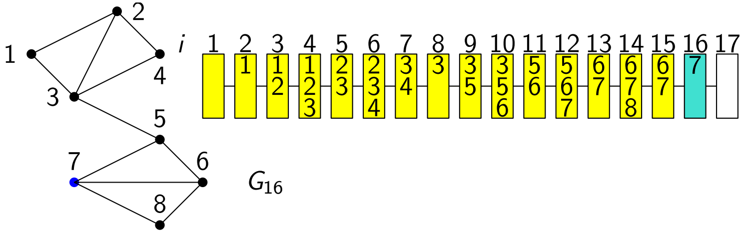
$X_{14} = \{6, 7, 8\}$ 導入節点

- $s(14; \{6, 7, 8\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(14; \{6, 7\}, \{8\}) = -\infty$
- $s(14; \{6, 8\}, \{7\}) = -\infty$
- $s(14; \{7, 8\}, \{6\}) = -\infty$
- $s(14; \{6\}, \{7, 8\}) = s(13; \{6\}, \{7\}) = 3$
- $s(14; \{7\}, \{6, 8\}) = s(13; \{7\}, \{6\}) = 3$
- $s(14; \{8\}, \{6, 7\}) = s(13; \emptyset, \{6, 7\}) + 1 = 3 + 1 = 4$
- $s(14; \emptyset, \{6, 7, 8\}) = s(13; \emptyset, \{6, 7\}) = 3$



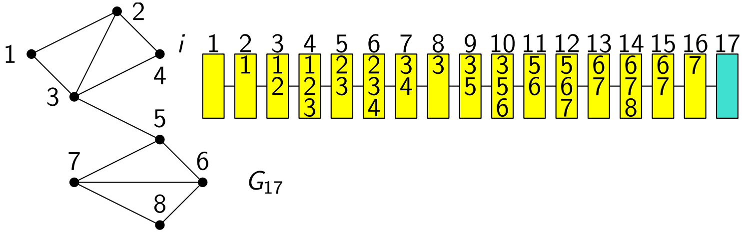
$X_{15} = \{6, 7\}$ 忘却節点

- $s(15; \{6, 7\}, \emptyset) = -\infty$
- $s(15; \{6\}, \{7\}) = \max\{s(14; \{6, 8\}, \{7\}), s(14; \{6\}, \{7, 8\})\} = 3$
- $s(15; \{7\}, \{6\}) = \max\{s(14; \{7, 8\}, \{6\}), s(14; \{7\}, \{6, 8\})\} = 3$
- $s(15; \emptyset, \{6, 7\}) = \max\{s(14; \{8\}, \{6, 7\}), s(14; \emptyset, \{6, 7, 8\})\} = 4$



$X_{16} = \{7\}$ 忘却節点

- $s(16; \{7\}, \emptyset) = \max\{s(15; \{6,7\}, \emptyset), s(15; \{7\}, \{6\})\} = 3$
- $s(16; \emptyset, \{7\}) = \max\{s(15; \{6\}, \{7\}), s(15; \emptyset, \{6,7\})\} = 4$



$X_{17} = \emptyset$ 忘却節点

- $s(17; \emptyset, \emptyset) = \max\{s(16; \{7\}, \emptyset), s(16; \emptyset, \{7\}\} = 4$

$\rightsquigarrow$ アルゴリズムの出力値 $= 4$

X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

$$s(i; A_i, B_i) = \begin{cases} -\infty & (A_i \text{ に隣接 2 頂点が存在}) \\ s(i-1; A_i - \{v\}, B_i) + 1 & (A_i \text{ に隣接 2 頂点が非存在,} \\ & \text{かつ}, v \in A_i) \\ s(i-1; A_i, B_i - \{v\}) & (A_i \text{ に隣接 2 頂点が非存在,} \\ & \text{かつ}, v \in B_i) \end{cases}$$

X_i が忘却節点の場合 (ある $w \in X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} - \{w\}$)

$$s(i; A_i, B_i) = \max\{s(i-1; A_i \cup \{w\}, B_i), s(i-1; A_i, B_i \cup \{w\})\}$$

素敵な道分解上の動的計画法アルゴリズムの設計

導入節点と忘却節点で何をするか，記述すればよい

- 素敵な道分解の各節点 X_i において $s(i; A_i, B_i)$ を計算する
- 候補となる (A_i, B_i) の総数 $= 2^{|X_i|} \leq 2^{p+1} = O(2^p)$ (p は道幅)
- 全体の計算量は

$$O(2^p r) \cdot (\text{再帰式の計算にかかる時間})$$

- 導入節点の場合：1 つの $s(i; A_i, B_i)$ の計算にかかる時間 $\leq O(p)$
- 忘却節点の場合：1 つの $s(i; A_i, B_i)$ の計算にかかる時間 $\leq O(1)$

$r = O(|V|)$ なので，まとめると，全体の計算量は $O(2^p p|V|)$

まとめ

無向グラフ $G = (V, E)$ の最大独立集合の要素数は，
G の素敵な道分解 $\mathcal{P}$ が与えられていれば，
$O(2^p p|V|)$ 時間で計算できる ($p = \mathtt{pw}(\mathcal{P})$)

固定パラメータ・アルゴリズム (fixed-parameter algorithm)

あるパラメータ k に対して，
計算量が $O(f(k)\mathtt{poly}(n))$ と書けるアルゴリズムのこと
($f(\cdot)$ は任意の関数，n は問題のサイズ)

例えば，

計算量	固定パラメータ・アルゴリズム??
$O(2^k kn)$	である
$O(n^{k+1})$	ではない

帰結

無向グラフ G の最大独立集合の要素数を計算する先のアルゴリズムは
G の道幅をパラメータとしたとき，固定パラメータ・アルゴリズム

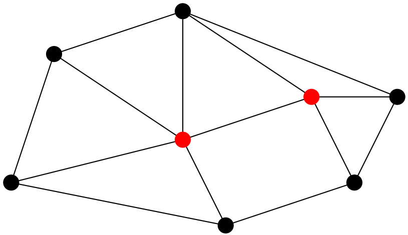
目次

1. 木分解と道分解 (復習)
2. 最大独立集合
3. 最小支配集合問題
4. 今日のまとめ と 次回の予告

$G = (V, E)$ 無向グラフ

支配集合とは？

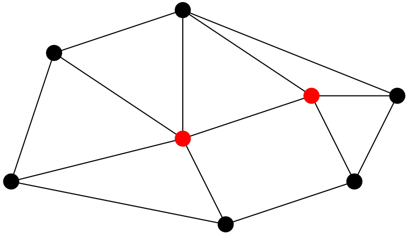
G の支配集合 (dominating set) とは，頂点部分集合 $D \subseteq V$ で，
$V - D$ のどの頂点も D のある頂点に隣接するもの



- つまり，$V - D \subseteq N_G(D)$
  $(N_G(D) = \{v \in V \mid \exists\, u \in D\ (\{u, v\} \in E)\})$
- D の頂点 v は，v と v の隣接頂点を支配する，という

最小支配集合問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の最小支配集合 (の要素数)



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

目標

素敵な道分解を使って，最小支配集合問題を効率的に解く

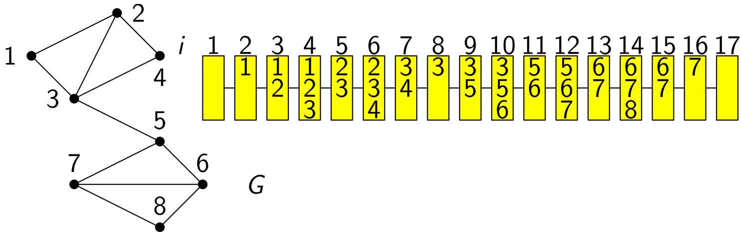
設定

- 無向グラフ $G = (V, E)$
- G の 素敵 な道分解 $\mathcal{P}$
- $\mathcal{P}$ の節点を端から順に $X_1, X_2, \ldots, X_r$
- $p = \mathrm{pw}(\mathcal{P})$ ($\mathcal{P}$ の幅)

また，再帰式を導出したい

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- $G_i = G[X_1 \cup \cdots \cup X_i]$
- $s(i) = G_i$ の最小支配集合の要素数



求めたいもの：$s(r) = G_r$ の最小支配集合の要素数
$= G$ の最小支配集合の要素数

各 $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して ($r = \mathcal{P}$ の節点数)

- A_i, B_i, C_i が次を満たすとする

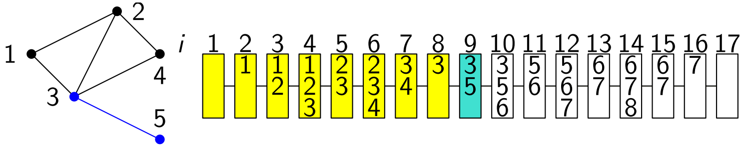
$$A_i \cup B_i \cup C_i = X_i, \quad A_i, B_i, C_i \text{ は互いに素}$$

- $s(i; A_i, B_i, C_i)$ を次のように定義

$$s(i; A_i, B_i, C_i) = \min \left\{ |S_i| \;\middle|\; \begin{array}{l} S_i \subseteq X_1 \cup \cdots \cup X_i, \\ S_i \text{ は } G_i - C_i \text{ の頂点を支配する}, \\ A_i \subseteq S_i, B_i \cap S_i = \emptyset, \\ S_i \text{ は } C_i \text{ の頂点を支配しない} \end{array} \right\}$$

- つまり，$s(i; A_i, B_i, C_i)$ は $G_i - C_i$ の支配集合の中で，
  A_i の頂点をすべて含み，B_i の頂点をどれも含まず，
  C_i を支配しないものの 最小要素数

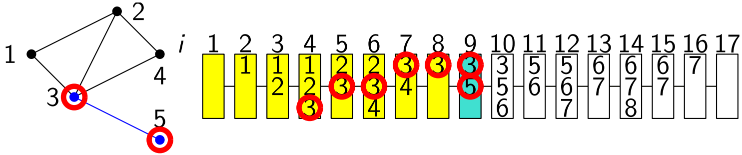
このとき，$s(i) = \max \{ s(i; A_i, B_i, \emptyset) \mid A_i \cup B_i = X_i, A_i \cap B_i = \emptyset \}$



G_9

$X_9 = \{3, 5\}$

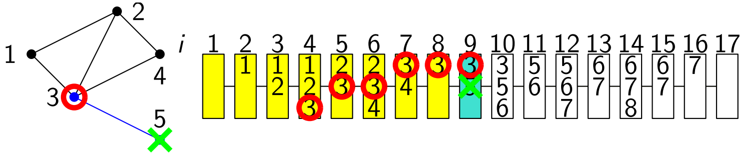
- $s(9; \{3, 5\}, \emptyset, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{3\}, \{5\}, \emptyset) = 1$
- $s(9; \{3\}, \emptyset, \{5\}) = \infty$
- $s(9; \{5\}, \{3\}, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{5\}, \emptyset, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3, 5\}, \emptyset) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \emptyset, \{5\}, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \emptyset, \{3, 5\}) = \infty$



G_9

$X_9 = \{3, 5\}$

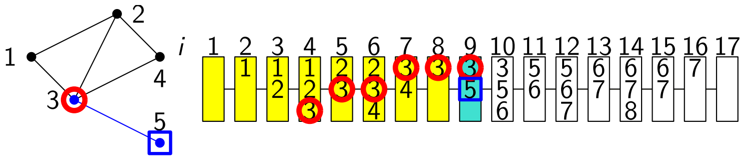
- $s(9; {\color{red}\{3,5\}}, {\color{green}\emptyset}, {\color{blue}\emptyset}) = 2$
- $s(9; {\color{red}\{3\}}, {\color{green}\{5\}}, {\color{blue}\emptyset}) = 1$
- $s(9; {\color{red}\{3\}}, {\color{green}\emptyset}, {\color{blue}\{5\}}) = \infty$
- $s(9; {\color{red}\{5\}}, {\color{green}\{3\}}, {\color{blue}\emptyset}) = 2$
- $s(9; {\color{red}\{5\}}, {\color{green}\emptyset}, {\color{blue}\{3\}}) = \infty$
- $s(9; {\color{red}\emptyset}, {\color{green}\{3,5\}}, {\color{blue}\emptyset}) = \infty$
- $s(9; {\color{red}\emptyset}, {\color{green}\{3\}}, {\color{blue}\{5\}}) = 1$
- $s(9; {\color{red}\emptyset}, {\color{green}\{5\}}, {\color{blue}\{3\}}) = \infty$
- $s(9; {\color{red}\emptyset}, {\color{green}\emptyset}, {\color{blue}\{3,5\}}) = \infty$



G_9

$X_9 = \{3, 5\}$

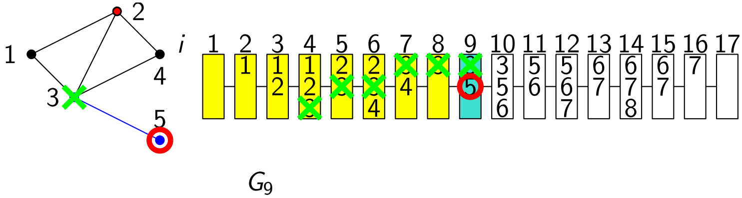
- $s(9; \{3, 5\}, \emptyset, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{3\}, \{5\}, \emptyset) = 1$
- $s(9; \{3\}, \emptyset, \{5\}) = \infty$
- $s(9; \{5\}, \{3\}, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{5\}, \emptyset, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3, 5\}, \emptyset) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \emptyset, \{5\}, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \emptyset, \{3, 5\}) = \infty$



G_9

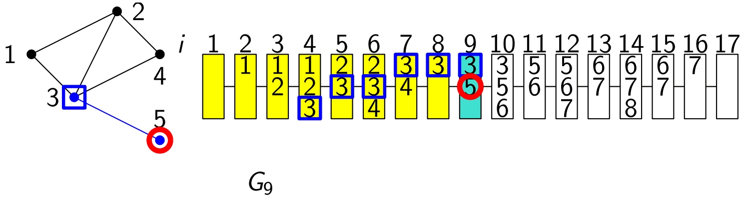
$X_9 = \{3, 5\}$

- $s(9; \{3, 5\}, \emptyset, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{3\}, \{5\}, \emptyset) = 1$
- $s(9; \{3\}, \emptyset, \{5\}) = \infty$
- $s(9; \{5\}, \{3\}, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{5\}, \emptyset, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3, 5\}, \emptyset) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \emptyset, \{5\}, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \emptyset, \{3, 5\}) = \infty$



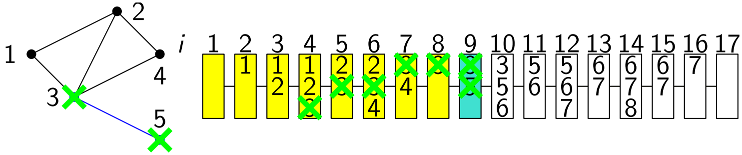
$X_9 = \{3, 5\}$

- $s(9; \{3,5\}, \emptyset, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{3\}, \{5\}, \emptyset) = 1$
- $s(9; \{3\}, \emptyset, \{5\}) = \infty$
- $s(9; \{5\}, \{3\}, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{5\}, \emptyset, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3,5\}, \emptyset) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \emptyset, \{5\}, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \emptyset, \{3,5\}) = \infty$



$X_9 = \{3, 5\}$

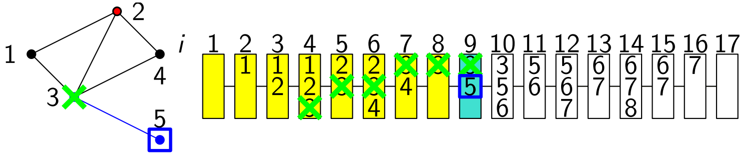
- $s(9; \{3,5\}, \emptyset, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{3\}, \{5\}, \emptyset) = 1$
- $s(9; \{3\}, \emptyset, \{5\}) = \infty$
- $s(9; \{5\}, \{3\}, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{5\}, \emptyset, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3,5\}, \emptyset) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \emptyset, \{5\}, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \emptyset, \{3,5\}) = \infty$



G_9

$X_9 = \{3, 5\}$

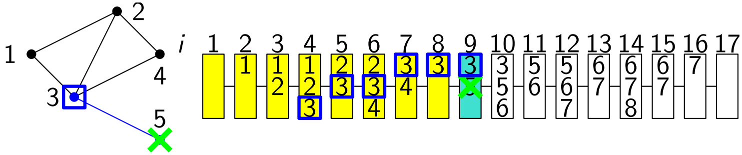
- $s(9; \{3,5\}, \emptyset, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{3\}, \{5\}, \emptyset) = 1$
- $s(9; \{3\}, \emptyset, \{5\}) = \infty$
- $s(9; \{5\}, \{3\}, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{5\}, \emptyset, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3,5\}, \emptyset) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \emptyset, \{5\}, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \emptyset, \{3,5\}) = \infty$



G_9

$X_9 = \{3, 5\}$

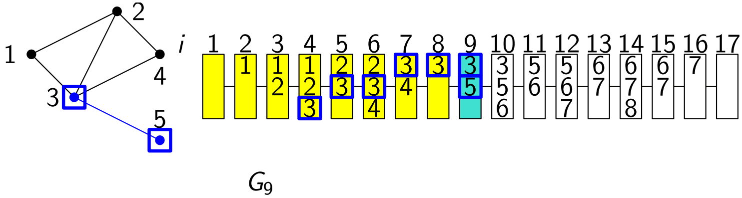
- $s(9; \{3,5\}, \emptyset, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{3\}, \{5\}, \emptyset) = 1$
- $s(9; \{3\}, \emptyset, \{5\}) = \infty$
- $s(9; \{5\}, \{3\}, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{5\}, \emptyset, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3,5\}, \emptyset) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \emptyset, \{5\}, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \emptyset, \{3,5\}) = \infty$



G_9

$X_9 = \{3, 5\}$

- $s(9; \{3,5\}, \emptyset, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{3\}, \{5\}, \emptyset) = 1$
- $s(9; \{3\}, \emptyset, \{5\}) = \infty$
- $s(9; \{5\}, \{3\}, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{5\}, \emptyset, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3,5\}, \emptyset) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \emptyset, \{5\}, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \emptyset, \{3,5\}) = \infty$

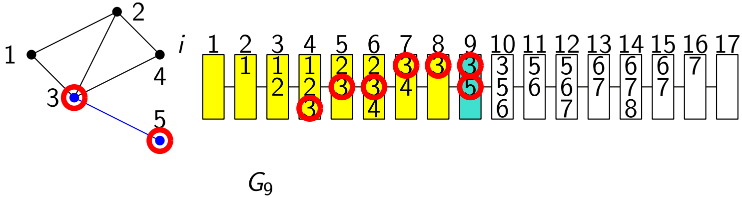


$X_9 = \{3, 5\}$

- $s(9; \{3, 5\}, \emptyset, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{3\}, \{5\}, \emptyset) = 1$
- $s(9; \{3\}, \emptyset, \{5\}) = \infty$
- $s(9; \{5\}, \{3\}, \emptyset) = 2$
- $s(9; \{5\}, \emptyset, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3, 5\}, \emptyset) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \{3\}, \{5\}) = 1$
- $s(9; \emptyset, \{5\}, \{3\}) = \infty$
- $s(9; \emptyset, \emptyset, \{3, 5\}) = \infty$

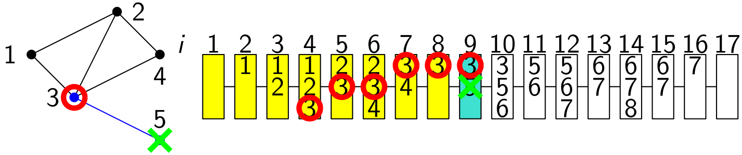
X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

- A_i, B_i が $A_i \cup B_i \cup C_i = X_i$，かつ互いに素であるとする
- S_i は $G_i - C_i$ の支配集合で，
  A_i の頂点をすべて含み，B_i の頂点をどれも含まず，
  C_i の頂点を支配しないとする　　(条件 $*$)
- $v \in A_i$, $v \in B_i$, $v \in C_i$ の場合で分ける



X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

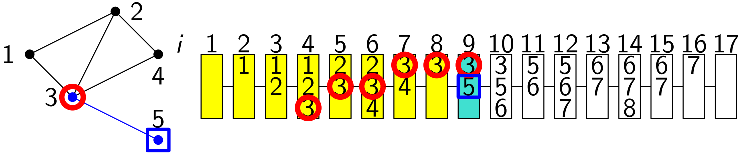
- A_i, B_i が $A_i \cup B_i \cup C_i = X_i$，かつ互いに素であるとする
- S_i は $G_i - C_i$ の支配集合で，
  A_i の頂点をすべて含み，B_i の頂点をどれも含まず，
  C_i の頂点を支配しないとする (条件 $*$)
- $v \in A_i$, $v \in B_i$, $v \in C_i$ の場合で分ける



G_9

X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

- A_i, B_i が $A_i \cup B_i \cup C_i = X_i$，かつ互いに素であるとする
- S_i は $G_i - C_i$ の支配集合で，
  A_i の頂点をすべて含み，B_i の頂点をどれも含まず，
  C_i の頂点を支配しないとする (条件 $*$)
- $v \in A_i$, $v \in B_i$, $v \in C_i$ の場合で分ける



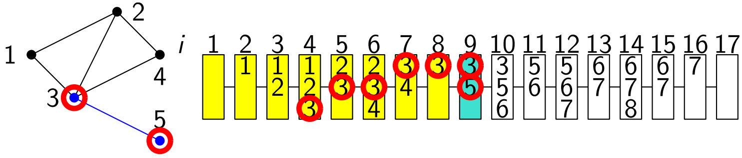
G_9

X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

- $v \in A_i$ のとき，

$$D_i = \left(N_{G_i}(v) - \bigcup_{w \in A_i - \{v\}} N_{G_i}(w) \right) \cap B_i$$

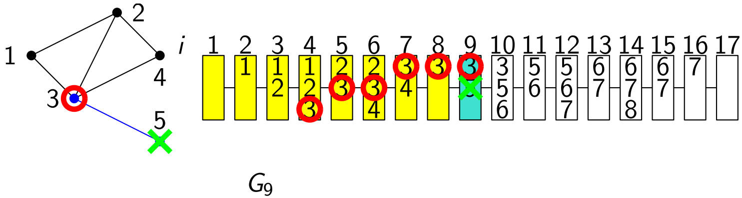
とおいて，
$A_{i-1} = A_i - \{v\}$, $B_{i-1} = B_i - D_i$, $C_{i-1} = C_i \cup D_i$ とすると
$S_i - \{v\}$ は $G_{i-1} - C_{i-1}$ の支配集合で，
A_{i-1} の頂点をすべて含み，B_{i-1} の頂点をどれも含まず，
C_{i-1} の頂点を支配しない



G_9

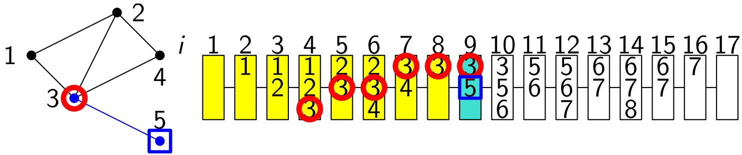
X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

- $v \in B_i$ のとき，$v \in N_{G_i}(A_i)$ ならば，
  $A_{i-1} = A_i$, $B_{i-1} = B_i - \{v\}$, $C_{i-1} = C_i$ とすると，
  S_i は $G_{i-1} - C_{i-1}$ の支配集合で，
  A_{i-1} の頂点をすべて含み，B_{i-1} の頂点をどれも含まず，
  C_{i-1} の頂点を支配しない
- $v \in B_i$ のとき，$v \notin N_{G_i}(A_i)$ ならば，
  S_i が条件 $*$ を満たすことに矛盾



X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

- $v \in C_i$ のとき，$v \notin N_{G_i}(A_i)$ ならば，
  $A_{i-1} = A_i$, $B_{i-1} = B_i$, $C_{i-1} = C_i - \{v\}$ とすると，
  S_i は $G_{i-1} - C_{i-1}$ の支配集合で，
  A_{i-1} の頂点をすべて含み，B_{i-1} の頂点をどれも含まず，
  C_{i-1} の頂点を支配しない
- $v \in C_i$ のとき，$v \in N_{G_i}(A_i)$ ならば，
  S_i が条件 $*$ を満たすことに矛盾



G_9

X_i が導入節点の場合 (ある $v \notin X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$)

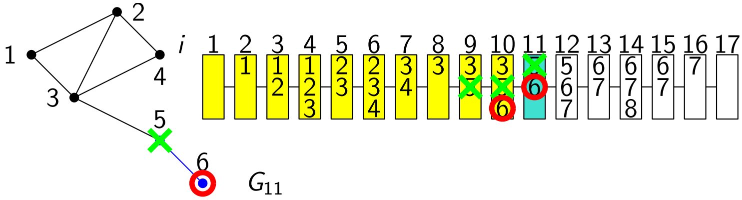
$s(i; A_i, B_i, C_i)$

$$= \begin{cases} s(i-1; A_i - \{v\}, B_i - D_i, C_i \cup D_i) + 1 & (v \in A_i) \\ s(i-1; A_i, B_i - \{v\}, C_i) & (v \in B_i, v \in N_{G_i}(A_i)) \\ \infty & (v \in B_i, v \notin N_{G_i}(A_i)) \\ s(i-1; A_i, B_i, C_i - \{v\}) & (v \in C_i, v \notin N_{G_i}(A_i)) \\ \infty & (v \in C_i, v \in N_{G_i}(A_i)) \end{cases}$$

ただし，$D_i = \left(N_{G_i}(v) - \bigcup_{w \in A_i - \{v\}} N_{G_i}(w) \right) \cap B_i$

X_i が忘却節点の場合 (ある $w \in X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} - \{w\}$)

- A_i, B_i が $A_i \cup B_i \cup C_i = X_i$，かつ互いに素であるとする
- S_i は $G_i - C_i$ の支配集合で，
  A_i の頂点をすべて含み，B_i の頂点をどれも含まず，
  C_i の頂点を支配しないとする
- $w \in C_{i-1}$ だと問題がある (なぜ？)



最小支配集合問題：忘却節点の場合 — 再帰式

X_i が忘却節点の場合 (ある $w \in X_{i-1}$ が存在して，$X_i = X_{i-1} - \{w\}$)

$$s(i; A_i, B_i, C_i) = \min \left\{ \begin{array}{l} s(i-1; A_i \cup \{w\}, B_i, C_i), \\ s(i-1; A_i, B_i \cup \{w\}, C_i) \end{array} \right\}$$

これでアルゴリズムが完成した！

まとめ

無向グラフ $G = (V, E)$ の最小支配集合の要素数は，
G の素敵な道分解 $\mathcal{P}$ が与えられていれば，
$O(3^p p|V|)$ 時間で計算できる $(p = \mathrm{pw}(\mathcal{P}))$

目次

1 木分解と道分解 (復習)

2 最大独立集合

3 最小支配集合問題

4 今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

道分解を用いた効率的アルゴリズムが設計できるようになる

- 最大独立集合問題
- 最小支配集合問題

次回以降の予告

道分解に対するアルゴリズムを木分解に対するアルゴリズムに拡張する

次回の予告

木分解の性質を深く理解する

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次

1 木分解と道分解 (復習)

2 最大独立集合

3 最小支配集合問題

4 今日のまとめ と 次回の予告