離散最適化基礎論 第 3 回
道幅と道分解

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 10 月 28 日

最終更新：2016 年 10 月 28 日　17:55

スケジュール 前半 (予定)

1. 離散最適化における木分解の役割 (10/7)
- ⋆ 休講 (国内出張) (10/14)
2. 木に対するアルゴリズム設計 (10/23)
3. 道幅と道分解 (10/30)
4. 道分解を用いたアルゴリズム設計 (11/4)
- ⋆ 休講 (海外出張) (11/11)
5. 木分解と木幅 (11/18)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/25)
6. 木幅の性質 (12/2)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 木分解を用いたアルゴリズム設計：頂点集合の選択・分割 (12/9)
8. 木分解を用いたアルゴリズム設計：辺集合の選択・分割 (12/16)
- ⋆ 休講 (天皇誕生日) (12/23)
- ⋆ 冬季休業 (12/30)

9. 木幅と論理：単項二階論理 (1/6)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/13)

10. 木幅と論理：オートマトン (1/20)
11. 木幅と論理：アルゴリズム設計 (1/27)
12. 木分解構成アルゴリズム：準備 (2/3)
13. 木分解構成アルゴリズム (2/10)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

概要

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして
グラフの木分解を取り上げ,

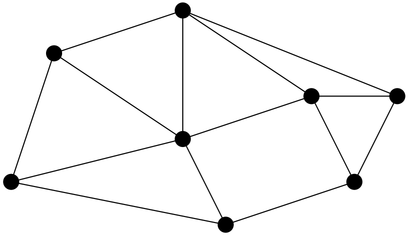
- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

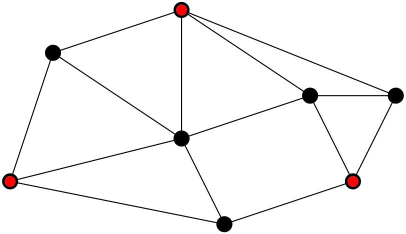
- 「離散最適化の神髄」だから

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



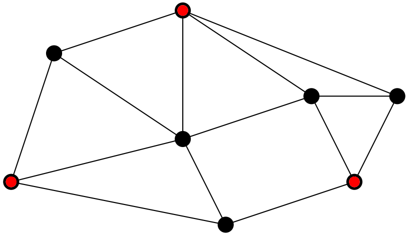
これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ

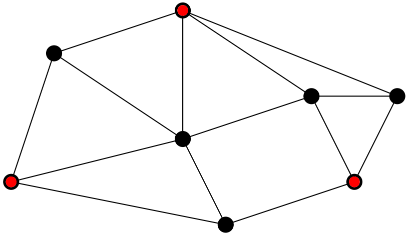


これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

事実

グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

事実

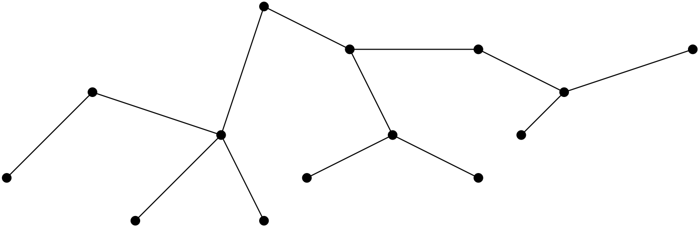
グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

直感？

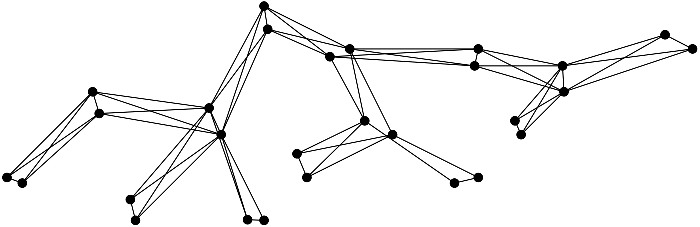
グラフが木に 近ければ，簡単に解けそう？

木に近い，とは？

これは木

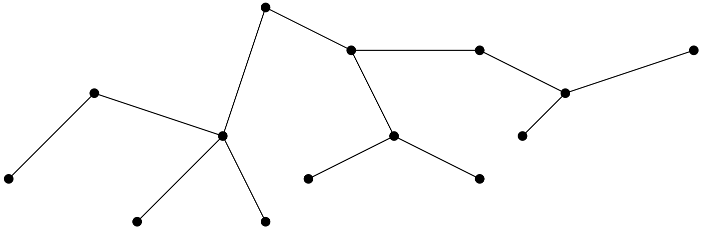


これは木に近い？

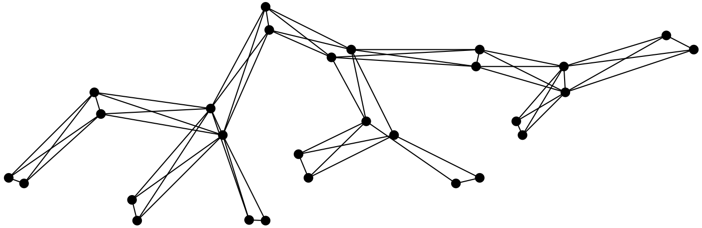


木に近い，とは？

これは木



これは木に近い？ $\rightsquigarrow$ 「木っぽさ」を表す尺度を考える必要あり



この講義のキーワード (と荒っぽい説明)

グラフの木幅	グラフの「木っぽさ」を表す尺度 (の 1 つ)
グラフの木分解	グラフを「木っぽく」表した構造
動的計画法	木分解上の効率的アルゴリズム
オートマトン	動的計画法に基づくアルゴリズムの解釈
Courcelle の定理	上記と論理学に基づく『メタアルゴリズム』

次の主題が有機的に結びつく面白い話題

- グラフ
- アルゴリズム
- オートマトン
- 論理 (特に，有限モデル理論)

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

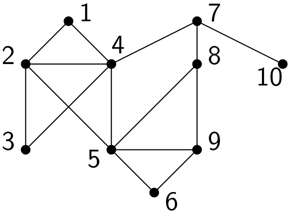
今日の目標

道幅と道分解の性質を理解する

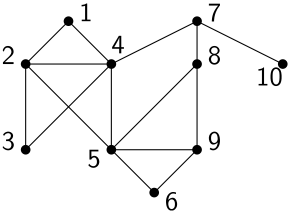
- 道幅，道分解
- 特殊なグラフの道幅
- 素敵な道分解

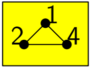
目次

グラフの「木っぽさ」を表現

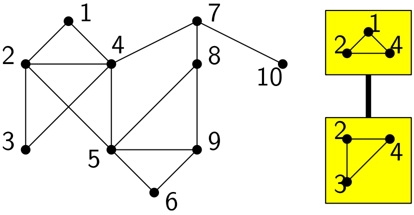


グラフの「木っぽさ」を表現

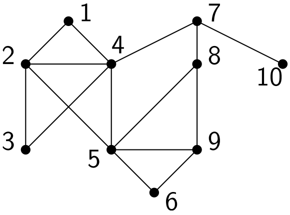


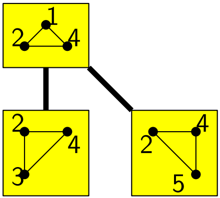


グラフの「木っぽさ」を表現

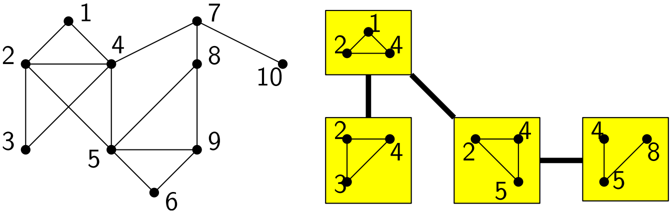


グラフの「木っぽさ」を表現

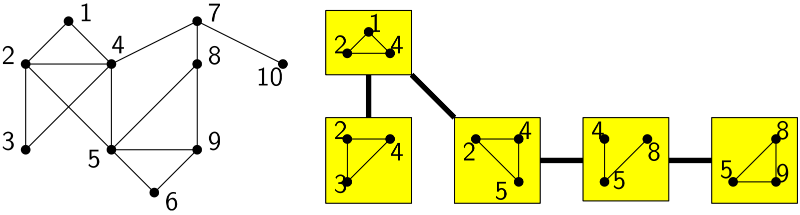




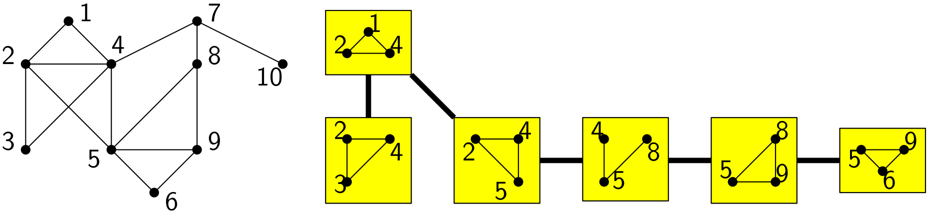
グラフの「木っぽさ」を表現



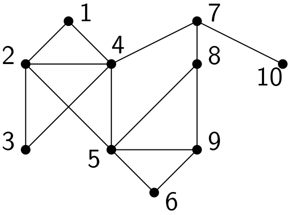
グラフの「木っぽさ」を表現

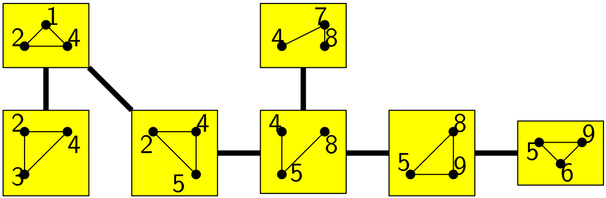


グラフの「木っぽさ」を表現



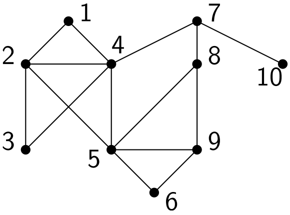
グラフの「木っぽさ」を表現

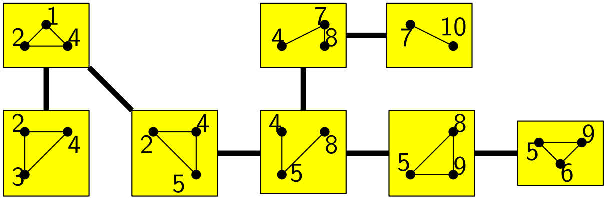




グラフの木分解：気分

グラフの「木っぽさ」を表現





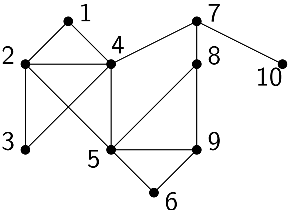
木分解 (tree decomposition) とは？

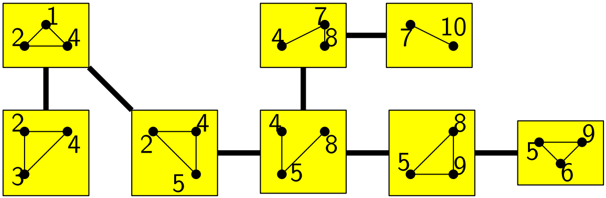
無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは
$\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する





木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

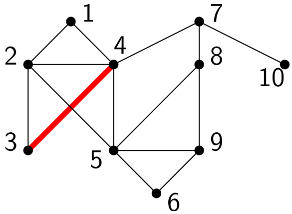
木分解 (tree decomposition) とは？

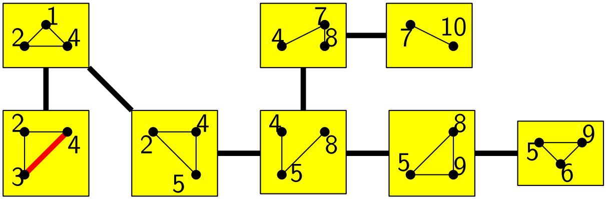
無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは $\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する





木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

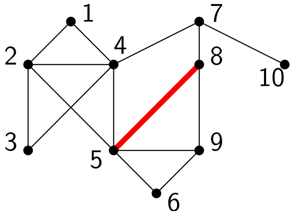
木分解 (tree decomposition) とは？

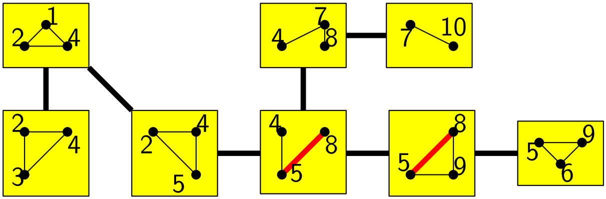
無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは $\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する





木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

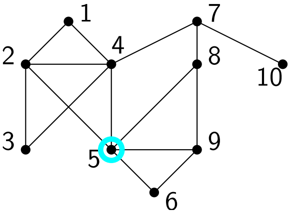
木分解 (tree decomposition) とは？

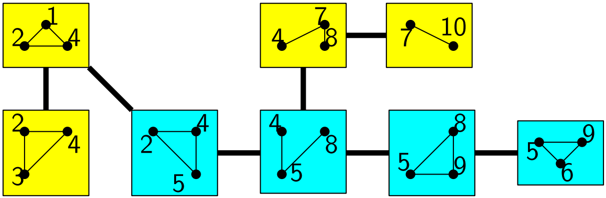
無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは $\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する





木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

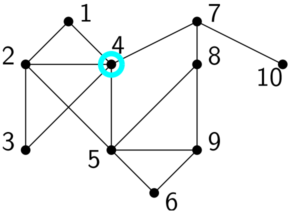
木分解 (tree decomposition) とは？

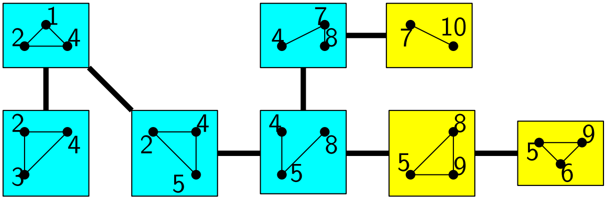
無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは
$\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する





木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

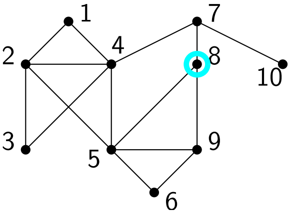
木分解 (tree decomposition) とは？

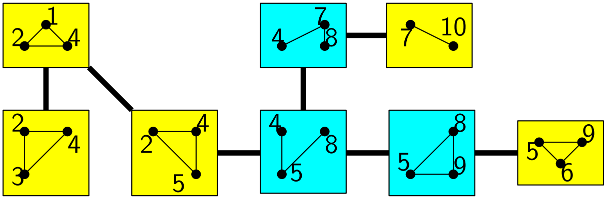
無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

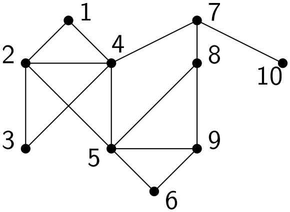
(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは $\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する

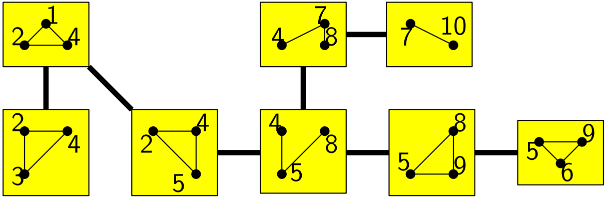




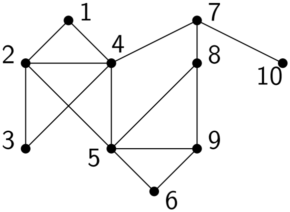
木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

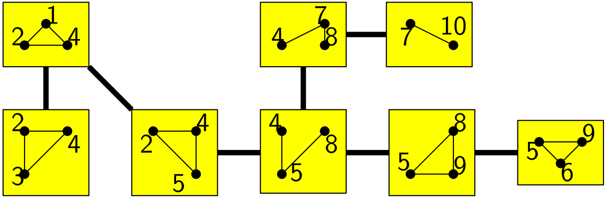
グラフの木分解：例

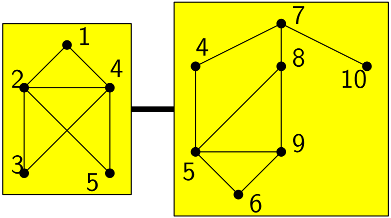


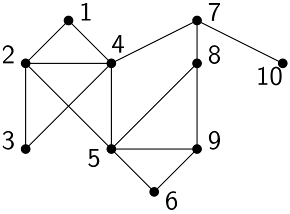


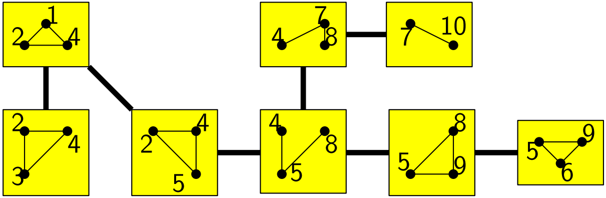
グラフの木分解：例

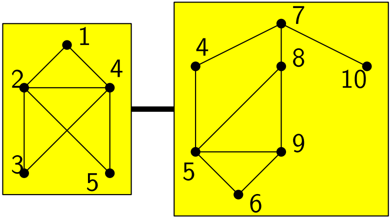


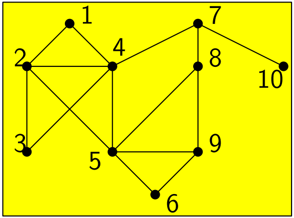





1
7
2
4
8
10
3
9
5
6


2 1 4
4 7 8
7 10
2 4 3
2 4 5
4 8 5
8 5 9
5 9 6


1
2
4
3
5
7
4
8
10
9
5
6


1
7
2
4
8
10
3
9
5
6

グラフの木幅

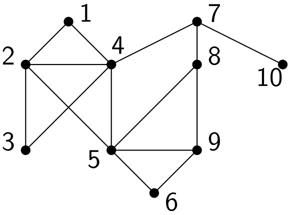
グラフの木幅とは？

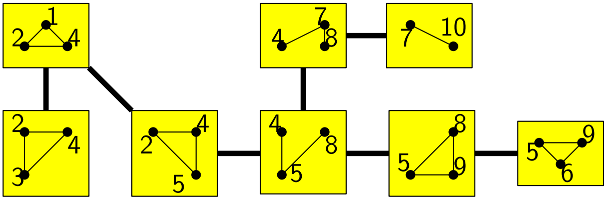
- 無向グラフ G の木分解 $\mathcal{T}$ の**幅** (width)

$$\mathtt{tw}(\mathcal{T}) = \max\{|S| - 1 \mid S \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点}\}$$

- 無向グラフ G の**木幅** (treewidth)

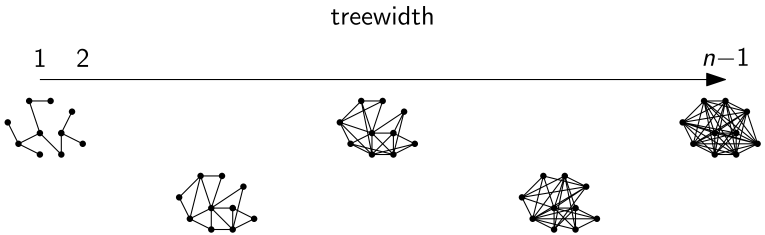
$$\mathtt{tw}(G) = \min\{\mathtt{tw}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \text{ は } G \text{ の木分解}\}$$





$\mathtt{tw}(G) = 2$

直感：木幅は「木っぽさ」を表す尺度



木は木に近い

完全グラフは木から遠い

なぜ木幅を考えるとうれしいのか？

ご利益 1

木幅が小さいと，効率よく解ける問題がたくさんある

ご利益 2

現実世界から生じるグラフにも，木幅が小さいものがたくさんある

なぜ木幅を考えるとうれしいのか？

ご利益 1

木幅が小さいと，効率よく解ける問題がたくさんある

$\rightsquigarrow$ 効率よいアルゴリズムを設計しないといけない

ご利益 2

現実世界から生じるグラフにも，木幅が小さいものがたくさんある

なぜ木幅を考えるとうれしいのか？

ご利益 1

木幅が小さいと，効率よく解ける問題がたくさんある

$\rightsquigarrow$ 効率よいアルゴリズムを設計しないといけない

ご利益 2

現実世界から生じるグラフにも，木幅が小さいものがたくさんある

$\rightsquigarrow$ 本当にそうか，確認する必要がある (第 1 回講義)

目次

道分解 (path decomposition) とは？

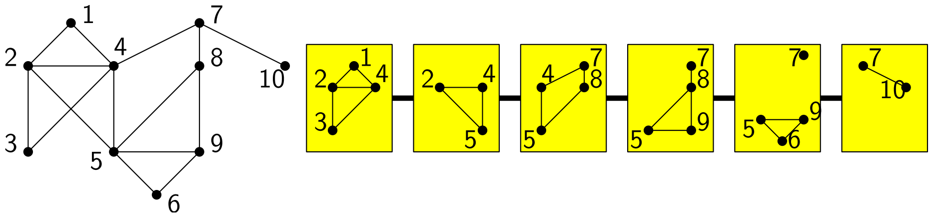
無向グラフ $G = (V, E)$ の**道分解**とは道 $\mathcal{P}$ で，

(T1) $\mathcal{P}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{P}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{P}$ の節点で v を含むものは $\mathcal{P}$ の (連結で非空な) 部分道を誘導する

つまり，道分解とは，道であるような木分解のこと



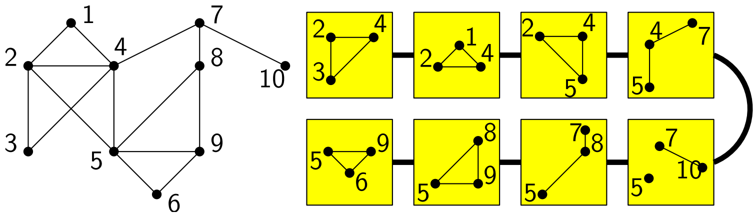
グラフの道幅とは？

- 無向グラフ G の道分解 $\mathcal{P}$ の幅 (width)

$$\mathtt{pw}(\mathcal{P}) = \max\{|S| - 1 \mid S \text{ は } \mathcal{P} \text{ の節点}\}$$

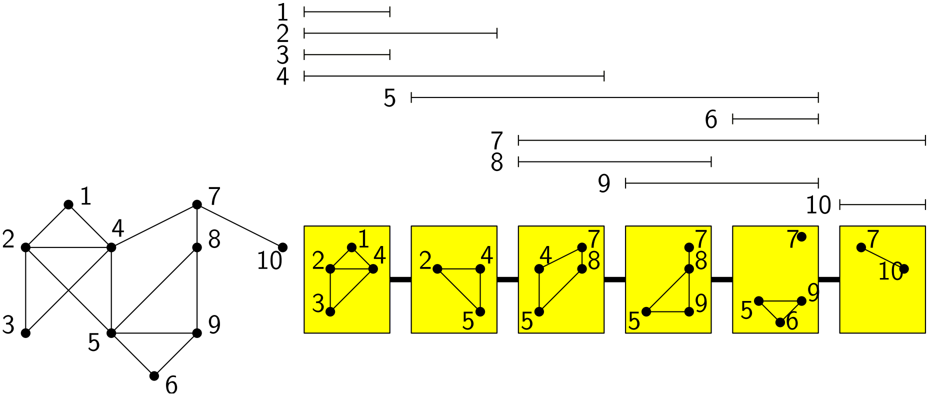
- 無向グラフ G の道幅 (pathwidth)

$$\mathtt{pw}(G) = \min\{\mathtt{pw}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ は } G \text{ の道分解}\}$$



$\mathtt{pw}(G) = 2$

道分解の見方

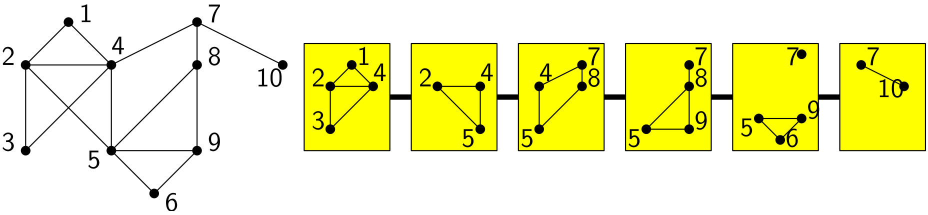


無向グラフ $G = (V, E)$，G の道分解 $\mathcal{P}$，
$\mathcal{P}$ の節点を端から並べて，$X_1, X_2, \ldots, X_r$

道分解の性質：分離

任意の $j \in \{2, \ldots, r-1\}$ に対して，

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} X_i\right) - X_j \text{ の頂点と } \left(\bigcup_{i=j+1}^{r} X_i\right) - X_j \text{ の頂点を結ぶ } G \text{ の辺はない}$$



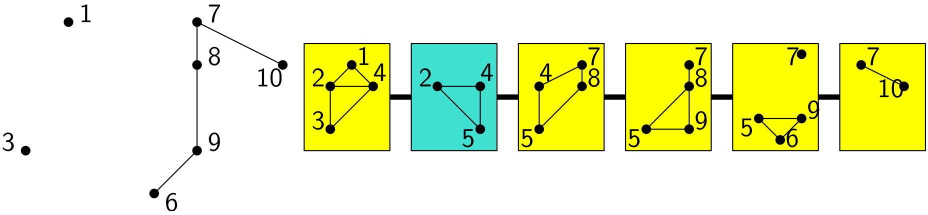
道分解の性質

無向グラフ $G = (V, E)$，G の道分解 $\mathcal{P}$，
$\mathcal{P}$ の節点を端から並べて，$X_1, X_2, \ldots, X_r$

道分解の性質：分離

任意の $j \in \{2, \ldots, r-1\}$ に対して，

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} X_i\right) - X_j \text{ の頂点と } \left(\bigcup_{i=j+1}^{r} X_i\right) - X_j \text{ の頂点を結ぶ } G \text{ の辺はない}$$

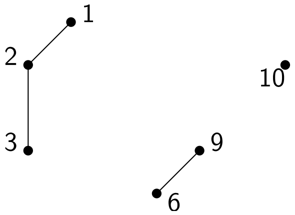


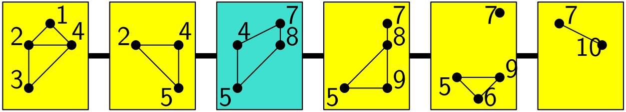
無向グラフ $G = (V, E)$，G の道分解 $\mathcal{P}$，
$\mathcal{P}$ の節点を端から並べて，$X_1, X_2, \ldots, X_r$

道分解の性質：分離

任意の $j \in \{2, \ldots, r-1\}$ に対して，

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} X_i\right) - X_j \text{ の頂点と } \left(\bigcup_{i=j+1}^{r} X_i\right) - X_j \text{ の頂点を結ぶ } G \text{ の辺はない}$$



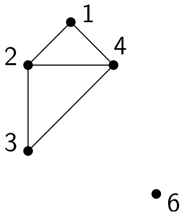


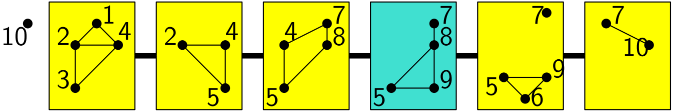
無向グラフ $G = (V, E)$，G の道分解 $\mathcal{P}$,
$\mathcal{P}$ の節点を端から並べて，$X_1, X_2, \ldots, X_r$

道分解の性質：分離

任意の $j \in \{2, \ldots, r-1\}$ に対して，

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} X_i\right) - X_j \text{ の頂点と } \left(\bigcup_{i=j+1}^{r} X_i\right) - X_j \text{ を結ぶ } G \text{ の辺はない}$$



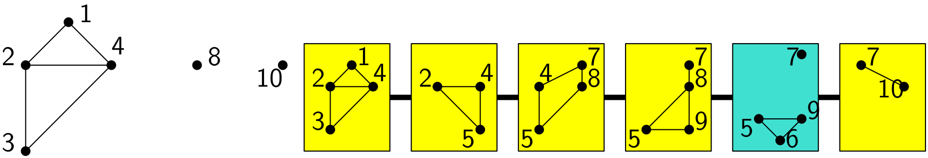


無向グラフ $G = (V, E)$，G の道分解 $\mathcal{P}$，
$\mathcal{P}$ の節点を端から並べて，$X_1, X_2, \ldots, X_r$

道分解の性質：分離

任意の $j \in \{2, \ldots, r-1\}$ に対して，

$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} X_i\right) - X_j$ の頂点と $\left(\bigcup_{i=j+1}^{r} X_i\right) - X_j$ の頂点を結ぶ G の辺はない



無向グラフ $G = (V, E)$，G の道分解 $\mathcal{P}$，
$\mathcal{P}$ の節点を端から並べて，$X_1, X_2, \ldots, X_r$

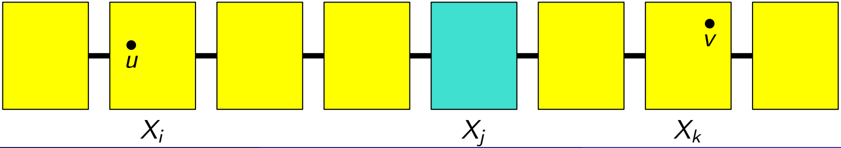
道分解の性質：分離

任意の $j \in \{2, \ldots, r-1\}$ に対して，

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} X_i\right) - X_j \text{ の頂点と } \left(\bigcup_{i=j+1}^{r} X_i\right) - X_j \text{ の頂点を結ぶ } G \text{ の辺はない}$$

証明 (背理法)：そのような辺 $\{u, v\} \in E$ があると仮定

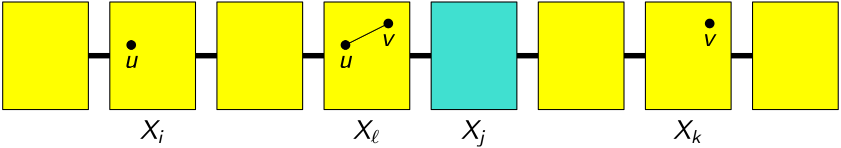
- ある $i < j$ に対して $u \in X_i - X_j$，かつ，
  ある $k > j$ に対して $v \in X_k - X_j$ と仮定してよい



主張

$u \in X_j$ または $v \in X_j$ (つまり，矛盾)

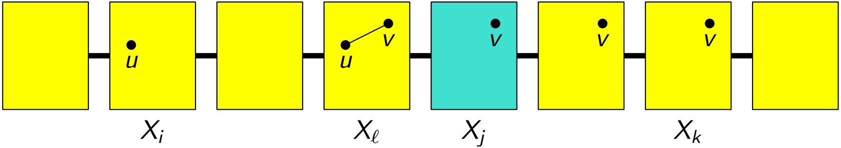
- $\{u, v\} \in E$ なので，(T2) より，ある節点 X_ℓ が存在して，$u, v \in X_\ell$
- $\ell \leq j$ ならば，(T3) より，$v \in X_j$
- $j \leq \ell$ ならば，(T3) より，$u \in X_j$ $\square$



主張

$u \in X_j$ または $v \in X_j$ (つまり，矛盾)

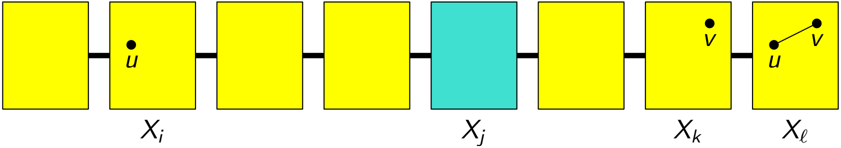
- $\{u, v\} \in E$ なので，(T2) より，ある節点 X_ℓ が存在して，$u, v \in X_\ell$
- $\ell \leq j$ ならば，(T3) より，$v \in X_j$
- $j \leq \ell$ ならば，(T3) より，$u \in X_j$ □



主張

$u \in X_j$ または $v \in X_j$ (つまり，矛盾)

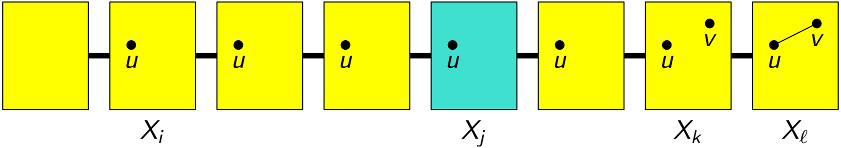
- $\{u, v\} \in E$ なので，(T2) より，ある節点 X_ℓ が存在して，$u, v \in X_\ell$
- $\ell \leq j$ ならば，(T3) より，$v \in X_j$
- $j \leq \ell$ ならば，(T3) より，$u \in X_j$ □



主張

$u \in X_j$ または $v \in X_j$ (つまり，矛盾)

- $\{u, v\} \in E$ なので，(T2) より，ある節点 X_ℓ が存在して，$u, v \in X_\ell$
- $\ell \leq j$ ならば，(T3) より，$v \in X_j$
- $j \leq \ell$ ならば，(T3) より，$u \in X_j$ □

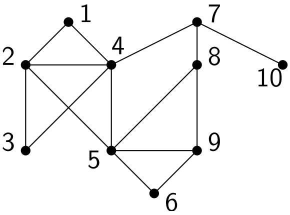


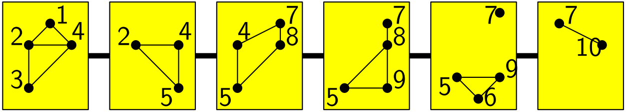
目次

無向グラフ $G=(V,E)$，G の道分解 $\mathcal{P}$

道分解の性質：完全部分グラフ

$S \subseteq V$ が G の完全部分グラフを誘導する $\Rightarrow$
$\mathcal{P}$ の節点で S を含むものが存在する





無向グラフ $G = (V, E)$，G の道分解 $\mathcal{P}$

道分解の性質：完全部分グラフ

$S \subseteq V$ が G の完全部分グラフを誘導する $\Rightarrow$
$\mathcal{P}$ の節点で S を含むものが存在する

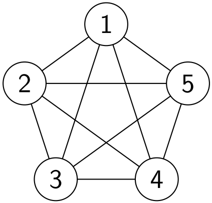
証明 (背理法)：S を含む節点が存在しないと仮定する

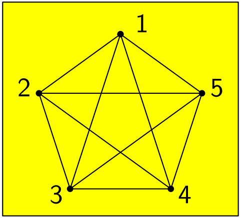
- $\mathcal{P}$ の節点を端から並べて，$X_1, X_2, \ldots, X_r$ とする
- 各頂点 $v \in S$ に対して，v を含む節点を $X_{i(v)}, \ldots, X_{j(v)}$ とする ((T3) 参照)
- $i = \max\{i(v) \mid v \in S\}, j = \min\{j(v) \mid v \in S\}$ とする
- このとき，$i < j$ となる (なぜ？)
- つまり，$i = i(v)$ を満たす $v \in S$ と $j = j(u)$ を満たす $u \in S$ に対して，$\{u, v\}$ を含む節点が存在しない
- これは (T2) に矛盾 $\square$

つまり，

完全グラフの道幅

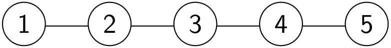
完全グラフ K_n の道幅は $n-1$

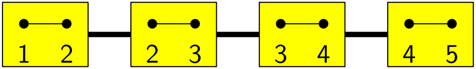




道の道幅

道の道幅は 1





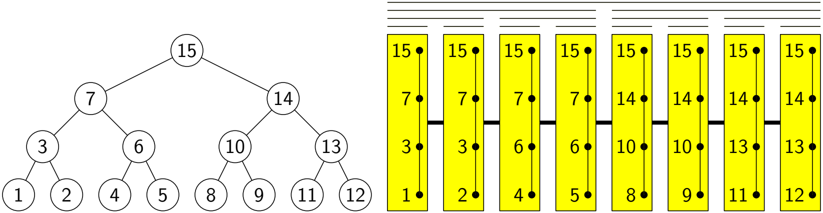
疑問

道以外に道幅が 1 のグラフはあるか？ (演習問題)

完全二分木の道幅

高さ h の完全二分木 T_h の道幅は $O(h)$

例：$h = 3$



注：T_h の頂点数を n とすると $h = \Theta(\log n)$ なので，$\mathrm{pw}(T_h) = O(\log n)$

木の道幅

頂点数 n の木の道幅は $O(\log n)$ (オーダー $\log n$以下)

証明の手順

1. 再帰で幅 $O(\log n)$ の道分解を構成
2. キーポイント：木をほぼ等分割する頂点の存在性

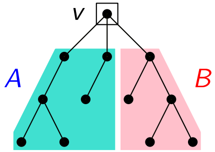
頂点数 n の木 $T = (V, E)$

補題

ある頂点 $v \in V$ と $T - v$ のある頂点部分集合 A, B で次を満たすものが存在

- $A \cup B = V - \{v\}$, $A \cap B = \emptyset$
- A の頂点と B の頂点を結ぶ辺は存在しない
- $|A| \leq \frac{2}{3}n$, $|B| \leq \frac{2}{3}n$

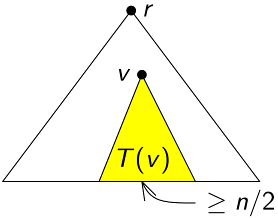
例：$n = 12$, $\frac{2}{3}n = 8$, $|A| = 6$, $|B| = 5$



木の道幅：補題の証明 (1)

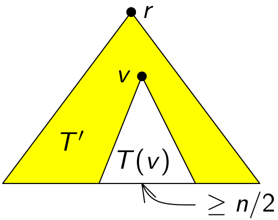
証明：T の任意の頂点 r を根として，根付き木 (T, r) を考える

- 頂点 $v \in V$ として次を満たすものを考える
  - $T(v)$ の頂点数が $n/2$ 以上　　($T(v) = v$ を根とする T の部分木)
  - そのような頂点の中で r から最も遠い
- そのような v は必ず存在する　　(なぜか？)
- この v の除去を考える



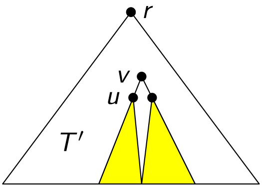
証明 (続)：

- $T - v$ の連結成分は以下の通り
  - $T(v)$ の頂点集合の補集合が誘導する木 T' (1 つ以下)
  - v の子 u を根とする部分木 $T(u)$ (複数あるかもしれない)
- 観察 1：T' の頂点数 $\leq n/2$
- 観察 2：$T(u)$ の頂点数 $\leq n/2$ (なぜか？)
- 連結成分を組み合わせて，A, B をうまく作ればよい



証明 (続)：

- $T - v$ の連結成分は以下の通り
  - $T(v)$ の頂点集合の補集合が誘導する木 T' (1 つ以下)
  - v の子 u を根とする部分木 $T(u)$ (複数あるかもしれない)
- 観察 1：T' の頂点数 $\leq n/2$
- 観察 2：$T(u)$ の頂点数 $\leq n/2$ (なぜか？)
- 連結成分を組み合わせて，A, B をうまく作ればよい



演習問題

k 個の自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ が以下を満たすとする

- $a_1, a_2, \ldots, a_k \leq n/2$
- $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq n$

このとき，添え字集合 $\{1, 2, \ldots, k\}$ の部分集合 I, J で以下を満たすものが存在

- $I \cup J = \{1, 2, \ldots, k\}$, $I \cap J = \emptyset$
- $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i \leq \frac{2}{3}n, \sum_{j \in J} a_j \leq \frac{2}{3}n$

証明 (続)：

- $a_1, a_2, \ldots, a_k$ を $T - v$ の連結成分の頂点数として，この結果を適用すればよい

□

木の道幅

頂点数 n の木の道幅は $O(\log n)$ （オーダー $\log n$ 以下）

証明の手順 (再掲)

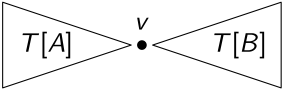
1. 再帰で幅 $O(\log n)$ の道分解を構成
2. キーポイント：木をほぼ等分割する頂点の存在性

アイディア

- 補題から得られる v を考えて，$T - v$ に対する道分解を再帰的に構成する

証明：数学的帰納法による

- 頂点数 1 の木の道幅は 0
- 頂点数 k の木の道幅が $c \log k$ 以下であるとする
  (c は後で決める定数)
- 頂点数 $n > k$ の木 T を考える
- T には補題にある v, A, B が存在する
- $T[A], T[B]$ を考えると，頂点数は $2n/3$ 以下
- 帰納法の仮定より，
  $T[A]$ の道分解 $\mathcal{P}_A$ で，幅 $c \log(2n/3)$ のものが存在，そして，
  $T[B]$ の道分解 $\mathcal{P}_B$ で，幅 $c \log(2n/3)$ のものが存在



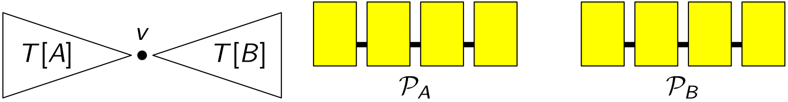
木の道幅：証明の完了 (3)

証明：次のように T の道分解を作る

- $\mathcal{P}_A$ と $\mathcal{P}_B$ の端点を辺でつなぎ，道を作る
- すべての節点に v を追加する (X を $X \cup \{v\}$ にする)

証明すべきこと

1. これが T の道分解であること
2. これの幅が $c \log n$ 以下であること

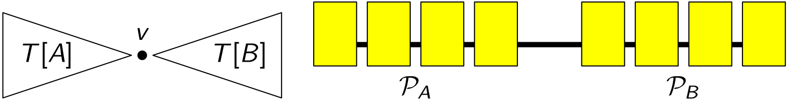


証明：次のように T の道分解を作る

- $\mathcal{P}_A$ と $\mathcal{P}_B$ の端点を辺でつなぎ，道を作る
- すべての節点に v を追加する (X を $X \cup \{v\}$ にする)

証明すべきこと

1. これが T の道分解であること
2. これの幅が $c \log n$ 以下であること

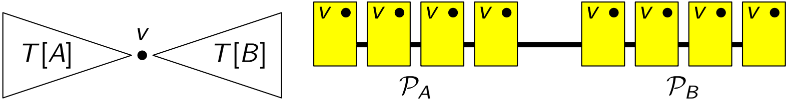


証明：次のように T の道分解を作る

- $\mathcal{P}_A$ と $\mathcal{P}_B$ の端点を辺でつなぎ，道を作る
- すべての節点に v を追加する (X を $X \cup \{v\}$ にする)

証明すべきこと

1. これが T の道分解であること
2. これの幅が $c \log n$ 以下であること



木の道幅：証明の完了 (4)

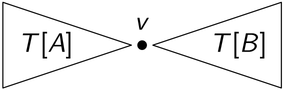
証明 1：これが T の道分解であること

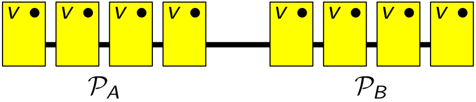
(T1) すぐわかる

(T2) T の辺で $T[A], T[B]$ の辺でもあるものは $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B$ の節点に含まれ，そうでないものは v に接続する辺で，v の追加によりどこかに含まれる

(T3) A と B が共通頂点を持たないので満たされる

つまり，T の道分解が得られた

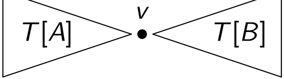


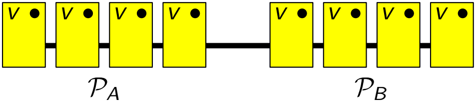


証明 2：これの幅が $c \log n$ 以下であること

$$
\begin{aligned}
\text{これの幅} &= \max\{\mathrm{pw}(\mathcal{P}_A), \mathrm{pw}(\mathcal{P}_B)\} + 1 \\
&\leq \left(c \log \frac{2}{3} n\right) + 1 \\
&= \left(c \log \frac{2}{3} n\right) + c \log \frac{3}{2} \\
&= c \log n
\end{aligned}
$$

ただし，$1 = c \log \frac{3}{2}$ となるように，定数 c は決めた □





目次

道幅と木幅の関係

任意の無向グラフ $G=(V,E)$ に対して

$$\mathtt{tw}(G) \le \mathtt{pw}(G) \le O(\mathtt{tw}(G)\log|V|)$$

証明：左側の不等号は演習問題，右側の不等号は次回以降

- ヒント：道分解は特殊な木分解

目次

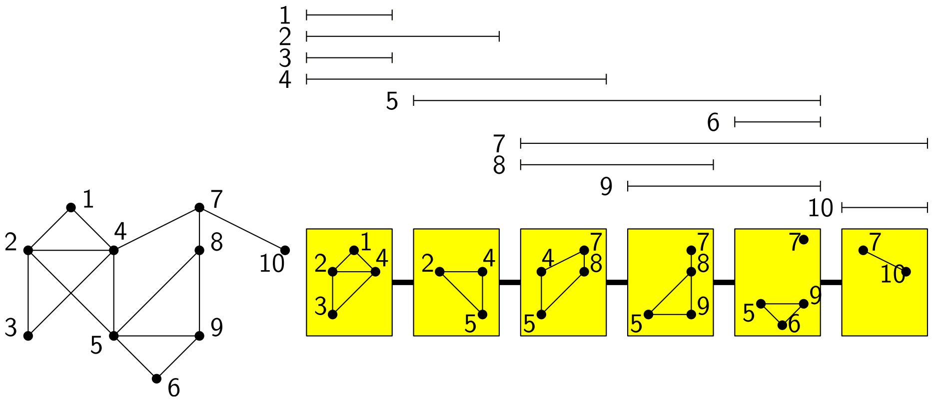
素敵な道分解 (nice path decomposition) とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ の道分解 $\mathcal{P}$ が素敵 であるとは，
$\mathcal{P}$ の節点を順に $X_1, X_2, \ldots, X_r$ と並べたとき，次を満たすこと

- $X_1 = X_r = \emptyset$
- 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ に対して，次のどちらかが成り立つ
  1. ある頂点 $v \notin X_i$ が存在して，$X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$
  2. ある頂点 $w \in X_i$ が存在して，$X_{i+1} = X_i - \{w\}$

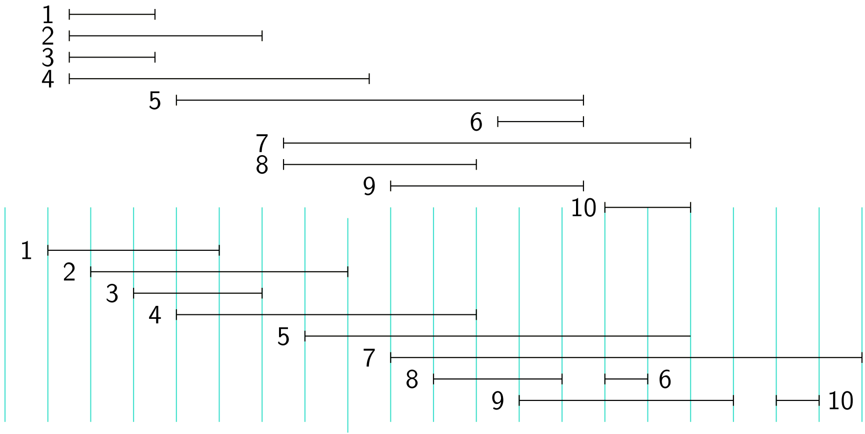
つまり，空集合を端点として，隣接する節点の差分は必ず 1 頂点

道分解から，同じ幅の素敵な道分解が (効率よく) 作れる



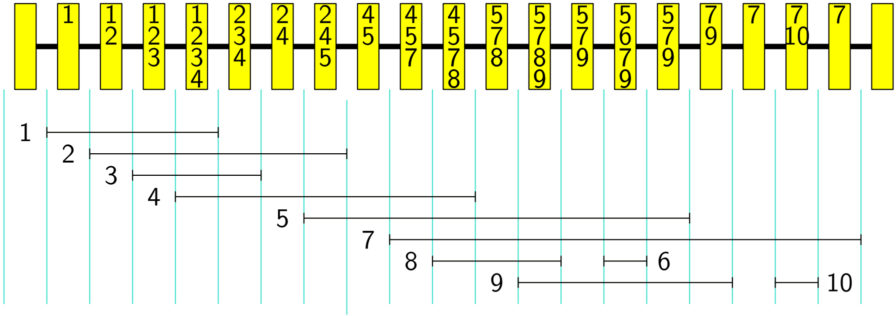
素敵な道分解：作り方 (2)

道分解から，同じ幅の素敵な道分解が (効率よく) 作れる

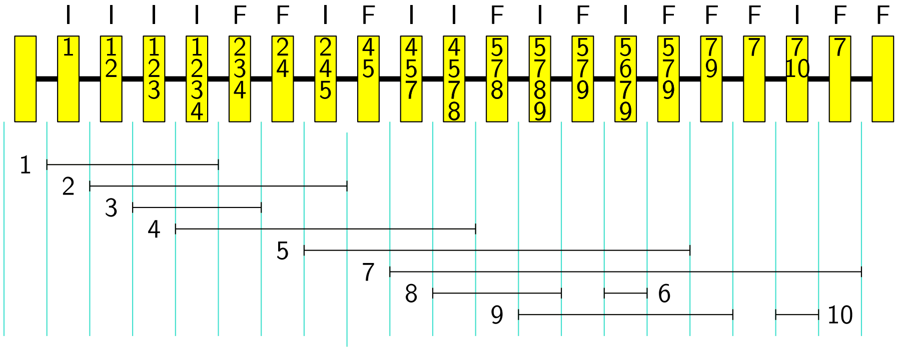


すべての区間の端点が異なるようにずらす

道分解から，同じ幅の素敵な道分解が (効率よく) 作れる



道分解から，同じ幅の素敵な道分解が (効率よく) 作れる



- $X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$ のとき，X_{i+1} は導入節点 (introduce node)
- $X_{i+1} = X_i - \{w\}$ のとき，X_{i+1} は忘却節点 (forget node)

なぜ 素敵な道分解 を考えるのか？

素敵な道分解を考える理由 1

次が正しいと分かる

> 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ の道分解 $\mathcal{P}$ に対して，
> G の道分解で，$\mathcal{P}$ と同じ幅を持ち，
> 節点数が $O(|V|)$ となるものが存在

素敵な道分解を考える理由 2

動的計画法に基づくアルゴリズムを設計しやすくなる

$\leadsto$ 次回の内容

目次

今日のまとめと次回の予告

今日の目標

道幅と道分解の性質を理解する

- 道幅，道分解
- 特殊なグラフの道幅
- 素敵な道分解

次回

素敵な道分解を用いて，動的計画法に基づくアルゴリズムを設計する

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次