# 離散最適化基礎論 第 2 回
# 木に対するアルゴリズム設計

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 10 月 21 日

最終更新：2016 年 10 月 21 日　16:34

## スケジュール 前半 (予定)

1. 離散最適化における木分解の役割 (10/7)
- ⋆ 休講 (国内出張) (10/14)
2. 木に対するアルゴリズム設計 (10/23)
3. 道幅と道分解 (10/30)
4. 道分解を用いたアルゴリズム設計 (11/4)
- ⋆ 休講 (海外出張) (11/11)
5. 木分解と木幅 (11/18)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/25)
6. 木幅の性質 (12/2)

注意：予定の変更もありうる

# スケジュール 後半 (予定)

7. 木分解を用いたアルゴリズム設計：頂点集合の選択・分割 (12/9)
8. 木分解を用いたアルゴリズム設計：辺集合の選択・分割 (12/16)
- ⋆ 休講 (天皇誕生日) (12/23)
- ⋆ 冬季休業 (12/30)
9. 木幅と論理：単項二階論理 (1/6)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/13)
10. 木幅と論理：オートマトン (1/20)
11. 木幅と論理：アルゴリズム設計 (1/27)
12. 木分解構成アルゴリズム：準備 (2/3)
13. 木分解構成アルゴリズム (2/10)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

# 概要

## 主題

離散最適化のトピックの１つとして
グラフの木分解を取り上げ,

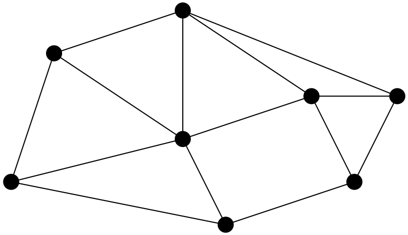
- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

## なぜ講義で取り扱う？

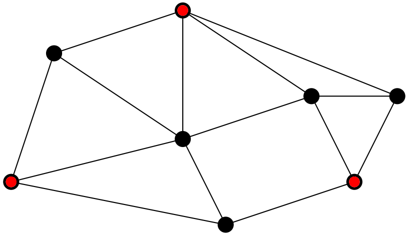
- 「離散最適化の神髄」だから

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



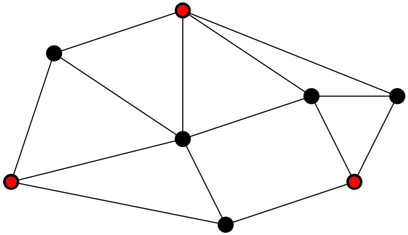
これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ

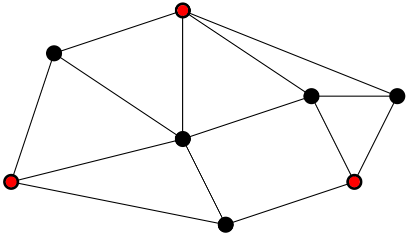


これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

**事実**

グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける (次回)

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

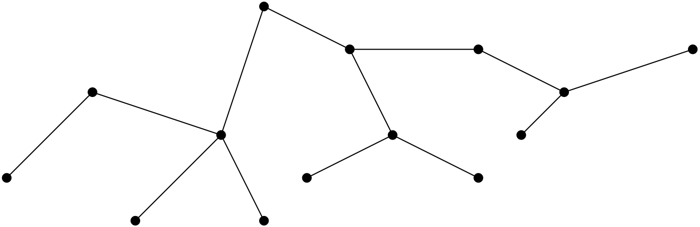
**事実**

グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける (次回)

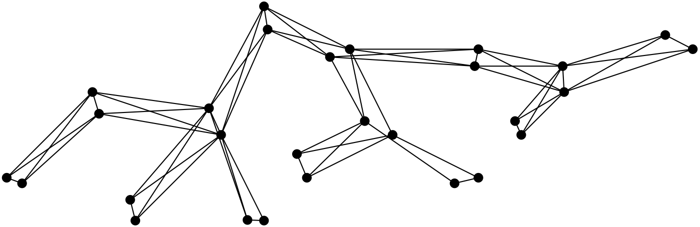
**直感？**

グラフが木に 近ければ，簡単に解けそう？

これは木

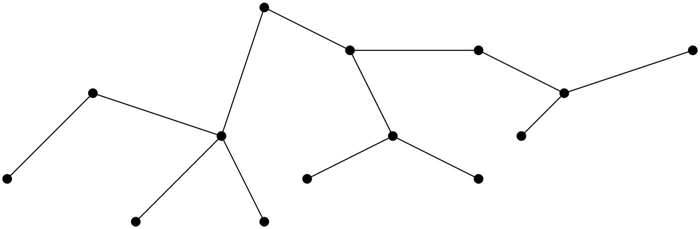


これは木に近い？

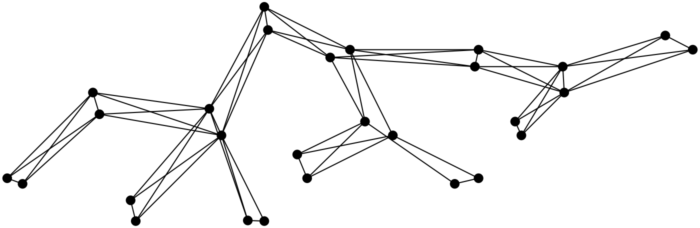


# 木に近い，とは？

これは木



これは木に近い？ ⇝ 「木っぽさ」を表す尺度を考える必要あり



この講義のキーワード (と荒っぽい説明)

| | |
|---|---|
| グラフの木幅 | グラフの「木っぽさ」を表す尺度 (の 1 つ) |
| グラフの木分解 | グラフを「木っぽく」表した構造 |
| 動的計画法 | 木分解上の効率的アルゴリズム |
| オートマトン | 動的計画法に基づくアルゴリズムの解釈 |
| Courcelle の定理 | 上記と論理学に基づく『メタアルゴリズム』 |

次の主題が有機的に結びつく面白い話題

- グラフ
- アルゴリズム
- オートマトン
- 論理 (特に，有限モデル理論)

**ポイント**

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

## 今日の目標

木に対して，効率的アルゴリズムが設計できるようになる

- 最大独立集合問題
- 最小支配集合問題
- 最大マッチング問題

キーワード：再帰，動的計画法

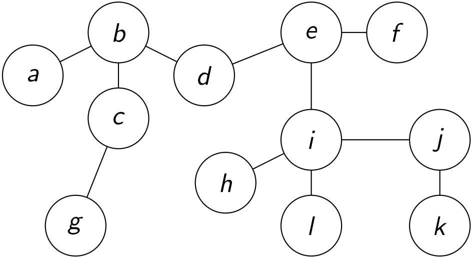
1. 木とその性質 (復習を含む)
2. 最大独立集合問題
3. 最小支配集合問題
4. 最大マッチング問題
5. 今日のまとめ と 次回の予告

無向グラフ $G = (V, E)$

## 木 (tree) とは？

$G$ が木であるとは，次の 2 つの条件を満たすこと

- $G$ は連結である
- $G$ は閉路を部分グラフとして含まない

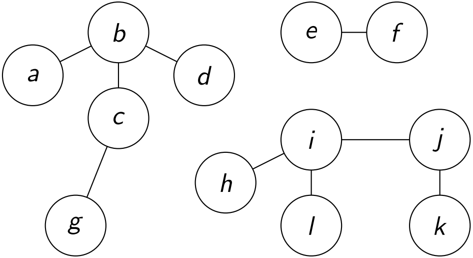


無向グラフ $G = (V, E)$

## 森 (forest) とは？

$G$ が森 (または林) であるとは，次の条件を満たすこと

- $G$ は閉路を部分グラフとして含まない

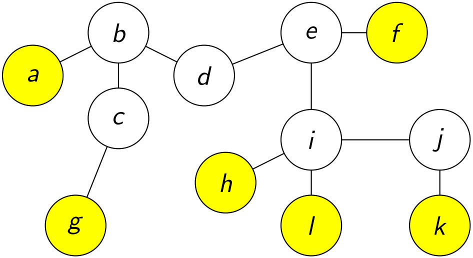



木は森であり，森の各連結成分は木である

木 $G = (V, E)$， $|V| \geq 2$

**木の重要な性質 (1)：木は葉を持つ**

$G$ には次数 1 の頂点が 2 つ以上存在する

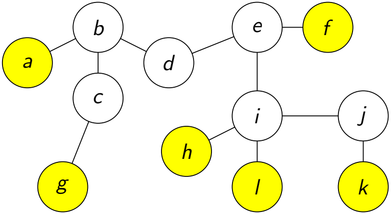



木における次数 1 の頂点を葉 (leaf) と呼ぶ

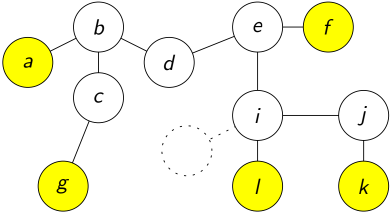
木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

**木の重要な性質 (2)：木から葉を除去しても木**

$G$ から $v$ を除去したグラフ $G - v$ も木




$G$

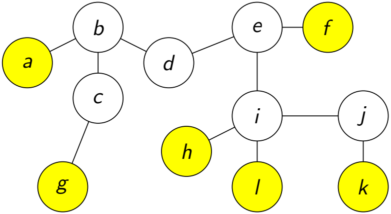



$G - h$

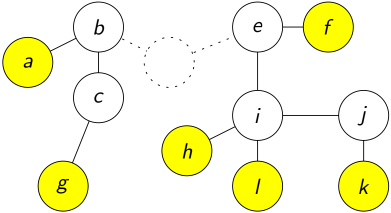
木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，葉ではない頂点 $v \in V$

**木の重要な性質 (4)：葉以外の頂点を除去すると非連結**

$G$ から $v$ を除去したグラフ $G - v$ は非連結

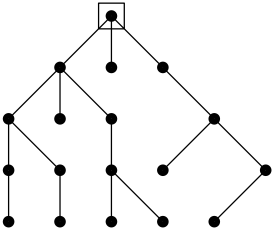



$G$




$G - d$

木の頂点 1 つを特別視して，根付き木 (rooted tree) と見なすことがある



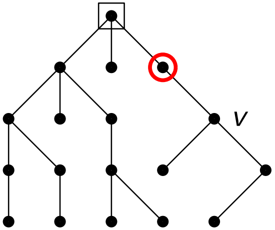
根 (root)：特別視した頂点

- 根付き木 $T$ の根 $r$ を強調するため，
  根付き木を $(T, r)$ と表記することもある

根付き木 $T$ の頂点 $v$

**親とは？**

根ではない頂点 $v$ の親 (parent) とは，$v$ に隣接する頂点で，根に近いもの

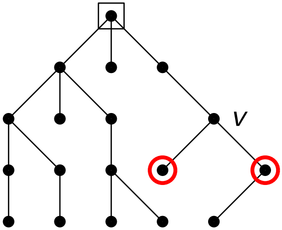



根ではない頂点 $v$ の親はただ１つ (根の親は存在しない)

根付き木 $T$ の頂点 $v$

**子とは？**

頂点 $v$ の子 (child) とは，$v$ に隣接する頂点で，根から遠いもの

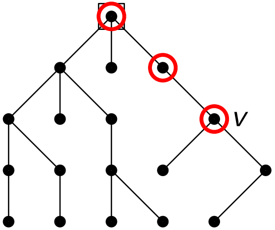



$C(v) = v$ の子全体の集合

根付き木 $T$ の頂点 $v$

### 祖先とは？

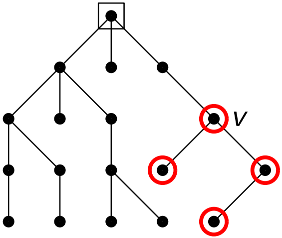
頂点 $v$ の祖先 (ancestor) とは，$v$ と根を結ぶ道の上にある頂点



根付き木 $T$ の頂点 $v$

## 子孫とは？

頂点 $v$ の子孫 (descendant) とは，$v$ を祖先として持つ頂点

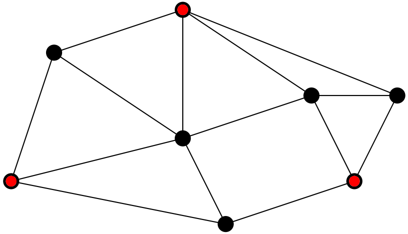


# 目次

$G = (V, E)$ 無向グラフ

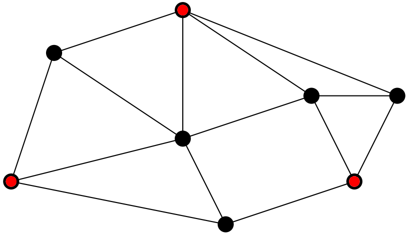
### 独立集合とは？

$G$ の独立集合 (independent set) とは，
頂点部分集合 $I \subseteq V$ で，$I$ のどの 2 頂点も隣接しないもの



## 最大独立集合問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：$G$ の最大独立集合 (の要素数)

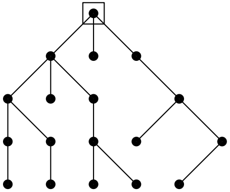


これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

**目標**

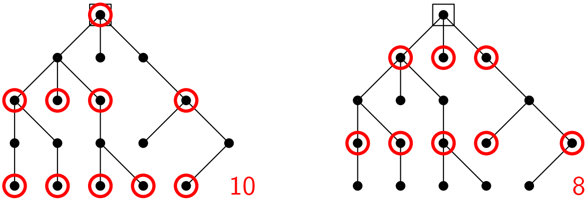
入力が木である場合に限って，最大独立集合問題を効率的に解く

入力として与えられる木を $T = (V, E)$ として，根 $r \in V$ を 1 つ決める



## 効率的解法：よくある間違い

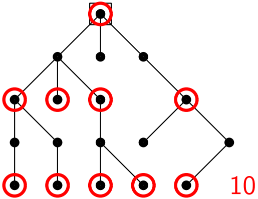
奇数段目と偶数段目を見て，大きい方を最大独立集合とする

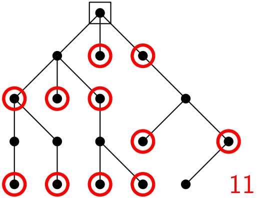



もっとちゃんと考えないといけない

## 効率的解法：よくある間違い

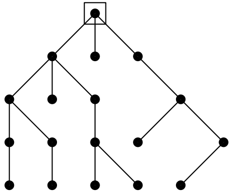
奇数段目と偶数段目を見て，大きい方を最大独立集合とする




もっとちゃんと考えないといけない

木 $T = (V, E)$，根 $r \in V$



## 基本的な考え方：場合分け

$X$ は $T$ の最大独立集合
$\Rightarrow$ 次のどちらかは正しい

1. $r \notin X$ （$X$ は根を持たない）
2. $r \in X$ （$X$ は根を持つ）

## 木における最大独立集合問題：アルゴリズム設計方針

次の 2 つを計算する

1. $r$ を持たない独立集合の中で，要素数最大のもの
2. $r$ を持つ独立集合の中で，要素数最大のもの

そのどちらかが，最大独立集合

## アルゴリズム設計方針 (再掲)

次の 2 つを計算する

1. $r$ を持たない独立集合の中で，要素数最大のもの
2. $r$ を持つ独立集合の中で，要素数最大のもの

そのどちらかが，最大独立集合

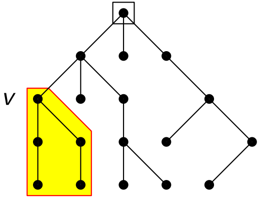
## 記法

$s(r) = T$ の独立集合の最大要素数 ($T$ の最大独立集合の要素数)

$s_1(r) = T$ の独立集合で，$r$ を持たないものの最大要素数

$s_2(r) = T$ の独立集合で，$r$ を持つものの最大要素数

このとき，$s(r) = \max\{s_1(r), s_2(r)\}$




**記法：頂点 $v \in V$ に対して**

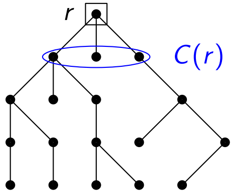
$$s(v) \quad = \quad v \text{ を根とする } T \text{ の部分木の独立集合の最大要素数}$$

## 解く部分問題 (1)

$r$ を持たない独立集合の中で，要素数最大のもの

- $X$ は $r$ の子を根とする部分木の独立集合の合併
  ($\because$ $X$ は $r$ を持たない)
- つまり，

$$s_1(r) = \sum_{u \in C(r)} s(u)$$



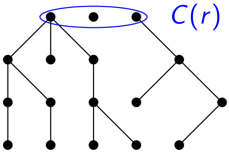
**解く部分問題 (1)**

$r$ を持たない独立集合の中で，要素数最大のもの

- $X$ は $r$ の子を根とする部分木の独立集合の合併

  $(\because X$ は $r$ を持たない$)$
- つまり，

$$s_1(r) = \sum_{u \in C(r)} s(u)$$

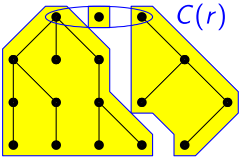


**解く部分問題 (1)**

$r$ を持たない独立集合の中で，要素数最大のもの

- $X$ は $r$ の子を根とする部分木の独立集合の合併
  ($\because$ $X$ は $r$ を持たない)
- つまり，

$$s_1(r) = \sum_{u \in C(r)} s(u)$$



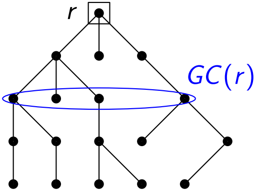
## 解く部分問題 (2)

$r$ を持つ独立集合の中で，要素数最大のもの

- $X$ は $r$ の子をどれも持てない　　(∵ $X$ は独立集合)
- ∴ $X$ は $r$ の孫 (子の子) を根とする部分木の独立集合と $\{r\}$ の合併
- つまり，

$$s_2(r) = 1 + \sum_{u \in GC(r)} s(u)$$

$GC(r)$ は $r$ の孫全体の集合



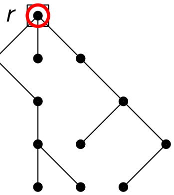
## 解く部分問題 (2)

$r$ を持つ独立集合の中で，要素数最大のもの

- $X$ は $r$ の子をどれも持てない　　($\because$ $X$ は独立集合)
- $\therefore$ $X$ は $r$ の孫 (子の子) を根とする部分木の独立集合と $\{r\}$ の合併
- つまり，

$$s_2(r) = 1 + \sum_{u \in GC(r)} s(u)$$

$GC(r)$ は $r$ の孫全体の集合



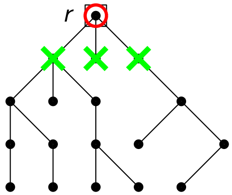
## 解く部分問題 (2)

$r$ を持つ独立集合の中で，要素数最大のもの

- $X$ は $r$ の子をどれも持てない　　　　($\because$ $X$ は独立集合)
- $\therefore$ $X$ は $r$ の孫 (子の子) を根とする部分木の独立集合と $\{r\}$ の合併
- つまり，

$$s_2(r) = 1 + \sum_{u \in GC(r)} s(u)$$

$GC(r)$ は $r$ の孫全体の集合



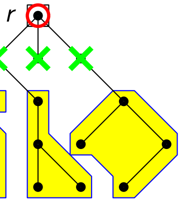
## 解く部分問題 (2)

$r$ を持つ独立集合の中で，要素数最大のもの

- $X$ は $r$ の子をどれも持てない　　($\because$ $X$ は独立集合)
- $\therefore$ $X$ は $r$ の孫 (子の子) を根とする部分木の独立集合と $\{r\}$ の合併
- つまり，

$$s_2(r) = 1 + \sum_{u \in GC(r)} s(u)$$

$GC(r)$ は $r$ の孫全体の集合



ここまでのまとめ

$$\begin{aligned} s(r) &= \max\{s_1(r), s_2(r)\}, \\ s_1(r) &= \sum_{u \in C(r)} s(u), \\ s_2(r) &= 1 + \sum_{u \in GC(r)} s(u) \end{aligned}$$

**つまり,**

$$s(r) = \max\left\{ \sum_{u \in C(r)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(r)} s(u) \right\}$$

要点：$s(r)$ は $r$ の子と孫 $u$ に対する $s(u)$ から簡単に計算できる

先ほどの式は，根 $r$ 以外の頂点でも同様に成り立つ．つまり，

**再帰式**

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

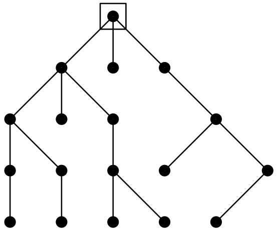
この式にしたがって，すべての頂点 $v$ に対して $s(v)$ を計算すればよい

木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

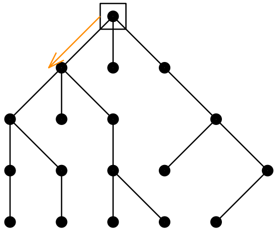


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

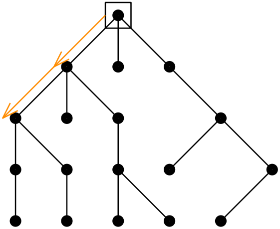


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

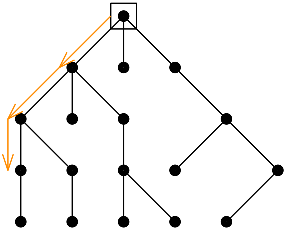


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

### 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

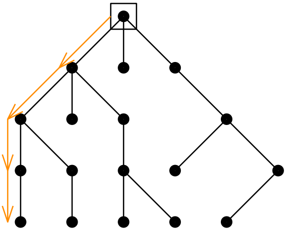


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

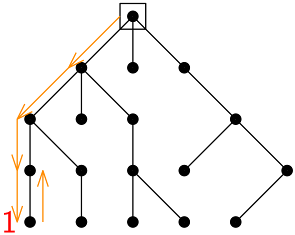


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

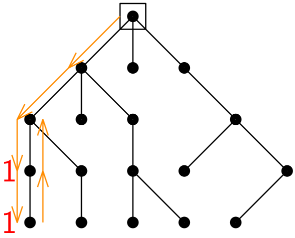


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max \left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

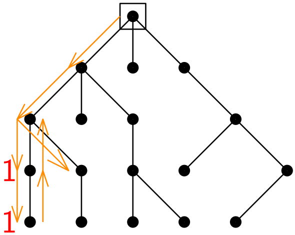


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{\sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u)\right\}$$

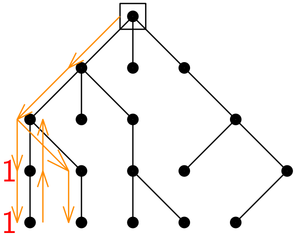


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

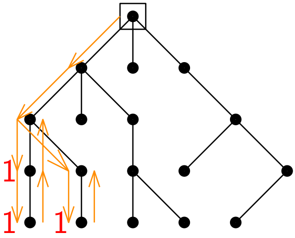


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

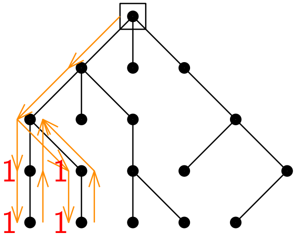


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

### 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

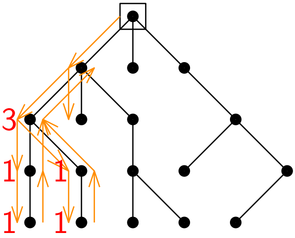


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

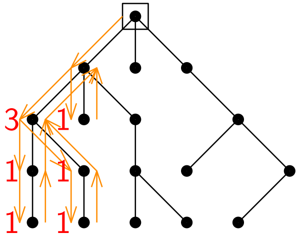


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

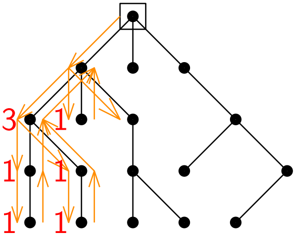


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

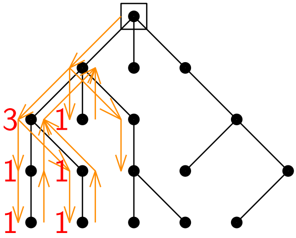


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

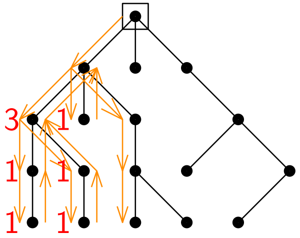


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{\sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u)\right\}$$

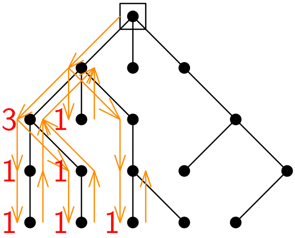


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

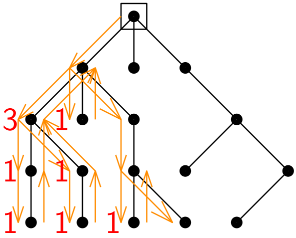


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

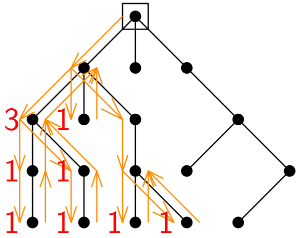


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

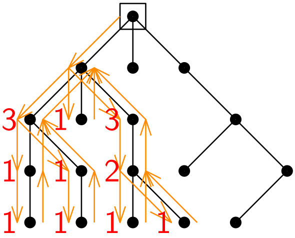


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

### 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{\sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u)\right\}$$

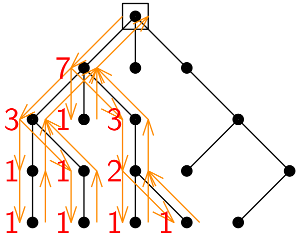


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max \left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$



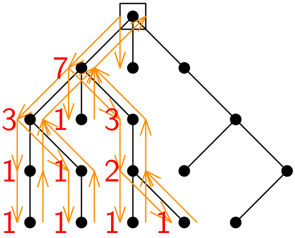
# 木における最大独立集合問題：アルゴリズム

木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

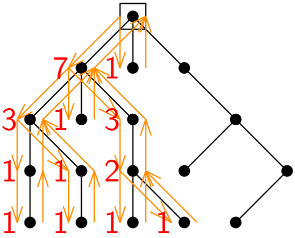


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

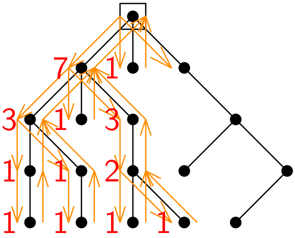


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{\sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u)\right\}$$

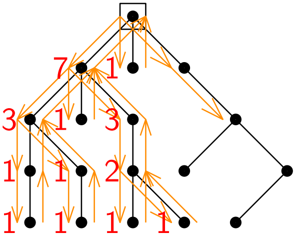


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

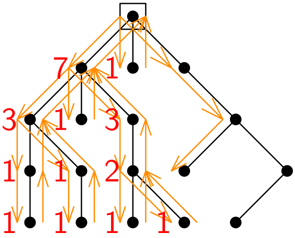


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

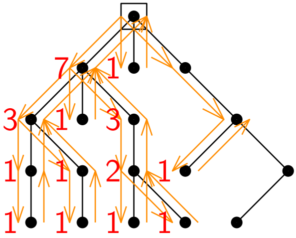


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

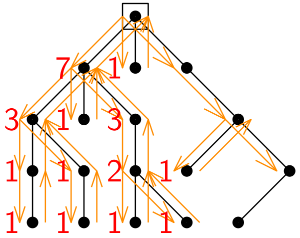


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

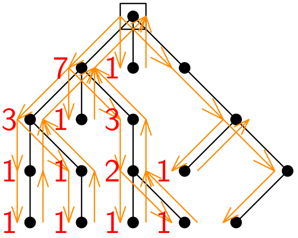


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{\sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u)\right\}$$

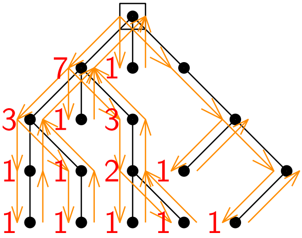


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

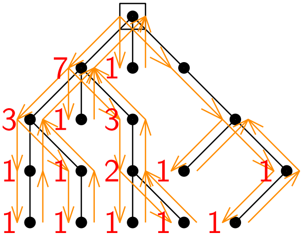


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u\in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u\in GC(v)} s(u) \right\}$$

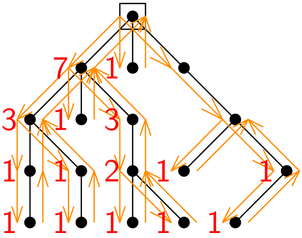


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

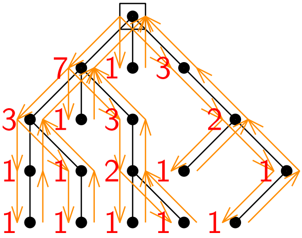


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$



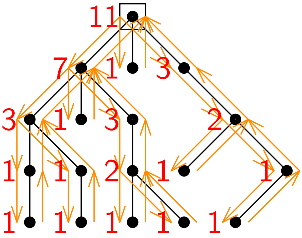
# 木における最大独立集合問題：アルゴリズム

木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max \left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$

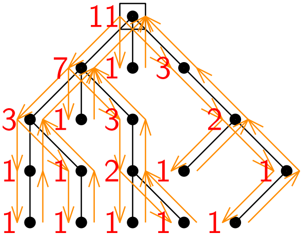


木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

## 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u) \right\}$$




$s(r) = 11$

木の後行順 (post-order) に従って，計算を進めていく

### 再帰式

任意の頂点 $v$ に対して

$$s(v) = \max\left\{\sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in GC(v)} s(u)\right\}$$

- 木の後行順は $O(|V|)$ 時間で見つけられる
- 各頂点 $v$ に対して，$s(v)$ の値は高々2 回参照される
- $\therefore$ 再帰式の計算にかかる時間 $= O(|V|)$
- $\therefore$ このアルゴリズムの計算量 $= O(|V|)$

線形時間アルゴリズム

## アルゴリズム：動的計画法

1. 根 $r$ を任意に定める
2. 木の後行順 (post-order) に従って，各頂点 $v$ に対して次を計算

$$s(v) = \max\left\{\sum_{u\in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u\in GC(v)} s(u)\right\}$$

3. $s(r)$ を出力

## 計算量

$O(|V|)$ 時間

「動的計画法」については次を参照 (東京理科大学 小林先生)

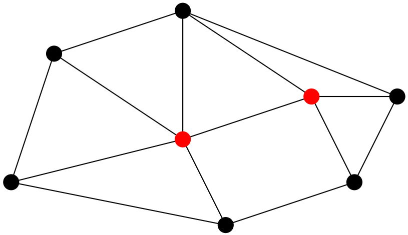
- `http://mathopt.sakura.ne.jp/dp.html`

# 目次

$G = (V, E)$ 無向グラフ

## 支配集合とは？

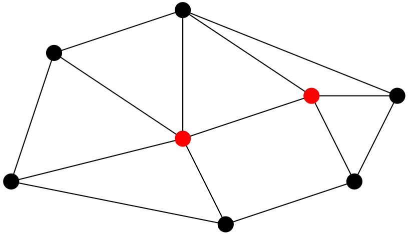
$G$ の支配集合 (dominating set) とは，頂点部分集合 $D \subseteq V$ で，
$V - D$ のどの頂点も $D$ のある頂点に隣接するもの



$D$ の頂点 $v$ は，$v$ と $v$ の隣接頂点を支配する，という

## 最小支配集合問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：$G$ の最小支配集合 (の要素数)

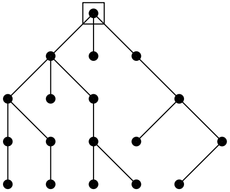


これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

## 目標

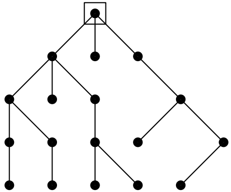
入力が木である場合に限って，最小支配集合問題を効率的に解く

入力として与えられる木を $T = (V, E)$ として，根 $r \in V$ を 1 つ決める



また，再帰式を導出したい

木 $T = (V, E)$，根 $r \in V$



**基本的な考え方：場合分け**

$X$ は $T$ の最小支配集合
$\Rightarrow$ 次のどちらかは正しい

1. $r \notin X$ （$X$ は根を持たない）
2. $r \in X$ （$X$ は根を持つ）

**木における最大支配集合問題：アルゴリズム設計方針**

次の 2 つを計算する

1. $r$ を持たない支配集合の中で，要素数最小のもの
2. $r$ を持つ支配集合の中で，要素数最小のもの

そのどちらかが，最小支配集合

## アルゴリズム設計方針 (再掲)

次の 2 つを計算する

1. $r$ を持たない支配集合の中で，要素数最小のもの
2. $r$ を持つ支配集合の中で，要素数最小のもの

そのどちらかが，最小支配集合

## 記法

$v$ を根とする部分木を $T(v)$ と書くと

$$
\begin{aligned}
s(v) &= T(v) \text{ の支配集合の最小要素数 } (T(v) \text{ の最小支配集合の要素数}) \\
s_1(v) &= T(v) \text{ の支配集合で，} v \text{ を持たないものの最小要素数} \\
s_2(v) &= T(v) \text{ の支配集合で，} v \text{ を持つものの最小要素数}
\end{aligned}
$$

このとき，$s(v) = \min\{s_1(v), s_2(v)\}$ であり，$s(r)$ を最終的に求めたい

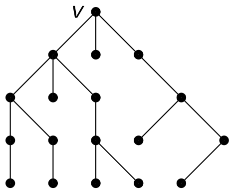
## 解く部分問題 (1)

$v$ を持たない支配集合の中で，要素数最小のもの

- このとき

$$s_1(v) = \sum_{u \in C(v)} s(u)$$

となるかどうかわからない !! (なぜか？)

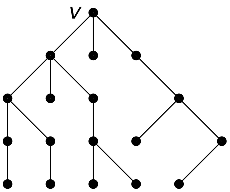



$v \notin X$ ならば，ある $u \in C(v)$ に対して，$u \in X$ とならなければならない

## 解く部分問題 (1)

$v$ を持たない支配集合の中で，要素数最小のもの

- このとき $s_1(v) = \min_{u \in C(v)} \left\{ s_2(u) + \sum_{w \in C(v)-\{u\}} s(w) \right\}$



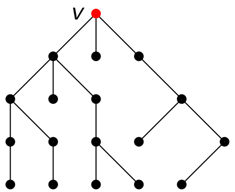

これは $O(|C(v)|)$ 時間で計算できる

(各 $u \in C(v)$ に対して $s(u), s_2(u)$ が分かっていれば)

## 解く部分問題 (2)

$v$ を持つ支配集合の中で，要素数最小のもの

- このとき，$s_2(v) = 1 + \sum_{u \in C(v)} s(u)$ であるとは限らない

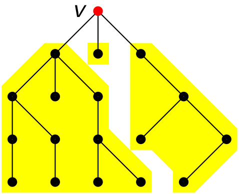



$v \in X$ であるので，部分木において $C(v)$ の頂点を支配する必要はない

## 解く部分問題 (2)

$v$ を持つ支配集合の中で，要素数最小のもの

- このとき，$s_2(v) = 1 + \sum_{u \in C(v)} s(u)$ であるとは限らない



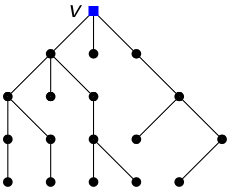

$v \in X$ であるので，部分木において $C(v)$ の頂点を支配する必要はない

## 記法

$v$ を根とする部分木を $T(v)$ と書くと

$$
\begin{aligned}
s(v) &= T(v) \text{ の支配集合の最小要素数 } (T(v) \text{ の最小支配集合の要素数})\\
s_1(v) &= T(v) \text{ の支配集合で，} v \text{ を持たないものの最小要素数}\\
s_2(v) &= T(v) \text{ の支配集合で，} v \text{ を持つものの最小要素数}\\
s_3(v) &= T(v) \text{ の頂点部分集合で，}\\
&\qquad T(v) - v \text{ の支配集合となるものの最小要素数}
\end{aligned}
$$

このとき，$s(v) = \min\{s_1(v), s_2(v)\}$ であり，$s(r)$ を最終的に求めたい

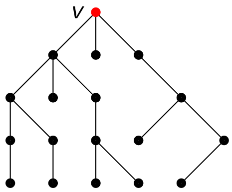


## 解く部分問題 (2)

$v$ を持つ支配集合の中で，要素数最小のもの

- このとき，

$$s_2(v) = 1 + \sum_{u \in C(v)} s_3(u)$$

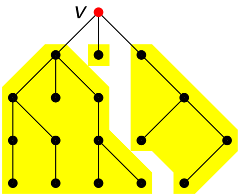


## 解く部分問題 (2)

$v$ を持つ支配集合の中で，要素数最小のもの

- このとき，

$$s_2(v) = 1 + \sum_{u \in C(v)} s_3(u)$$

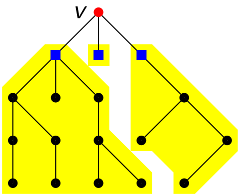


## 解く部分問題 (2)

$v$ を持つ支配集合の中で，要素数最小のもの

- このとき，

$$s_2(v) = 1 + \sum_{u \in C(v)} s_3(u)$$

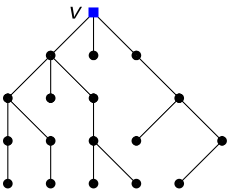


## 解く部分問題 (3)

$v$ 以外の頂点を支配する頂点部分集合で，要素数最小のもの

- このとき，

$$s_3(v) = \min \left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in C(v)} s_3(u) \right\}$$

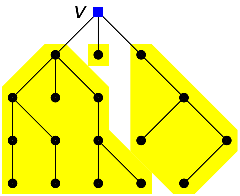


## 解く部分問題 (3)

$v$ 以外の頂点を支配する頂点部分集合で，要素数最小のもの

- このとき，

$$s_3(v) = \min\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in C(v)} s_3(u) \right\}$$



再帰式

$$
\begin{aligned}
s(v) &= \min\{s_1(v), s_2(v)\},\\
s_1(v) &= \min_{u \in C(v)} \left\{ s_2(u) + \sum_{w \in C(v)-\{u\}} s(w) \right\},\\
s_2(v) &= 1 + \sum_{u \in C(v)} s_3(u),\\
s_3(v) &= \min \left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in C(v)} s_3(u) \right\}
\end{aligned}
$$

$s_1(v), s_2(v), s_3(v), s(v)$ を木の後行順に沿って計算すればよい
($s(v)$ だけの式にする必要はない)

再帰式

$$s(v) = \min\{s_1(v), s_2(v)\},$$

$$s_1(v) = \min_{u \in C(v)} \left\{ s_2(u) + \sum_{w \in C(v) - \{u\}} s(w) \right\},$$

$$s_2(v) = 1 + \sum_{u \in C(v)} s_3(u), \qquad s_3(v) = \min\left\{ \sum_{u \in C(v)} s(u), 1 + \sum_{u \in C(v)} s_3(u) \right\}$$

計算量

- 後行順は $O(|V|)$ 時間で見つけられる
- 各 $v$ に対して，
  $s_1(v), s_2(v), s_3(v), s(v)$ を計算にかかる時間 $= O(|C(v)|)$
- したがって，計算量は

$$O(|V|) + \sum_{v \in V} O(|C(v)|) = O(|V|) + O(|V|) = O(|V|)$$

再帰式

$$s_1(v) = \min_{u \in C(v)} \left\{ s_2(u) + \sum_{w \in C(v) - \{u\}} s(w) \right\},$$

アルゴリズム

1. $C(v)$ の要素に適当な順番を付け，$C(v) = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ とする
2. $s_1(v) \leftarrow +\infty$ とする
3. $S \leftarrow \sum_{w \in C(v)} s(w)$ とする
4. $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，次を反復実行
   - $s_1(v) \leftarrow \min\{s_1(v), S + s_2(u_i) - s(u_i)\}$ とする
5. $s_1(v)$ を出力

再帰式

$$s_1(v) = \min_{u \in C(v)} \left\{ s_2(u) + \sum_{w \in C(v) - \{u\}} s(w) \right\},$$

アルゴリズム

1. $C(v)$ の要素に適当な順番を付け，$C(v) = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ とする (← $O(|C(v)|)$ 時間)
2. $s_1(v) \leftarrow +\infty$ とする (← $O(1)$ 時間)
3. $S \leftarrow \sum_{w \in C(v)} s(w)$ とする (← $O(|C(v)|)$ 時間)
4. $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，次を反復実行 (← $O(|C(v)|)$ 回)
   - $s_1(v) \leftarrow \min\{s_1(v), S + s_2(u_i) - s(u_i)\}$ とする (← $O(1)$ 時間)
5. $s_1(v)$ を出力 (← $O(1)$ 時間)

計算量：$O(|C(v)|)$ 時間

## アルゴリズム：動的計画法

1. 根 $r$ を任意に定める
2. 木の後行順に従って，
   各頂点 $v$ に対して $s_1(v), s_2(v), s_3(v), s(v)$ を計算
3. $s(r)$ を出力

## 計算量

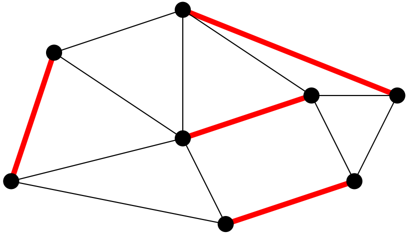
$O(|V|)$ 時間

# 目次

$G = (V, E)$ 無向グラフ

## マッチングとは？

$G$ のマッチング (matching) とは，
辺部分集合 $M \subseteq V$ で，$M$ のどの 2 辺も端点を共有しないもの



## 最大マッチング問題とは？

- 入力：無向グラフ $G=(V,E)$
- 出力：$G$ の最大マッチング (の要素数)

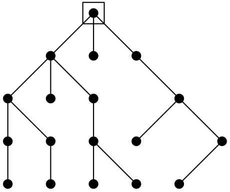
これは多項式時間で解けるが，現在最速アルゴリズムの計算量は次の通り

- $O(\sqrt{|V|}|E|)$ 時間 (決定性) (Micali, Vazirani '80)
- $O(|V|^{\omega})$ 時間 (乱択) (Mucha, Sankowski '04)
  - $\omega=$ 行列積指数 (matrix multiplication exponent)
    現在最良：$\omega<2.3728639$ (Le Gall '14)

つまり，多項式時間ながら「遅い」

**目標**

入力が木である場合に限って，最大マッチング問題を効率的に解く



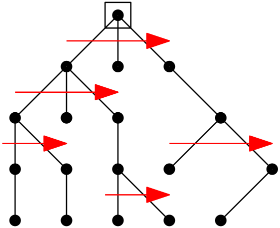
**注意**

| | | |
|---|---|---|
| 最大独立集合問題 | 頂点を選ぶ問題 | (頂点部分集合を見つける問題) |
| 最大マッチング問題 | 辺を選ぶ問題 | (辺部分集合を見つける問題) |

うまく再帰式を作るために，入力の木を「順序木」であると見なす

## 順序木 (ordered tree) とは？

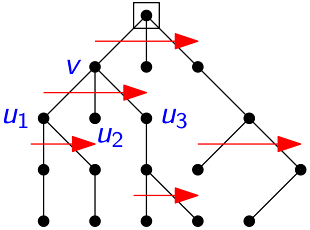
根付き木において，各頂点 $v$ の子全体 $C(v)$ に全順序 $\leq_u$ を与えたもの



各頂点の子は，全順序に合わせて，左から右に並べて書くことが多い

## 順序木 (ordered tree) とは？

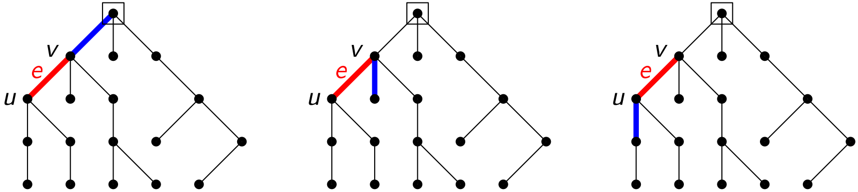
根付き木において，各頂点 $v$ の子全体 $C(v)$ に全順序 $\leq_u$ を与えたもの




記法：

- 頂点 $v$ の子全体 $C(v) = \{u_1, u_2, u_3\}$ に対して，$u_1 <_u u_2 <_u u_3$
- これを辺にも拡大して，
  $\{v, u_1\} <_u \{v, u_2\} <_u \{v, u_3\}$ と書くこともある

順序木 $(T, r, \{\leq_v\})$ と
その辺 $e = \{u, v\}$ に対して，$v$ が $u$ の親であるとき，



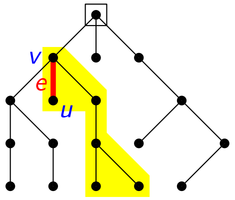

- $e$ の親辺：$v$ の親と $v$ を結ぶ辺
- $e$ の右妹辺：$\leq_v$ において，$e$ よりも 1 つ大きい辺 (right-sibling)
- $e$ の左子辺：$\leq_u$ において，先頭にある辺 (left-child)

順序木 $(T, r, \{\leq_v\})$ と
その辺 $e = \{u, v\}$ に対して，$v$ が $u$ の親であるとき，

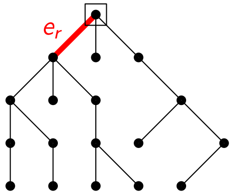
## 辺が定める部分木とは？

辺 $e$ に対して，$e$ が定める部分木を次のように定義する

- このとき，$v$ の子で，$u$ より大きい ($u$ より右にある) ものをすべて考えて，集合 $X$ とする
- $X \cup \{u\}$ の子孫全体と $v$ が誘導する木を $e$ が定める部分木とする



このとき，唯一の辺 $e_r$ に対して，$e_r$ が定める部分木が $T$ そのものになる
($e_r$：根辺)




**つまり，任意の辺 $e$ に対して，次を行なえばよい**

$e$ が定める部分木において，最大マッチングの要素数の計算

最大独立集合のときと同様に，再帰式を考える

## アルゴリズム設計方針

各辺 $e$ に対して，$e$ が定める部分木において，次の 2 つを計算する

1. $e$ を持たないマッチングの中で，要素数最大のもの
2. $e$ を持つマッチングの中で，要素数最大のもの

そのどちらかが，$e$ が定める部分木の最大マッチング

## 記法

$e$ が定める $T$ の部分木を $T(e)$ と書くことにして

$s(e) = T(e)$ のマッチングの最大要素数 ($T(e)$ の最大マッチングの要素数)

$s_1(e) = T(e)$ のマッチングで，$e$ を持たないものの最大要素数

$s_2(e) = T(e)$ のマッチングで，$e$ を持つものの最大要素数

このとき，$s(e) = \max\{s_1(e), s_2(e)\}$

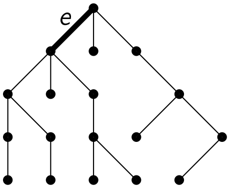
## 解く部分問題 (1)

$e$ を持たないマッチングの中で，要素数最大のもの

- このとき，

$$s_1(e) = \sum_{f \in LC(e)} s(f) + \sum_{f \in RS(e)} s(f)$$

$LC(e)$ は $e$ の左子辺全体の集合，$RS(e)$ は $e$ の右妹辺全体の集合



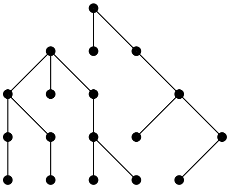
## 解く部分問題 (1)

$e$ を持たないマッチングの中で，要素数最大のもの

- このとき，

$$s_1(e) = \sum_{f \in LC(e)} s(f) + \sum_{f \in RS(e)} s(f)$$

$LC(e)$ は $e$ の左子辺全体の集合，$RS(e)$ は $e$ の右妹辺全体の集合



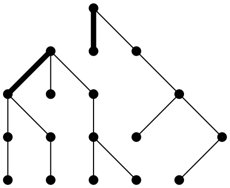
## 解く部分問題 (1)

$e$ を持たないマッチングの中で，要素数最大のもの

- このとき，

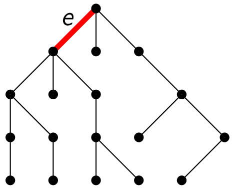
$$s_1(e) = \sum_{f \in LC(e)} s(f) + \sum_{f \in RS(e)} s(f)$$

$LC(e)$ は $e$ の左子辺全体の集合，$RS(e)$ は $e$ の右妹辺全体の集合



## 解く部分問題 (2)

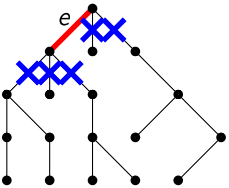
$e$ を持つマッチングの中で，要素数最大のもの




これはややこしい→ 計算すべきものを再考
(線形時間アルゴリズムができなそう)

## 解く部分問題 (2)

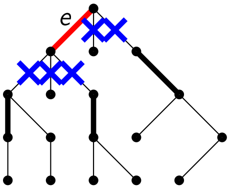
$e$ を持つマッチングの中で，要素数最大のもの




これはややこしい→ 計算すべきものを再考
(線形時間アルゴリズムができなそう)

## 解く部分問題 (2)

$e$ を持つマッチングの中で，要素数最大のもの




これはややこしい→ 計算すべきものを再考
(線形時間アルゴリズムができなそう)

## 記法

$e$ が定める $T$ の部分木を $T(e)$ と書き，
$e = \{u, v\}$ において，$v$ が $u$ の親であるとして，

$s(e) = T(e)$ のマッチングの最大要素数 ($T(e)$ の最大マッチングの要素数)
$s_1(e) = T(e)$ のマッチングで，$e$ を持たないものの最大要素数
$s_2(e) = T(e)$ のマッチングで，$e$ を持つものの最大要素数
$s_3(e) = T(e)$ のマッチングで，$e$ と $e$ の妹をどれも持たないものの最大要素数

このとき，$s(e) = \max\{s_1(e), s_2(e)\}$ $(\because s_1(e) \geq s_3(e))$

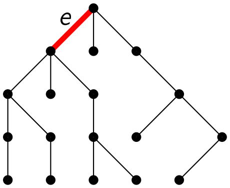
## 解く部分問題 (2)

$e$ を持つマッチングの中で，要素数最大のもの

- このとき，

$$s_2(e) = \sum_{f \in LC(e)} s_3(f) + \sum_{f \in RS(e)} s_3(f)$$

$LC(e)$ は $e$ の左子辺全体の集合，$RS(e)$ は $e$ の右妹辺全体の集合



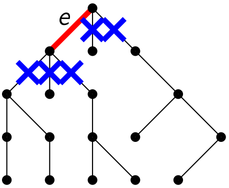
## 解く部分問題 (2)

$e$ を持つマッチングの中で，要素数最大のもの

- このとき，

$$s_2(e) = \sum_{f \in LC(e)} s_3(f) + \sum_{f \in RS(e)} s_3(f)$$

$LC(e)$ は $e$ の左子辺全体の集合，$RS(e)$ は $e$ の右妹辺全体の集合



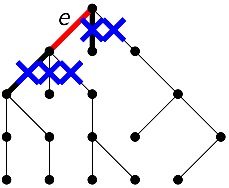
## 解く部分問題 (2)

$e$ を持つマッチングの中で，要素数最大のもの

- このとき，

$$s_2(e) = \sum_{f \in LC(e)} s_3(f) + \sum_{f \in RS(e)} s_3(f)$$

$LC(e)$ は $e$ の左子辺全体の集合，$RS(e)$ は $e$ の右妹辺全体の集合



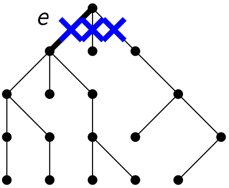
## 解く部分問題 (3)

$e$ と $e$ の妹をどれも持たないマッチングの中で，要素数最大のもの

- このとき，

$$s_3(e) = \sum_{f \in LC(e)} s(f) + \sum_{f \in RS(e)} s_3(f)$$

$LC(e)$ は $e$ の左子辺全体の集合，$RS(e)$ は $e$ の右妹辺全体の集合



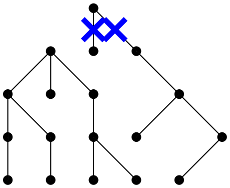
## 解く部分問題 (3)

$e$ と $e$ の妹をどれも持たないマッチングの中で，要素数最大のもの

- このとき，

$$s_3(e) = \sum_{f \in LC(e)} s(f) + \sum_{f \in RS(e)} s_3(f)$$

$LC(e)$ は $e$ の左子辺全体の集合，$RS(e)$ は $e$ の右妹辺全体の集合



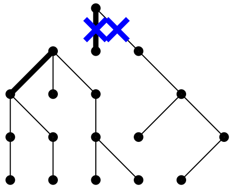
## 解く部分問題 (3)

$e$ と $e$ の妹をどれも持たないマッチングの中で，要素数最大のもの

- このとき，

$$s_3(e) = \sum_{f \in LC(e)} s(f) + \sum_{f \in RS(e)} s_3(f)$$

$LC(e)$ は $e$ の左子辺全体の集合，$RS(e)$ は $e$ の右妹辺全体の集合



得られた再帰式

$$
\begin{aligned}
s(e) &= \max\{s_1(e), s_2(e)\},\\
s_1(e) &= \sum_{f \in LC(e)} s(f) + \sum_{f \in RS(e)} s(f),\\
s_2(e) &= \sum_{f \in LC(e)} s_3(f) + \sum_{f \in RS(e)} s_3(f),\\
s_3(e) &= \sum_{f \in LC(e)} s(f) + \sum_{f \in RS(e)} s_3(f)
\end{aligned}
$$

**つまり，**

木の「下の方」から順番に，$s_1(e), s_2(e), s_3(e), s(e)$ を計算していけばよい

そのためには，順序木の辺集合に対して上手な順序を考える必要あり

(演習問題)

## 木における最大マッチング問題：計算量

得られた再帰式

$$
\begin{aligned}
s(e) &= \max\{s_1(e), s_2(e)\}, \\
s_1(e) &= \sum_{f \in LC(e)} s(f) + \sum_{f \in RS(e)} s(f), \\
s_2(e) &= \sum_{f \in LC(e)} s_3(f) + \sum_{f \in RS(e)} s_3(f), \\
s_3(e) &= \sum_{f \in LC(e)} s(f) + \sum_{f \in RS(e)} s_3(f)
\end{aligned}
$$

計算量解析

- 上手な順序を $O(|V|)$ 時間で見つける (演習問題)
- 各 $e$ に対して，$s_1(e), s_2(e), s_3(e), s(e)$ を計算するために必要な値は高々2 つ
- $\therefore$ 計算量 $= O(|V|)$

## アルゴリズム：動的計画法

1. 根 $r$ を任意に定め，順序木と見なす (根辺を $e_r$ とする)
2. 辺集合上のある上手な順序に従って，
   各辺 $e$ に対して $s_1(e), s_2(e), s_3(e), s(e)$ を計算
3. $s(e_r)$ を出力

## 計算量

$O(|V|)$ 時間

これは $O(\sqrt{|V|}|E|) = O(|V|^{1.5})$ 時間よりも速い

# 目次

## 今日の目標

木に対して，効率的アルゴリズムが設計できるようになる

- 最大独立集合問題
- 最小支配集合問題
- 最大マッチング問題

キーワード：再帰，動的計画法

## 次回以降

今回の手法を，木分解に対して適用していく

## 次回

いきなり木分解を扱うのは難しいので,「道分解」を扱う

## 残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

# 目次