離散最適化基礎論 第 12 回
木分解構成アルゴリズム

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 2 月 3 日

最終更新：2017 年 2 月 10 日　09:10

スケジュール 前半

スケジュール 後半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

概要

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして
グラフの木分解を取り上げ，
- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化の神髄」だから

木幅 — 「木っぽさ」を表す尺度

この講義のキーワード (と荒っぽい説明)

グラフの木幅	グラフの「木っぽさ」を表す尺度 (の 1 つ)
グラフの木分解	グラフを「木っぽく」表した構造
動的計画法	木分解上の効率的アルゴリズム
オートマトン	動的計画法に基づくアルゴリズムの解釈
Courcelle の定理	上記と論理学に基づく『メタアルゴリズム』

木幅と木分解の面白さ

次の主題が有機的に結びつく面白い話題
- グラフ
- アルゴリズム
- オートマトン
- 論理 (特に，有限モデル理論)

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

今日の目標

- 木分解を構成することについて何が知られているか，概観する
- 木分解を構成する指数時間厳密アルゴリズムを理解する
  - その設計原理が他の問題にも使えるようになる

目次

グラフの木分解：定義

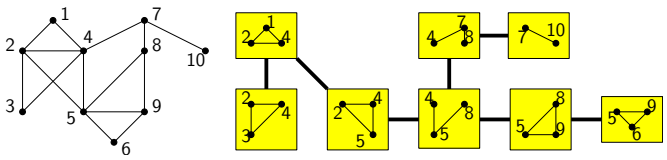
木分解 (tree decomposition) とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは
$\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する



木分解の節点を バッグ (bag) と呼ぶことがある

グラフの木幅

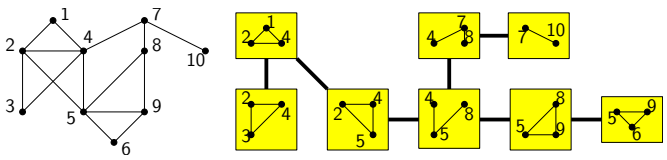
グラフの木幅とは？

- 無向グラフ G の木分解 $\mathcal{T}$ の 幅 (width)

$$\mathtt{tw}(\mathcal{T}) = \max\{|S| - 1 \mid S \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点 }\}$$

- 無向グラフ G の 木幅 (treewidth)

$$\mathtt{tw}(G) = \min\{\mathtt{tw}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \text{ は } G \text{ の木分解 }\}$$



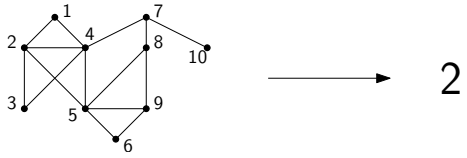
$\mathtt{tw}(G) = 2$

目次

木幅を計算する問題

木幅を計算する問題

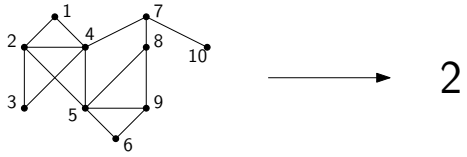
- 入力：無向グラフ G
- 出力：G の木幅 $\mathtt{tw}(G)$



木幅を計算する問題は難しい

木幅を計算する問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：G の木幅 $\mathtt{tw}(G)$



木幅を計算する問題は NP 困難

- つまり，多項式時間では解けない

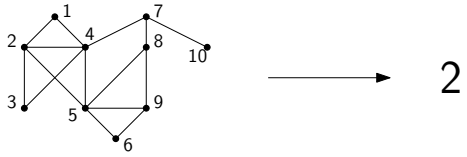
(Arnborg, Proskurowski '89)

(P $\neq$ NP の仮定の下で)

木幅を計算する問題は難しい：未解決問題

木幅を計算する問題

- 入力：無向グラフ G
- 出力：G の木幅 $\mathtt{tw}(G)$



未解決問題

平面的グラフの木幅は多項式時間で計算できるか？

平面的グラフ：平面上に辺交差なく描けるグラフ

NP 困難問題へのアプローチ

NP 困難問題へのアプローチ

NP 困難問題をどのように「解く」のか？

- 近似アルゴリズム (approximation algorithm)
  - 多項式時間で動作することは保証
  - 出力の質を妥協
- 厳密アルゴリズム (exact algorithm)
  - 多項式時間で動作することは妥協
  - 出力の質を保証

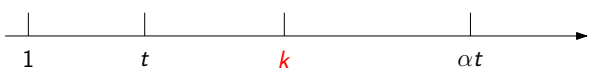
これらの考え方が組み合わせられることもある

木幅を計算する問題：近似アルゴリズム

木幅の近似とは？

実数 k が木幅 t の α 近似であるとは，次を満たすこと

$$t \leq k \leq \alpha t$$



- α を近似比 (approximation ratio) と呼ぶ
- $\alpha \geq 1$ が小さければ小さいほど，よい近似

木幅を計算する問題：近似アルゴリズム (続)

多項式時間で達成できる近似比 ($n = |V|$)

- $O(\log n)$ (Bodlaender, Gilbert, Hafsteinsson, Kloks '95)
- $O(\log \mathrm{tw}(G))$ (Amir '01, '10)
- $O(\sqrt{\log \mathrm{tw}(G)})$ (Feige, Hajiaghayi, Lee '05, '08)

未解決問題

定数近似比を多項式時間で達成できるか？

木幅を計算する問題：厳密アルゴリズム

指数時間計算量の改善の歴史 ($n = |V|$)

- $O(2^n \mathrm{poly}(n))$ (割と簡単)
- $O(1.8899^n \mathrm{poly}(n))$ (Fomin, Kratsch, Todinca Villanger '08)
- $O(1.7549^n \mathrm{poly}(n))$ (Fomin, Villanger '12)

「指数の底」を小さくすることに注力されている

木幅を計算する問題：固定パラメータ・アルゴリズム

固定パラメータ・アルゴリズムの研究もされている

定理 (Bodlaender '96)

入力として与えられたグラフ G に対して，$t^{O(t^3)}n$ 時間で次ができる

- $\mathrm{tw}(G) \leq t$ ならば，幅 t の木分解を構成する
- $\mathrm{tw}(G) > t$ ならば，「$\mathrm{tw}(G) > t$」であると教えてくれる

ただし，n は G の頂点数

これは Courcelle の定理や動的計画法の文脈で重要

- Courcelle の定理や動的計画法を適用するとき，木分解が必要だから

木幅を計算する問題：固定パラメータ・アルゴリズム — 帰結の例

定理 (Bodlaender '96)

入力として与えられたグラフ G に対して，$t^{O(t^3)}n$ 時間で次ができる

- $\mathrm{tw}(G) \leq t$ ならば，幅 t の木分解を構成する
- $\mathrm{tw}(G) > t$ ならば，「$\mathrm{tw}(G) > t$」であると教えてくれる

ただし，n は G の頂点数

第 7 回講義より

無向グラフ $G = (V, E)$ の最大独立集合の要素数は，
G の素敵な木分解 $\mathcal{T}$ が与えられていれば，
$O(2^t t^2 |V|)$ 時間で計算できる ($t = \mathrm{tw}(\mathcal{T})$)

この 2 つをまとめると次がいえる

G の木幅が t であるとき，$t^{O(t^3)}n$ 時間で
G の最大独立集合の要素数が分かる (t を事前に知る必要はない)

木幅を計算する問題：固定パラメータ近似アルゴリズム

固定パラメータ近似アルゴリズムの研究もされている

最近の定理
(Bodlaender, Drange, Dregi, Fomin, Lokshtanov, Pilipczuk '16)

入力として与えられたグラフ G に対して，$2^{O(t)}n$ 時間で次ができる

- $\mathrm{tw}(G) \leq t$ ならば，幅 $5t + 4$ 以下の木分解を構成する
- $\mathrm{tw}(G) > t$ ならば，「$\mathrm{tw}(G) > t$」であると教えてくれる

ただし，n は G の頂点数

これを使えば次が導ける

帰結

G の木幅が t であるとき，$2^{O(t)}n$ 時間で
G の最大独立集合の要素数が分かる (t を事前に知る必要はない)

木幅を計算する問題：厳密アルゴリズム

指数時間計算量の改善の歴史 ($n = |V|$)

- $O(2^n \mathrm{poly}(n))$ (割と簡単)
- $O(1.8899^n \mathrm{poly}(n))$ (Fomin, Kratsch, Todinca Villanger '08)
- $O(1.7549^n \mathrm{poly}(n))$ (Fomin, Villanger '12)

「指数の底」を小さくすることに注力されている

今から行うこと

$O(2^n \mathrm{poly}(n))$ 時間厳密アルゴリズムの紹介

目次

復習：k 木

無向グラフ $G = (V, E)$

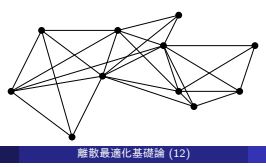
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k + 1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

例：3 木

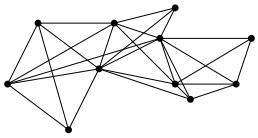


復習：部分 k 木

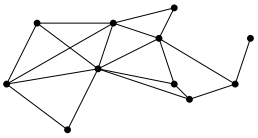
無向グラフ $G = (V, E)$

部分 k 木 (partial k-tree) とは？

G が部分 k 木であるとは，それが k 木の部分グラフであること



3 木



部分 3 木

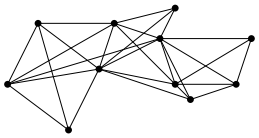
復習：部分 k 木 ⇔ 木幅が k 以下

無向グラフ G

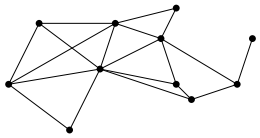
目標とする定理

任意の自然数 $k \geq 1$ に対して

$$G \text{ は部分 } k \text{ 木} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tw}(G) \leq k$$



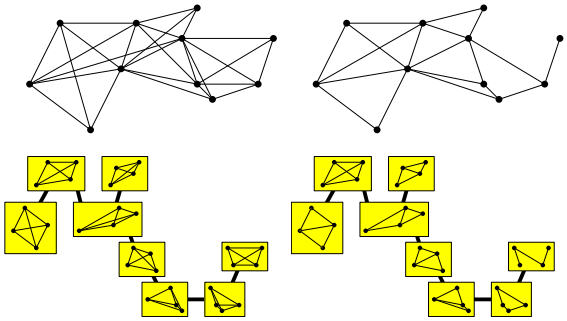
3 木



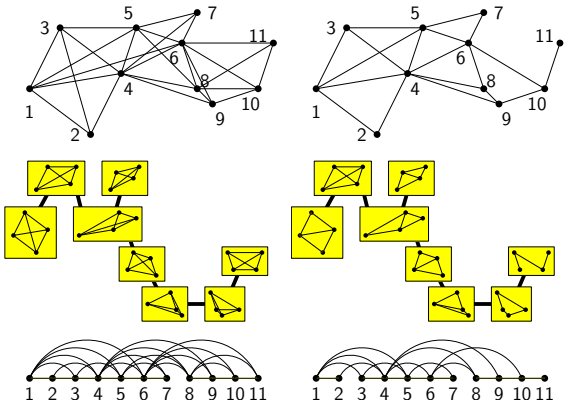
部分 3 木

つまり，tw(部分 3 木) ≤ 3

復習：証明から得られる木分解



証明から得られる線形順序



線形順序と木幅

無向グラフ $G = (V, E)$

線形順序から得られる木幅

- 頂点を 1 列に並べ，線形順序 $L\colon v_1, v_2, \ldots, v_n$ を得る
- 各添え字 i に対して，次を考える

$$\deg_L(v_i) := |\{j \mid j < i, \{v_j, v_i\} \in E\}|$$

つまり，v_i よりも「前」にある v_i の隣接頂点数

- その最大値が線形順序から得られる木分解 $\mathcal{T}_L$ の幅

$$\mathrm{tw}(\mathcal{T}_L) = \max_i \deg_L(v_i)$$

つまり，次が成り立つ

$$\mathrm{tw}(G) = \min_L \mathrm{tw}(\mathcal{T}_L)$$

$\therefore \mathrm{tw}(\mathcal{T}_L)$ を最小化する線形順序 L を見つければよい

ここまでのまとめ

頂点集合上の線形順序 $L\colon v_1, v_2, \ldots, v_n$ に対して
L から得られる木分解を $\mathcal{T}_L$ とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{tw}(\mathcal{T}_L) &= \max_i \deg_L(v_i) \\ \therefore \mathrm{tw}(G) &= \min_L \mathrm{tw}(\mathcal{T}_L) \end{aligned}$$

$\mathrm{tw}(\mathcal{T}_L)$ を最小化する線形順序 L を求めればよい

簡単なアルゴリズム

1. すべての線形順序 L を考える
2. 各 L に対して $\mathrm{tw}(\mathcal{T}_L)$ を計算し，最大値を出力

計算量：$O(n!m)$ $(n = |V|, m = |E|)$

目標：この計算量を改善する

目次

基本的なアイディア

- 頂点を 1 つずつ追加して，線形順序 L を作っていく
- しかし，v_i を追加するとき，$v_1, \ldots, v_{i-1}$ がどのように並んでいるか，ということは，$\deg_L(v_i)$ の計算に無関係

$\rightsquigarrow$ つまり，順序 $v_1, \ldots, v_{i-1}$ を覚える必要はない

- 集合 $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ を覚えておけば十分である

$\rightsquigarrow$ 再帰式

再帰式の準備

記法

任意の $S \subseteq V$ と $v \in V - S$ に対して

$$f(v,S) = \min \left\{ \max_{u \in S \cup \{v\}} \deg_L(u) \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ は } S \cup \{v\} \text{ 上の線形順序で} \\ v \text{ が最後に来るもの} \end{array} \right\}$$

記法の気持ち

- v：今から追加する頂点 (v_i)
- S：今まで追加された頂点の集合 ($\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$)

再帰式

$S \subseteq V$, $v \in V - S$

再帰式

$S = \emptyset$ のとき

$$f(v,S) = 0$$

$S \neq \emptyset$ のとき

$$f(v,S) = \max \left\{ \min_{u \in S} f(u, S - \{u\}),\ |\{w \mid w \in S, \{w,v\} \in E\}| \right\}$$

この再帰式に従って，$f(v,S)$ を $|S|$ が小さい方から順に計算していけばよい

アルゴリズム

木幅を計算する厳密アルゴリズム

入力：無向グラフ $G = (V,E)$

1. 任意の集合 $S \subseteq V$ に対して，$|S|$ が小さい方から順に
2. 任意の頂点 $v \in V - S$ に対して
3. $S = \emptyset$ ならば，$f(v,S) = 0$
4. $S \neq \emptyset$ ならば，

$$f(v,S) = \max \left\{ \min_{u \in S} f(u, S - \{u\}),\ |\{w \mid w \in S, \{w,v\} \in E\}| \right\}$$

5. $\min_{v \in V} f(v, V - \{v\})$ を出力

アルゴリズム：計算量

各 $f(v,S)$ の計算にかかる時間 $\leq |S| + \deg(v)$ なので，

$$\begin{aligned} \text{計算量} &\leq \sum_{S \subseteq V} \sum_{v \in V} (|S| + \deg(v)) \\ &= \sum_{S \subseteq V} \left(|S| + \sum_{v \in V} \deg(v) \right) \\ &= \sum_{S \subseteq V} (|S| + 2m) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (i + 2m) \\ &\leq 2^n (n + 2m) = O(2^n (n+m)) \end{aligned}$$

つまり，このアルゴリズムの計算量は $O(2^n \operatorname{poly}(n))$

アルゴリズム：補足

木幅を計算する厳密アルゴリズム

入力：無向グラフ $G = (V,E)$

1. 任意の集合 $S \subseteq V$ に対して，$|S|$ が小さい方から順に
2. 任意の頂点 $v \in V - S$ に対して
3. $S = \emptyset$ ならば，$f(v,S) = 0$
4. $S \neq \emptyset$ ならば，

$$f(v,S) = \max \left\{ \min_{u \in S} f(u, S - \{u\}),\ |\{w \mid w \in S, \{w,v\} \in E\}| \right\}$$

5. $\min_{v \in V} f(v, V - \{v\})$ を出力

- このように，「すべての部分集合の上で行う動的計画法」を Held-Karp 型動的計画法，Bellman-Held-Karp 型動的計画法，部分集合上動的計画法 (dynamic programming over subsets) と呼ぶ

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 木分解を構成することについて何が知られているか，概観する
- 木分解を構成する指数時間厳密アルゴリズムを理解する
  - その設計原理が他の問題にも使えるようになる