離散最適化基礎論 第 10 回
木幅と論理：オートマトン

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 1 月 20 日

最終更新：2017 年 1 月 20 日　10:39

スケジュール 前半

1. 離散最適化における木分解の役割 (10/7)
- ⋆ 休講 (国内出張) (10/14)
2. 木に対するアルゴリズム設計 (10/23)
3. 道幅と道分解 (10/30)
4. 道分解を用いたアルゴリズム設計 (11/4)
- ⋆ 休講 (海外出張) (11/11)
5. 木分解と木幅 (11/18)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/25)
6. 木幅の性質 (12/2)

スケジュール 後半 (予定)

7. 木分解を用いたアルゴリズム設計 (12/9)
8. 木分解を用いたアルゴリズム設計：連結性 (12/16)
- ⋆ 休講 (天皇誕生日) (12/23)
- ⋆ 冬季休業 (12/30)
9. 木幅と論理：単項二階論理 (1/6)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/13)
10. 木幅と論理：オートマトン (1/20)
11. 木幅と論理：アルゴリズム設計 (1/27)
12. 木分解構成アルゴリズム：準備 (2/3)
13. 木分解構成アルゴリズム (2/10)
- ⋆ 期末試験 (2/17)

注意：予定の変更もありうる

概要

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして
グラフの木分解を取り上げ，
- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化の神髄」だから

木幅 — 「木っぽさ」を表す尺度

この講義のキーワード (と荒っぽい説明)

グラフの木幅	グラフの「木っぽさ」を表す尺度 (の 1 つ)
グラフの木分解	グラフを「木っぽく」表した構造
動的計画法	木分解上の効率的アルゴリズム
オートマトン	動的計画法に基づくアルゴリズムの解釈
Courcelle の定理	上記と論理学に基づく『メタアルゴリズム』

木幅と木分解の面白さ

次の主題が有機的に結びつく面白い話題
- グラフ
- アルゴリズム
- オートマトン
- 論理 (特に，有限モデル理論)

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

今日の目標

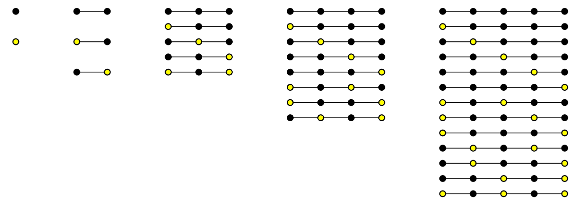
オートマトンと単項二階論理の関係を理解する
- オートマトンと正則言語
- 単項二階論理
- Büchi の定理

目次

道から文字列へ (1)

今日の講義において
グラフ一般を扱うのは大変なので，道に限定して考察する

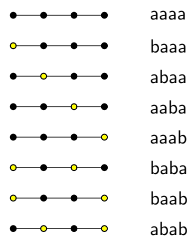
頂点数 5 以下の道の独立集合を全部描いてみる



$\boxed{\text{復習}}$：独立集合とは，互いに隣接しない頂点から成る集合

道から文字列へ (2)

独立集合を文字列に対応させる

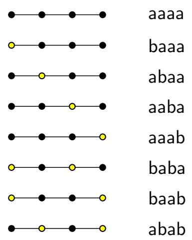


独立集合の要素でない頂点 $\leftrightarrow$ a
独立集合の要素である頂点 $\leftrightarrow$ b

道から文字列へ (3)

道の独立集合から，文字列の集合 (言語) が得られる

$$L = \{w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ は道の独立集合から得られる}\}$$

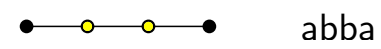


質問
この言語 L はどのような性質を持っているのか？

独立集合から得られる言語の性質 (1)

$$L = \{w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ は道の独立集合から得られる}\}$$

観察 1
w において，b が 2 つ続いている $\Rightarrow w \notin L$



観察 2
w において，b が 2 つ続かない $\Rightarrow w \in L$

つまり，

観察のまとめ
w において，b が 2 つ続かない $\Leftrightarrow w \in L$

独立集合から得られる言語の性質 (2)

$$\begin{aligned} L &= \{w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ は道の独立集合から得られる}\} \\ &= \{w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ において b は 2 つ続かない}\} \end{aligned}$$

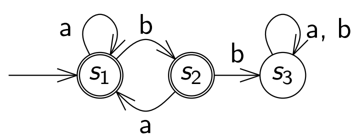
判定問題を考える
$w \in L$ であるかどうか，判定するにはどうすればよいか？

$\rightsquigarrow$ 「オートマトン」という判定装置を考える

独立集合から得られる言語の性質 (3)

$$\begin{aligned} L &= \{w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ は道の独立集合から得られる}\} \\ &= \{w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ において b は 2 つ続かない}\} \end{aligned}$$

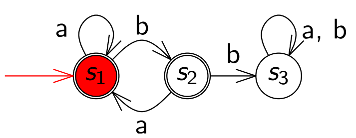
オートマトン (の例)



独立集合から得られる言語の性質 (4)

$$\begin{aligned} L &= \{w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ は道の独立集合から得られる}\} \\ &= \{w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ において b は 2 つ続かない}\} \end{aligned}$$

オートマトン (の例)

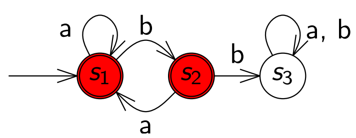


初期状態

独立集合から得られる言語の性質 (5)

$$\begin{aligned} L &= \{w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ は道の独立集合から得られる}\} \\ &= \{w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ において b は 2 つ続かない}\} \end{aligned}$$

オートマトン (の例)

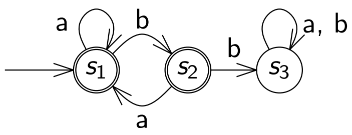


受理状態

独立集合から得られる言語の性質 (6)

$$
\begin{aligned}
L &= \{ w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ は道の独立集合から得られる } \} \\
&= \{ w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ において b は 2 つ続かない } \}
\end{aligned}
$$

オートマトン (の例)



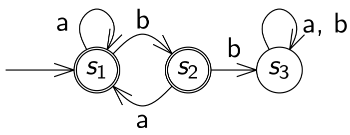
ababab $\in L$ か，判定する　　abaaba

ababab $\in L$ である

独立集合から得られる言語の性質 (7)

$$
\begin{aligned}
L &= \{ w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ は道の独立集合から得られる } \} \\
&= \{ w \mid w \in \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \text{ において b は 2 つ続かない } \}
\end{aligned}
$$

オートマトン (の例)



abbabb $\in L$ か，判定する　　abbabb

abbbabb $\notin L$ である

ここまでのまとめ と ここからの話

ここまでのまとめ

- 道の独立集合から，言語が得られる
- その言語はオートマトンによって記述できる

ここからの話

- オートマトンの定義
- オートマトンと単項二階論理の関係

目次

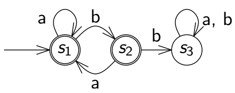
非決定性有限オートマトン (Non-deterministic finite automaton)

非決定性有限オートマトンとは？

次の 5 つから構成される $\mathfrak{A}$

- 有限集合 S：　状態の集合
- 有限集合 Σ：　アルファベット
- $s_I \in S$：　初期状態
- $\Delta \subseteq S \times \Sigma \times S$：遷移関係
- $F \subseteq S$：　受理状態の集合

$\mathfrak{A} = (S, \Sigma, s_I, \Delta, F)$ と書くこともある

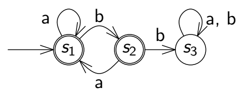


$S = \{s_1, s_2, s_3\}, \Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, s_I = s_1, F = \{s_1, s_2\}$

非決定性有限オートマトン (続)

遷移関係 $\Delta \subseteq S \times \Sigma \times S$

$$\Delta = \{(s_1, \mathrm{a}, s_1), (s_1, \mathrm{b}, s_2), (s_2, \mathrm{a}, s_1), (s_2, \mathrm{b}, s_3), (s_3, \mathrm{a}, s_3), (s_3, \mathrm{b}, s_3)\}$$



遷移関係の見方

$$(s, x, s') \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad s \xrightarrow{x} s'$$

非決定性有限オートマトン：受理と棄却

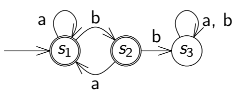
非決定性有限オートマトン $\mathfrak{A} = (S, \Sigma, s_I, \Delta, F)$，文字列 $w = x_1 x_2 \ldots x_n \in \Sigma^*$

オートマトンによる文字列の受理

$\mathfrak{A}$ が w を受理するとは，次を満たす $s_0, s_1, \ldots, s_n$ が存在すること

- $s_0 = s_I$　(初期状態)
- 任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$(s_{i-1}, x_i, s_i) \in \Delta$　(遷移)
- $s_n \in F$　(受理状態)

受理しないとき，棄却するという



$w =$ ababa のとき，
$(s_1, \mathrm{a}, s_1), (s_1, \mathrm{b}, s_2), (s_2, \mathrm{a}, s_1), (s_1, \mathrm{b}, s_2), (s_2, \mathrm{a}, s_1) \in \Delta$

非決定性有限オートマトン：正則言語

アルファベット Σ

言語 (language) とは？

Σ 上の言語 L とは，Σ 上の文字列の集合

$$L \subseteq \Sigma^*$$

正則言語 (regular language) とは？

言語 L が正則であるとは，ある非決定性有限オートマトン $\mathfrak{A}$ が存在して

$$L = \{ w \mid \mathfrak{A} \text{ は } w \text{ を受理する } \}$$

注意

- 「正則言語」は「正規言語」とも呼ばれる
- 上に挙げた正則言語の定義は本来定理であり，普通は別の形 (文法) で定義する

詳細は『オートマトン理論』,『形式言語理論』などを参照

目次

文字列に対する単項二階論理式

アルファベット Σ，文字列 $w = w_1 w_2 \dots w_n \in \Sigma^*$

文字列に対する単項二階論理式

変数
- 位置 $i \in [n]$
- 位置の部分集合 $X \subseteq [n]$

論理結合子
- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

量化子
- $\forall, \exists$

定数
- Σ の要素

述語
- $i, j \in [n]$ に対して，「$i = j$」
- $i \in [n]$, $X \subseteq [n]$ に対して，「$i \in S$」
- $X_1, X_2 \subseteq [n]$ に対して，「$X_1 \subseteq X_2$」
- $i \in [n], \mathrm{a} \in \Sigma$ に対して，「$w_i = \mathrm{a}$」
- $i, j \in [n]$ に対して，「$i \leq j$」

ただし，$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

これらを用いて記述できる論理式が単項二階論理式

文字列に対する単項二階論理式：例

例

$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ で，$w \in \Sigma^*$ が次を満たすとする

b が 2 つ続かない

- このとき，

$$\begin{aligned} \phi &= \forall\, i\ (w_i = \mathrm{b} \rightarrow \\ &\quad \neg \exists\, j\ (w_j = \mathrm{b} \wedge i \leq j \wedge i \neq j \wedge \forall\, k\ (k \leq i \vee j \leq k))) \end{aligned}$$

  とすると，$w \models \phi$
- 逆に，$w \models \phi$ ならば，w において，b が 2 つ続かない

単項二階論理式が定義する言語

アルファベット Σ，単項二階論理式 ϕ

単項二階論理式が定義する言語とは？

ϕ が定義する言語とは，次の言語

$$\{w \in \Sigma^* \mid w \models \phi\}$$

先ほどの例：$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ で，

$$\begin{aligned} L &= \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ において b が 2 つ続かない}\} \\ \phi &= \forall\, i\ (w_i = \mathrm{b} \rightarrow \\ &\quad \neg \exists\, j\ (w_j = \mathrm{b} \wedge i \leq j \wedge i \neq j \wedge \forall\, k\ (k \leq i \vee j \leq k))) \end{aligned}$$

とすると，L は ϕ が定義する言語となる

目次

Büchi の定理

Büchi の定理はオートマトンと単項二階論理をつなぐ

Büchi の定理

アルファベット Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対して

L が正則 $\Leftrightarrow$ ある単項二階論理式 ϕ が存在して，ϕ が L を定義する

先ほどの例：$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ で，

$$\begin{aligned} L &= \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ において b が 2 つ続かない}\} \\ \phi &= \forall\, i\ (w_i = \mathrm{b} \rightarrow \\ &\quad \neg \exists\, j\ (w_j = \mathrm{b} \wedge i \leq j \wedge i \neq j \wedge \forall\, k\ (k \leq i \vee j \leq k))) \end{aligned}$$

とすると，L は ϕ が定義する言語となり，L は正則だった

Büchi の定理：証明に向けて

Büchi の定理はオートマトンと単項二階論理をつなぐ

Büchi の定理

アルファベット Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対して

L が正則 $\Leftrightarrow$ ある単項二階論理式 ϕ が存在して，ϕ が L を定義する

証明の方針：
- 「$\Rightarrow$」L を受理するオートマトン $\mathfrak{A}$ から ϕ を作る
- 「$\Leftarrow$」ϕ から L を受理するオートマトン $\mathfrak{A}$ を作る

今日は「$\Rightarrow$」の証明を行い，次回「$\Leftarrow$」の証明を行う

Büchi の定理：帰結

Büchi の定理はオートマトンと単項二階論理をつなぐ

Büchi の定理

アルファベット Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対して

L が正則 $\Leftrightarrow$ ある単項二階論理式 ϕ が存在して，ϕ が L を定義する

Büchi の定理の「$\Leftarrow$」の証明の帰結

与えられた単項二階論理式 ϕ に対して，
文字列 w が ϕ の定義する言語 L の要素かどうか判定するアルゴリズムで
$O(f(|\phi|) + |w|)$ 時間で動くものが存在する

- $f(\cdot)$ はある関数，$|\phi|$ は ϕ の長さ，$|w|$ は w の長さ
- これが Courcelle の定理の証明に効いてくる

Büchi の定理：$\Rightarrow$ の証明 (1)

Büchi の定理はオートマトンと単項二階論理をつなぐ

Büchi の定理

アルファベット Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対して

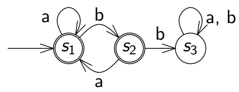
L が正則 $\Leftrightarrow$ ある単項二階論理式 ϕ が存在して，ϕ が L を定義する

「$\Rightarrow$」の証明：

- $\mathfrak{A} = (S, \Sigma, s_I, \Delta, F)$ が L を受理するオートマトンであるとする (仮定より，必ず存在)
- $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ とする
- 考え方：「位置の部分集合」と「受理する経路における状態」を対応させる

Büchi の定理：$\Rightarrow$ の証明 (2)

気持ち：状態 s_1, s_2, s_3 に対して，位置の部分集合を表す変数 X_1, X_2, X_3 を導入



$w =$ ababa のとき，
$(s_1, \mathrm{a}, s_1), (s_1, \mathrm{b}, s_2), (s_2, \mathrm{a}, s_1), (s_1, \mathrm{b}, s_2), (s_2, \mathrm{a}, s_1) \in \Delta$

1:	初期状態 s_1	$\rightsquigarrow$	$1 \in X_1$
2:	(s_1, a, s_1)	$\rightsquigarrow$	$2 \in X_1$
3:	(s_1, b, s_2)	$\rightsquigarrow$	$3 \in X_2$
4:	(s_2, a, s_1)	$\rightsquigarrow$	$4 \in X_1$
5:	(s_1, b, s_2)	$\rightsquigarrow$	$5 \in X_2$
6:	(s_2, a, s_1)	$\rightsquigarrow$	$6 \in X_1$

注：「6」はこの文字列の位置としては現れない

Büchi の定理：$\Rightarrow$ の証明 (3)

- 各状態 s_n に対応する変数 X_n を考える
- 不変条件：i 文字目を読む直前の状態が s_n のとき，$i \in X_n$
- 構成する単項二階論理式は以下の形をとる

$$\phi = \begin{cases} \exists X_1 \exists X_2 \ldots \exists X_N\ (\psi_1 \land \psi_2 \land \psi_3 \land \psi_4 \land \psi_5) & (\varepsilon \notin L \text{ のとき}) \\ \exists X_1 \exists X_2 \ldots \exists X_N\ (\psi_1 \land \psi_2 \land \psi_3 \land \psi_4) & (\varepsilon \in L \text{ のとき}) \end{cases}$$

- 括弧の中身は次を表す論理式の連言 (AND)
  - $\psi_1 =$ 各位置において，取りうる状態は 1 つだけ
  - $\psi_2 =$ 初期状態から始まる
  - $\psi_3 =$ 次の状態は遷移関係によって定まる
  - $\psi_4 =$ 最終状態は受理状態である
  - $(\psi_5 =$ 空列ではない$)$

Büchi の定理：$\Rightarrow$ の証明 (4)

考える論理式 1

各位置において，取りうる状態は 1 つだけ

次のように表現できる

$$\psi_1 = \forall\, i \left(\bigvee_{n \in [N]} (i \in X_n) \land \bigwedge_{n, n' \in [N], n \neq n'} (i \notin X_n \lor i \notin X_{n'}) \right)$$

考える論理式 2

初期状態から始まる

次のように表現できる (初期状態は s_I なので，対応する変数は X_I)

$$\psi_2 = \forall\, i\ (\forall\, j\ (i \leq j) \to i \in X_I)$$

Büchi の定理：$\Rightarrow$ の証明 (5)

考える論理式 3

次の状態は遷移関係によって定まる

次のように表現できる

$$\begin{aligned} \psi_3 \;=\; & \forall i\ (\forall\, j\ (i \leq j \land i \neq j \land \forall\, k\ (k \leq i \lor j \leq k)) \to \\ & \bigvee_{(s_m, \mathrm{a}, s_n) \in \Delta} (i \in X_m \land w_i = \mathrm{a} \land j \in X_n)) \end{aligned}$$

Büchi の定理：$\Rightarrow$ の証明 (5)

考える論理式 4

最終状態は受理状態である

次のように表現できる

$$\psi_4 = \forall\, i\ (\forall\, j\ (j \leq i) \to \bigvee_{(s_m, \mathrm{a}, s_n) \in \Delta, s_n \in F} (i \in X_m \land w_i = \mathrm{a}))$$

考える論理式 4

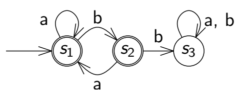
空列ではない

次のように表現できる

$$\psi_5 = \exists\, i\ (i = i)$$

$\square$

Büchi の定理：$\Rightarrow$ の証明 — 例



$$\begin{aligned} \phi \;=\; & \exists\, X_1\ (\exists\, X_2\ (\exists\, X_3\ (\\ & \quad \forall\, i\ ((i \in X_1 \lor i \in X_2 \lor i \in X_3) \\ & \qquad \land (i \notin X_1 \lor i \notin X_2) \land (i \notin X_1 \lor i \notin X_3) \land (i \notin X_2 \lor i \notin X_3)) \\ & \quad \land \forall\, i\ (\forall\, j\ (i \leq j) \to i \in X_1) \\ & \quad \land \forall\, i\ (\forall\, j\ (i \leq j \land i \neq j \land \forall\, k\ (k \leq i \lor j \lor k)) \to \\ & \qquad (i \in X_1 \land w_i = \mathrm{a} \land j \in X_1) \land (i \in X_1 \land w_i = \mathrm{b} \land j \in X_2) \land \\ & \qquad (i \in X_2 \land w_i = \mathrm{a} \land j \in X_1) \land (i \in X_2 \land w_i = \mathrm{b} \land j \in X_3) \land \\ & \qquad (i \in X_3 \land w_i = \mathrm{a} \land j \in X_3) \land (i \in X_3 \land w_i = \mathrm{b} \land j \in X_3)) \\ & \quad \land \forall\, i\ (\forall\, j\ (j \leq i) \to \\ & \qquad (i \in X_1 \land w_i = \mathrm{a}) \land (i \in X_1 \land w_i = \mathrm{b}) \land (i \in X_2 \land w_i = \mathrm{a}))))) \end{aligned}$$

目次

今日の目標

オートマトンと単項二階論理の関係を理解する

- オートマトンと正則言語
- 単項二階論理
- Büchi の定理

次回

- Büchi の定理の証明の残り (アルゴリズム)
- Courcelle の定理の証明の雰囲気