離散最適化基礎論 第 6 回
木幅の性質

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 12 月 2 日

最終更新：2016 年 12 月 7 日　11:46

スケジュール 前半 (予定)

1	離散最適化における木分解の役割	(10/7)
⋆	休講 (国内出張)	(10/14)
2	木に対するアルゴリズム設計	(10/23)
3	道幅と道分解	(10/30)
4	道分解を用いたアルゴリズム設計	(11/4)
⋆	休講 (海外出張)	(11/11)
5	木分解と木幅	(11/18)
⋆	休講 (調布祭)	(11/25)
6	木幅の性質	(12/2)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7	木分解を用いたアルゴリズム設計：頂点集合の選択・分割	(12/9)
8	木分解を用いたアルゴリズム設計：辺集合の選択・分割	(12/16)
⋆	休講 (天皇誕生日)	(12/23)
⋆	冬季休業	(12/30)
9	木幅と論理：単項二階論理	(1/6)
⋆	休講 (センター試験準備)	(1/13)
10	木幅と論理：オートマトン	(1/20)
11	木幅と論理：アルゴリズム設計	(1/27)
12	木分解構成アルゴリズム：準備	(2/3)
13	木分解構成アルゴリズム	(2/10)
⋆	期末試験	(2/17?)

注意：予定の変更もありうる

概要

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして
グラフの木分解を取り上げ，
- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

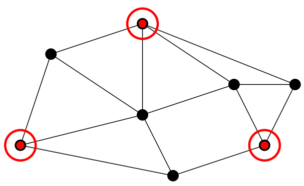
について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化の神髄」だから

テーマ：離散最適化問題の解きやすさ と 解きにくさ

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

事実

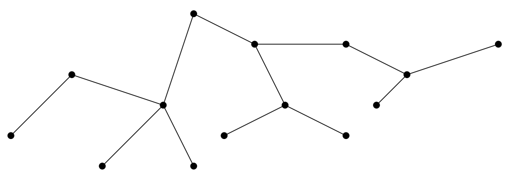
グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

直感？

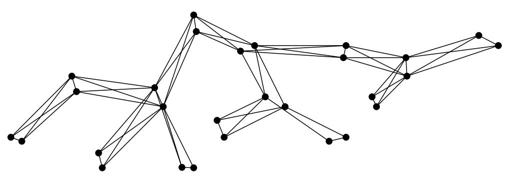
グラフが木に 近ければ，簡単に解けそう？

木に近い，とは？

これは木



これは木に近い？ $\rightsquigarrow$ 「木っぽさ」を表す尺度を考える必要あり



木幅 — 「木っぽさ」を表す尺度

この講義のキーワード (と荒っぽい説明)

グラフの木幅	グラフの「木っぽさ」を表す尺度 (の 1 つ)
グラフの木分解	グラフを「木っぽく」表した構造
動的計画法	木分解上の効率的アルゴリズム
オートマトン	動的計画法に基づくアルゴリズムの解釈
Courcelle の定理	上記と論理学に基づく『メタアルゴリズム』

木幅と木分解の面白さ

次の主題が有機的に結びつく面白い話題
- グラフ
- アルゴリズム
- オートマトン
- 論理 (特に，有限モデル理論)

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

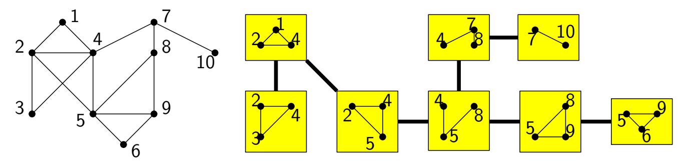
今日の目標

今日の目標
木幅と木分解の性質をさらに理解する
- 辺の縮約とマイナー
- 部分 k 木
- 格子の木幅

目次

グラフの木分解：定義

木分解 (tree decomposition) とは？
無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，
(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合
(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する
(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは $\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する



木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

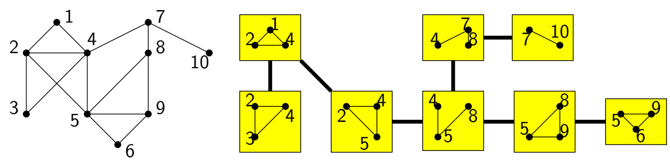
グラフの木幅

グラフの木幅とは？
- 無向グラフ G の木分解 $\mathcal{T}$ の幅 (width)

$$\mathtt{tw}(\mathcal{T}) = \max\{|S| - 1 \mid S \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点}\}$$

- 無向グラフ G の木幅 (treewidth)

$$\mathtt{tw}(G) = \min\{\mathtt{tw}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \text{ は } G \text{ の木分解}\}$$



$\mathtt{tw}(G) = 2$

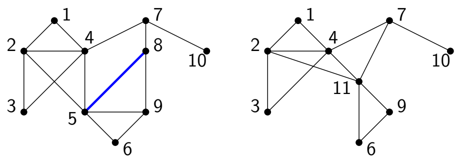
目次

辺の縮約

無向グラフ $G = (V, E)$，$e = \{u, v\} \in E$

辺の縮約 (contraction) とは？
頂点 u, v を削除し，新たな頂点 w を追加し，
次のように辺を追加してできるグラフ

$x \in V - \{u, v\}$ が $\{x, u\} \in E$ または $\{x, v\} \in E$ を満たす $\Rightarrow$ 辺 $\{x, w\}$ を追加



G $\quad$ $G/\{5, 8\}$

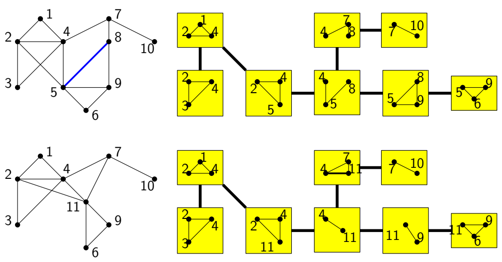
この操作によってできるグラフを G/e と書く

辺の縮約と木幅

無向グラフ $G = (V, E)$，$e = \{u, v\} \in E$

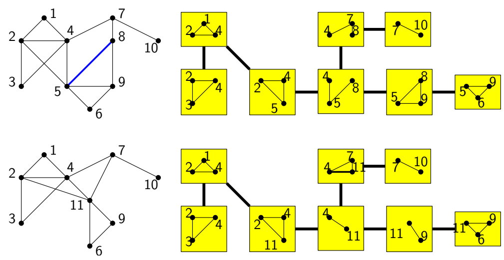
命題：辺の縮約と木幅の関係
$\mathtt{tw}(G/e) \leq \mathtt{tw}(G)$

証明に対する直感



辺の縮約と木幅：証明

証明：$\mathcal{T}$ を G の木分解とする
- $\mathcal{T}$ から G/e の木分解 $\mathcal{T}'$ を次のように得る
  - $\mathcal{T}$ の節点に現れる u, v を新たに追加した頂点 w に置き換える
- これが本当に G/e の木分解であることを確認することは簡単 (演習問題)
- $\mathcal{T}'$ の幅は $\mathcal{T}$ の幅以下 □

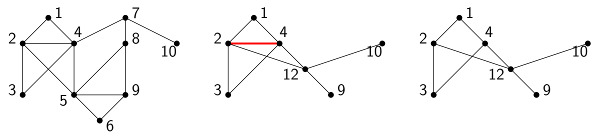


グラフのマイナー

無向グラフ G, H

マイナーとは？

H が G のマイナーであるとは，
G の頂点や辺の除去，辺の縮約を繰り返しで H が得られること

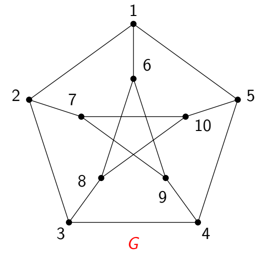


今までの議論の帰結

H が G のマイナー $\Rightarrow \mathtt{tw}(H) \le \mathtt{tw}(G)$

グラフのマイナー：例

次のグラフ G の木幅は何か？



- K_5 は G のマイナーなので，$\mathtt{tw}(K_5) \le \mathtt{tw}(G)$
- $\mathtt{tw}(K_5) = 4$
- したがって，$\mathtt{tw}(G) \ge 4$
- また，$\mathtt{tw}(G) \le 4$ (演習問題)
- したがって，$\mathtt{tw}(G) = 4$

目次

この節の目標

無向グラフ G

目標とする定理

任意の自然数 $k \ge 1$ に対して

$$G \text{ は部分 } k \text{ 木} \quad \Leftrightarrow \quad \mathtt{tw}(G) \le k$$

いまから行うこと

- 部分 k 木の定義
- 定理の証明
- 定理の応用 (辺の数)

k 木

無向グラフ $G = (V, E)$

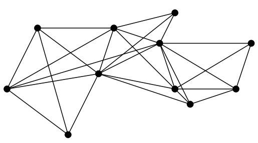
k 木 (k-tree) とは？

G が k 木であるとは，次のいずれかを満たすこと

- G は頂点数 $k+1$ の完全グラフである
- k 木 $G' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する G' の頂点部分集合 $\{w_1, \dots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$$

例：3 木

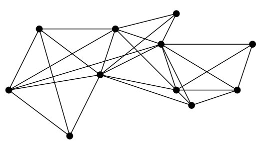


部分 k 木

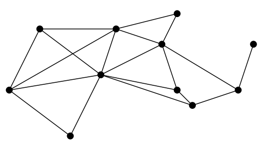
無向グラフ $G = (V, E)$

部分 k 木 (partial k-tree) とは？

G が部分 k 木であるとは，それが k 木の部分グラフであること



3 木



部分 3 木

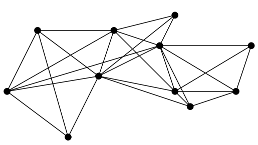
部分 k 木 $\Leftrightarrow$ 木幅が k 以下

無向グラフ G

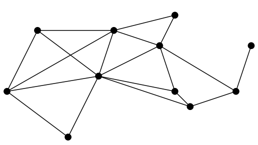
目標とする定理

任意の自然数 $k \ge 1$ に対して

$$G \text{ は部分 } k \text{ 木} \quad \Leftrightarrow \quad \mathtt{tw}(G) \le k$$



3 木



部分 3 木

つまり，$\mathtt{tw}(\text{部分 } 3 \text{ 木}) \le 3$

部分 k 木 $\Rightarrow$ 木幅が k 以下：証明

証明 ($\Rightarrow$)：G が部分 k 木であるとする

- G を部分グラフとする k 木 $H = (V, E)$ が存在する
- このとき，$\mathtt{tw}(G) \le \mathtt{tw}(H)$
- ここからは頂点数 $|V|$ に関する数学的帰納法

H の頂点数 $|V| \le k+1$ のとき

- $\mathtt{tw}(H) \le |V| - 1 = k$ であり，証明終了

部分 k 木 ⇒ 木幅が k 以下：証明 (続き)

H の頂点数 $|V| = k+t$ のときに成り立つと仮定して，$|V| = k+t+1$ とする (ただし，$t \geq 1$)

- k 木 $H' = (V', E')$ と，頂点 $v \in V - V'$，完全部分グラフを誘導する H' の頂点部分集合 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ が存在して，

$$V = V' \cup \{v\}, \qquad E = E' \cup \{\{v, w_i\} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

- 帰納法の仮定より，$\mathtt{tw}(H') \leq k$
- したがって，H' の木分解 $\mathcal{T}'$ で幅が k 以下のものが存在する
- $\mathcal{T}'$ の節点 X' で，$\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq X'$ となるものが存在する
- ここで，H の木分解 $\mathcal{T}$ を次のように構成する
  - 新しい節点 $X = \{v, w_1, \ldots, w_k\}$ を考える
  - X と X' を辺で結ぶ
- これが本当に H の木分解であることを確認する (演習問題)

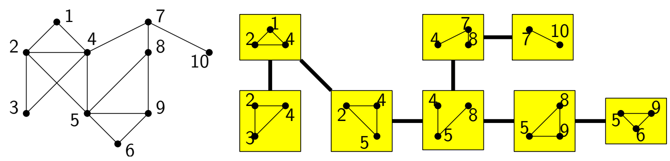
木幅が k 以下 ⇒ 部分 k 木：証明

証明 (⇐)：$\mathtt{tw}(G) \leq k$ と仮定

- つまり，G の木分解 $\mathcal{T}$ で，各節点の要素数が $k+1$ のものが存在する
- 各節点は異なると仮定してよい (そうでなければ，縮約できる)
- $|V| \leq k+1$ のとき，G は K_{k+1} の部分グラフなので，部分 k 木
- $|V| \geq k+2$ のときを考える
- G と $\mathcal{T}$ より，次のグラフ $H = (V, E')$ を作る

$$E_H = E \cup \{\{u, v\} \mid u, v \in X, X \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点}\}$$

- G は H の部分グラフで，$\mathcal{T}$ は H の木分解



木幅が k 以下 ⇒ 部分 k 木：証明 (続き)

主張：H は k 木

- $\mathcal{T}$ の節点数が 1 ならば，H は頂点数 $k+1$ の完全グラフなので，それは k 木
- $\mathcal{T}$ の節点数が 2 以上ならば，$\mathcal{T}$ には葉が存在する
- X を $\mathcal{T}$ の葉として，Y を X に隣接する節点とする
- $|X| = |Y| = k+1$，$X \neq Y$ なので，$v \in X - Y$ を満たす G の頂点が存在する

木幅が k 以下 ⇒ 部分 k 木：証明 (続き 2)

主張 (再掲)：H は k 木

- このとき，$\mathcal{T}$ において，X 以外の節点は v を持たない
- したがって，$\mathcal{T}$ から X を除去したものは $H - v$ の木分解で，各節点の要素数は $k+1$
- つまり，$H - v$ の木幅は k 以下で，帰納法の仮定より，$H - v$ は k 木
- H において v に隣接する頂点は X の要素 ((T2), (T3) より)
- したがって，v に隣接する頂点の集合は H において完全部分グラフを誘導する
- したがって，H は k 木 □

応用 1：次数の小さな頂点の存在

無向グラフ $G = (V, E)$

命題：次数の小さな頂点の存在

$$\mathtt{tw}(G) \leq k \qquad \Rightarrow \qquad G \text{ には次数が } k \text{ 以下の頂点が存在}$$

証明：$\mathtt{tw}(G) \leq k$ と仮定する

- つまり，G は部分 k 木
- したがって，G はある k 木 H の部分グラフ
- H には次数 k 以下の頂点が存在
- したがって，G にも次数 k 以下の頂点が存在 □

応用 2：辺の数

無向グラフ $G = (V, E)$

命題：辺の数

$$\mathtt{tw}(G) \leq k \qquad \Rightarrow \qquad |E| \leq k|V| - \frac{1}{2}k(k+1)$$

前のページの命題を使えば，頂点数に関する帰納法で証明できる

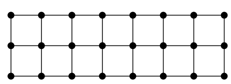
帰結：木幅が定数であるグラフの辺数は小さい

k が定数であるとき，$\mathtt{tw}(G) \leq k$ ならば，$|E| = O(|V|)$

目次

格子とは？

$m \times n$ の格子 (grid) とは次のグラフのこと



($m = 3$, $n = 8$ の場合)

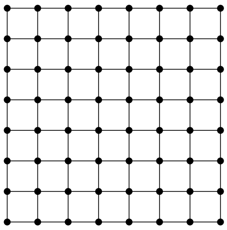
注意：格子グラフ $\neq$ 格子

- 格子グラフとは格子の部分グラフのこと

$k \times k$ 格子の木幅は k 以下

格子の木幅 (上界)

$k \times k$ 格子の木幅は k 以下

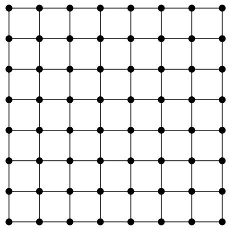


実際に，幅 k の木分解を構成すればよい (演習問題)

$k \times k$ 格子の木幅は k 以上

格子の木幅 (下界)

$k \times k$ 格子の木幅は k 以上



証明は時間がかかるので，少し弱い下界をここでは証明

帰結

$k \times k$ 格子の木幅は k

$k \times k$ 格子の木幅は $k-1$ 以上

格子の木幅 (下界)

$k \times k$ 格子の木幅は $k-1$ 以上

証明：$k \times k$ 格子 G の木分解 $\mathcal{T}$ を考える

- $\mathcal{T}$ において隣接する 2 節点 X, Y に対して，$X \not\subseteq Y$ が成り立つと仮定してよい
  - $X \subseteq Y$ ならば，$\mathcal{T}/\{X, Y\}$ は G の木分解である

主張

G のすべての行の頂点を含むか，あるいは，
G のすべての列の頂点を含む節点 X が存在する

- そうではないと仮定する

$k \times k$ 格子の木幅は $k-1$ 以上：続き

- 節点 X に対して，$G - X$ は G のある行 R の頂点をすべて含んでいる
- G の各行は連結部分グラフを誘導する
- $\therefore \mathcal{T} - X$ の部分木で，R の頂点が必ずその節点に含まれるものが存在する
- そのような部分木と X を結ぶ辺を X から部分木に向かって向き付けする

$k \times k$ 格子の木幅は $k-1$ 以上：続き (2)

- これをすべての節点 X に対して，行う
- すると，両向きに向き付けられた辺 $\{X, Y\}$ が必ず存在する
- このとき，辺 $\{X, Y\}$ を削除してできる部分木 $\mathcal{T}', \mathcal{T}''$ を見ると $\mathcal{T}'$ の節点に含まれる行 R' と $\mathcal{T}''$ の節点に含まれる行 R'' があると分かる

$k \times k$ 格子の木幅は $k-1$ 以上：続き (3)

- R' の頂点 v' と R'' の頂点 v'' で同じ列に含まれるものを考える
- v' と v'' を結ぶ (列に沿った) 最短道を考える
- その道に沿ったある頂点は X に含まれる (演習問題)
- つまり，G の各列の頂点が 1 つ以上 X に含まれる $\square$

目次

今日のまとめと次回の予告

今日の目標

木幅と木分解の性質をさらに理解する

- 辺の縮約とマイナー
- 部分 k 木
- 格子の木幅

次回の予告

木分解と動的計画法