離散最適化基礎論 第 5 回
木分解と木幅

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 11 月 18 日

最終更新：2016 年 11 月 29 日　02:05

スケジュール 前半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

概要

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして
グラフの木分解を取り上げ，
- 木分解とは何か？
- 木分解がなぜ役に立つのか？
- 木分解がどう役に立つのか？

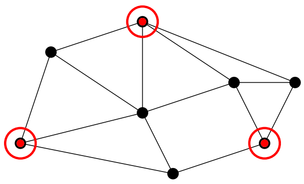
について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化の神髄」だから

テーマ：離散最適化問題の解きやすさ と 解きにくさ

最大独立集合問題：隣接しない頂点をできるだけたくさん選ぶ



これは NP 困難問題 (解きにくい問題)

事実

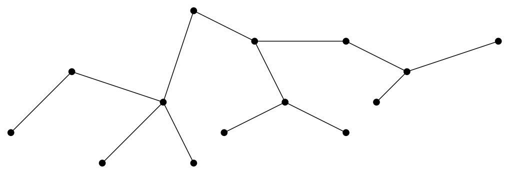
グラフが木 (tree) ならば，簡単に解ける

直感？

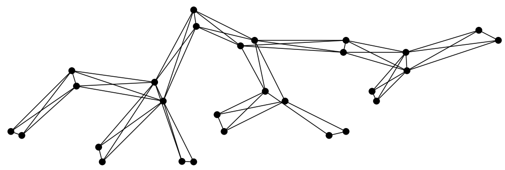
グラフが木に 近ければ，簡単に解けそう？

木に近い，とは？

これは木



これは木に近い？ ⇝ 「木っぽさ」を表す尺度を考える必要あり



木幅 — 「木っぽさ」を表す尺度

この講義のキーワード (と荒っぽい説明)

グラフの木幅	グラフの「木っぽさ」を表す尺度 (の 1 つ)
グラフの木分解	グラフを「木っぽく」表した構造
動的計画法	木分解上の効率的アルゴリズム
オートマトン	動的計画法に基づくアルゴリズムの解釈
Courcelle の定理	上記と論理学に基づく『メタアルゴリズム』

木幅と木分解の面白さ

次の主題が有機的に結びつく面白い話題
- グラフ
- アルゴリズム
- オートマトン
- 論理 (特に，有限モデル理論)

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

今日の目標

木幅と木分解の性質を理解する

- 木分解による分離
- 特殊なグラフの木幅
- 素敵な木分解

目次

グラフの木分解：定義

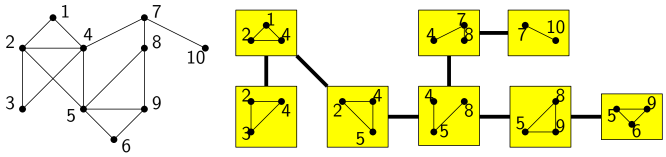
木分解 (tree decomposition) とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 とは木 $\mathcal{T}$ で，

(T1) $\mathcal{T}$ の節点はどれも V の部分集合

(T2) 各辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，$u, v \in X$ となる $\mathcal{T}$ の節点 X が存在する

(T3) 各頂点 $v \in V$ に対して，$\mathcal{T}$ の節点で v を含むものは $\mathcal{T}$ の (連結で非空な) 部分木を誘導する



木分解の節点をバッグ (bag) と呼ぶことがある

グラフの木幅

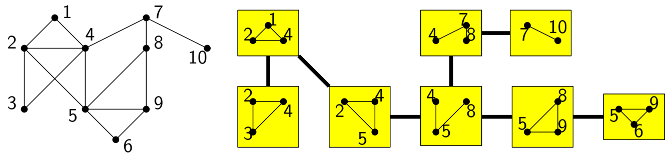
グラフの木幅とは？

- 無向グラフ G の木分解 $\mathcal{T}$ の幅 (width)

$$\mathtt{tw}(\mathcal{T}) = \max\{|S| - 1 \mid S \text{ は } \mathcal{T} \text{ の節点}\}$$

- 無向グラフ G の木幅 (treewidth)

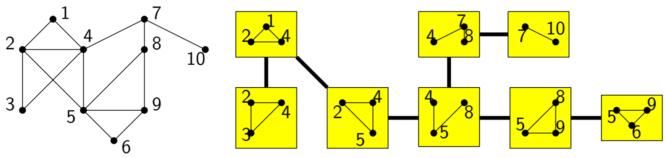
$$\mathtt{tw}(G) = \min\{\mathtt{tw}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \text{ は } G \text{ の木分解}\}$$

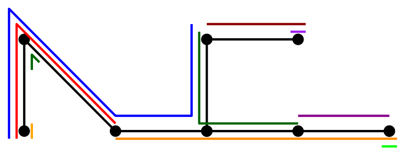


$\mathtt{tw}(G) = 2$

木分解の見方

「木の中の部分木の集まり」と見ることができる





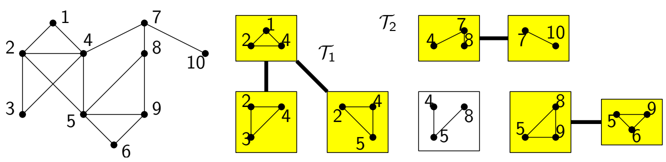
目次

木分解の性質：節点による分離 — 準備

無向グラフ $G = (V, E)$，G の木分解 $\mathcal{T}$

設定

- $\mathcal{T}$ の節点 $X_1, X_2, \ldots, X_r$
- 葉ではない任意の節点 X_j を考える
- $\mathcal{T}$ から X_j を除去することで，$\mathcal{T}$ が連結成分に分かれる
- 連結成分の 2 つを $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ とする

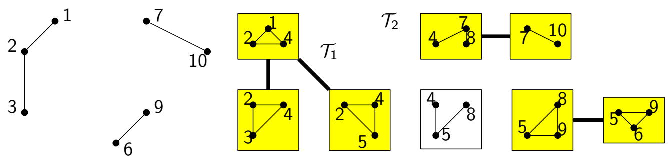


木分解の性質：節点による分離

このとき，

木分解の性質：節点による分離

$$\left(\bigcup_{X_i \in V(\mathcal{T}_1)} X_i\right) - X_j \text{ の頂点と } \left(\bigcup_{X_k \in V(\mathcal{T}_2)} X_k\right) - X_j \text{ の頂点を結ぶ}$$
G の辺はない



木分解の性質：節点による分離 — 証明

証明 (背理法)：そのような辺 $\{u,v\} \in E$ があると仮定

- ある $X_i \in V(\mathcal{T}_1)$ に対して $u \in X_i - X_j$，かつ，
  ある $X_k \in V(\mathcal{T}_2)$ に対して $v \in X_k - X_j$ と仮定してよい

主張

$u \in X_j$ または $v \in X_j$ (つまり，矛盾)

- $\{u,v\} \in E$ なので，(T2) より，ある節点 X_ℓ が存在して，$u, v \in X_\ell$
- $X_\ell \in V(\mathcal{T}_1)$ ならば，(T3) より，$v \in X_j$
- $X_\ell \in V(\mathcal{T}_2)$ ならば，(T3) より，$u \in X_j$ □

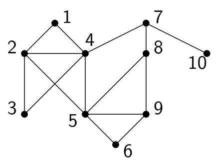
目次

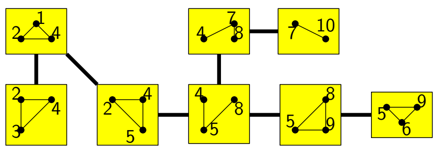
完全部分グラフと木分解

無向グラフ $G = (V, E)$，G の木分解 $\mathcal{T}$

木分解の性質：完全部分グラフ

$S \subseteq V$ が G の完全部分グラフを誘導する ⇒
$\mathcal{T}$ の節点で S を含むものが存在する





完全部分グラフと木分解：証明に向けて

無向グラフ $G = (V, E)$，G の木分解 $\mathcal{T}$

木分解の性質：完全部分グラフ

$S \subseteq V$ が G の完全部分グラフを誘導する ⇒
$\mathcal{T}$ の節点で S を含むものが存在する

証明：次の補題を用いると証明できる

補題：木の Helly 性

任意の木 T と，その 3 つの部分木 T_1, T_2, T_3 が次を満たすとする

$$V(T_1) \cap V(T_2) \neq \emptyset, \quad V(T_1) \cap V(T_3) \neq \emptyset, \quad V(T_2) \cap V(T_3) \neq \emptyset$$

このとき，$V(T_1) \cap V(T_2) \cap V(T_3) \neq \emptyset$

補題を使って，どのように証明するのかは演習問題

完全部分グラフと木分解：補題の証明 (1)

補題の証明：$|V(T)|$ に関する数学的帰納法

- $|V(T)| = 1$ のとき，$T_1 = T_2 = T_3$ であり，成り立つ
- $|V(T)| = n \geq 1$ のとき成り立つとして，
  $|V(T)| = n + 1$ のときに成り立つことを示す

$V(T_1) \cap V(T_2) \neq \emptyset$, $V(T_1) \cap V(T_3) \neq \emptyset$, $V(T_2) \cap V(T_3) \neq \emptyset$ を仮定する

- $|V(T_1)| = 1$ のとき，$V(T_1) = \{v\}$ とする
- このとき，$V(T_1) \cap V(T_2) = V(T_1) \cap V(T_3) = \{v\}$
- $\therefore v \in V(T_2) \cap V(T_3)$
- $\therefore V(T_1) \cap V(T_2) \cap V(T_3) = \{v\} \neq \emptyset$

- $|V(T_2)| = 1, |V(T_3)| = 1$ のときも同様

完全部分グラフと木分解：補題の証明 (2)

$|V(T_1)|, |V(T_2)|, |V(T_3)| \geq 2$ とする

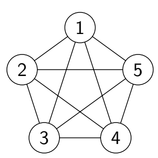
- $n + 1 \geq 2$ なので，T は葉を持つ
- v を T の葉，u を T における v の隣接頂点とする
- このとき，$T'_i = T_i - v$ とすると，
  $V(T'_1) \cap V(T'_2) \neq \emptyset$, $V(T'_1) \cap V(T'_3) \neq \emptyset$, $V(T'_2) \cap V(T'_3) \neq \emptyset$
  (なぜ？)
- したがって，$T - v$ に帰納法の仮定を適用すると，
  $V(T'_1) \cap V(T'_2) \cap V(T'_3) \neq \emptyset$
- したがって，$V(T_1) \cap V(T_2) \cap V(T_3) \neq \emptyset$ □

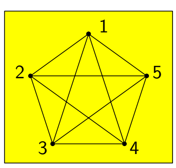
完全グラフの木幅

つまり，

完全グラフの木幅

完全グラフ K_n の木幅は $n - 1$

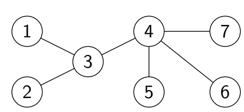


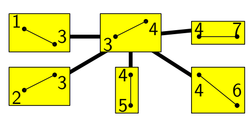


木の木幅

木の木幅

頂点数 2 以上の木の木幅は 1





木の木幅：証明

木の頂点数に関する帰納法

- 頂点数が 2 のときは完全グラフで，幅は 1
- 頂点数が $n \geq 2$ の任意の木の木幅が 1 であると仮定して，頂点数が $n+1$ の任意の木 T を考える
- v を T の葉，u を T における v の隣接頂点とする
- $T' = T - v$ とすると，帰納法の仮定より，T' は幅 1 の木分解 $\mathcal{T}'$ を持つ
- (T3) より，$\mathcal{T}'$ には u を要素として持つ節点 X が存在
- T の木分解 $\mathcal{T}$ を以下のように $\mathcal{T}'$ から作る

  $\{u, v\}$ を新たな節点として，X に隣接させる
- この $\mathcal{T}$ が (T1)，(T2)，(T3) を満たすことを確認するのは演習問題 □

木幅が 1 のグラフは森

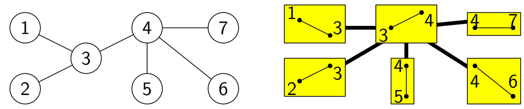
無向グラフ $G = (V, E)$

命題 (演習問題)

$\mathtt{tw}(G) = 1 \Rightarrow G$ は森

つまり，

$$G \text{ は森} \Leftrightarrow \mathtt{tw}(G) \leq 1$$



目次

素敵な木分解

素敵な木分解 (nice tree decomposition) とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 $\mathcal{T}$ が素敵であるとは，$\mathcal{T}$ の 1 つの節点 X_r を根として $\mathcal{T}$ を根付き木と見なしたときに次を満たすこと

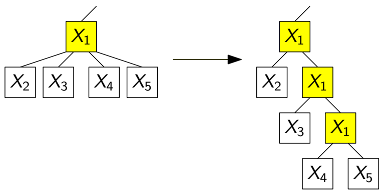
- $X_r = \emptyset$，かつ，葉である節点 X に対して，$X = \emptyset$
- 各節点の子の数は 2 以下
- 節点 X の子の数が 2 のとき，その子を X', X'' とすると，

$$X = X' = X''$$

- 節点 X の子の数が 1 のとき，その子を X' とすると，次のどちらかが成立
  - ある頂点 $v \notin X'$ が存在して，$X = X' \cup \{v\}$
  - ある頂点 $w \in X'$ が存在して，$X = X' - \{w\}$

素敵な木分解：子の数を減らす

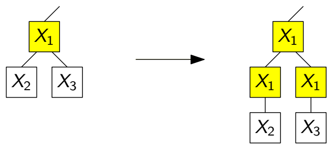
木分解から，同じ幅の素敵な木分解が (効率よく) 作れる



子の数が 3 以上のときは，この操作で子の数を 2 にする

素敵な木分解：差分を減らす

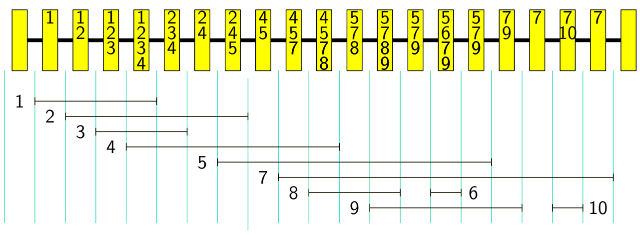
木分解から，同じ幅の素敵な木分解が (効率よく) 作れる



子の数が 2 のとき，親子が同じになるように変形する

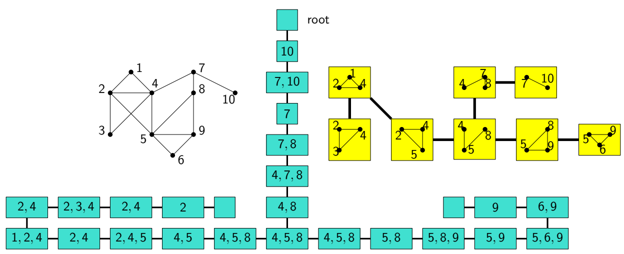
素敵な木分解：差分を減らす

木分解から，同じ幅の素敵な木分解が (効率よく) 作れる

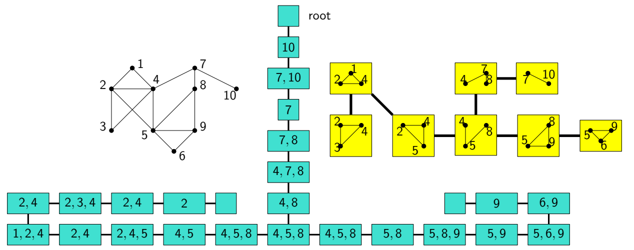


子の数が 1 のところは，素敵な道分解のときと同じように変形する

素敵な木分解：例



素敵な木分解：節点の種類



X の子の数	X の要素数は X の子の要素数より	
2	—	X は結合節点　(join node)
1	大きい	X は導入節点　(introduce node)
1	小さい	X は忘却節点　(forget node)
0	—	X は葉

なぜ 素敵な木分解 を考えるのか？

素敵な木分解を考える理由 1

次が正しいと分かる (演習問題)

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ の木分解 $\mathcal{T}$ に対して，
G の木分解で，$\mathcal{T}$ と同じ幅を持ち，
節点数が $O(\mathtt{tw}(\mathcal{T}) \cdot |V|)$ となるものが存在

素敵な木分解を考える理由 2

動的計画法に基づくアルゴリズムを設計しやすくなる

$\rightsquigarrow$ 次々回の内容

目次

道幅と木幅の関係

道幅と木幅の関係

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$\mathtt{tw}(G) \leq \mathtt{pw}(G) \leq O(\mathtt{tw}(G) \log |V|)$$

証明：左側の不等号は前々回の演習問題
　　　右側の不等号は今回の演習問題

- ヒント 1：素敵な木分解を考える
- ヒント 2：木の道幅は $O(\log |V|)$

目次

今日のまとめと次回の予告

今日の目標

木幅と木分解の性質を理解する

- 木分解による分離
- 特殊なグラフの木幅
- 素敵な木分解

次回の予告

木幅と木分解の性質をより深く理解する