グラフとネットワーク 中間試験

2016 年 6 月 6 日
岡本 吉央

10:40–12:10．携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1 無向グラフ G と自然数 $k \in \mathbb{N}$ を考える (ただし，$k \geq 3$)．このとき，$\delta(G) \geq k-1$ ならば，G が頂点数 k 以上の閉路を含むことを証明せよ．ただし，$\delta(G)$ は G の最小次数を表す．(ヒント：G における長さ最大の <u>道</u> を考えよ．) (注意：「G が頂点数 k の閉路を含むこと」を証明することは要求していない．)

問題 2 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s,t \in V$ を考える．このとき，s から t へ至る任意の流れ $f\colon A \to \mathbb{R}$ に対して，次の等式が成り立つことを証明せよ．

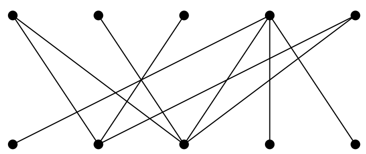
$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v).$$

ただし，任意の頂点 $v \in V$ に対して，

$$f^+(v) = \sum_{u:(v,u) \in A} f((v,u)), \quad f^-(v) = \sum_{u:(u,v) \in A} f((u,v))$$

と定義する．

問題 3 次の無向グラフの最大マッチングを 1 つ見つけて，それが最大マッチングであることを証明せよ．(グラフの図の写し間違いに注意．辺の数は 10 である．)



問題 4 頂点数が 3 以上である任意の連結無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ．

(a) G は閉路である．

(b) G の任意の頂点 v に対して，$G-v$ は木である．

(ヒント：「(b) $\Rightarrow$ (a)」について，握手補題を用いてもよい．)

以上