グラフとネットワーク 第 14 回
最大流：モデル化 (3)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 8 月 1 日

最終更新：2016 年 8 月 3 日　15:49

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/11)
2. 道と閉路：数理 (4/18)
3. 木：数理 (4/25)
4. マッチング：数理 (5/2)
5. マッチング：モデル化 (5/9)
6. 最大流：数理 (5/16)
7. 最大流：モデル化 (1) (5/23)

* 休講 (5/30)
* 中間試験 (6/6)

スケジュール 後半

8. 最大流：モデル化 (2) (6/13)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/20)
10. 彩色：数理 (6/27)
11. 彩色：モデル化 (7/4)
12. 平面グラフ：数理 (7/11)

* 海の日で休み (7/18)

13. 平面グラフ：モデル化 (7/25)
14. 最大流：モデル化 (3) (8/1)

- 期末試験 (8/8)

概要

今日の目標

最大流問題を用いて様々な問題を解決できるようになる

- 露天掘り問題
- 最密部分グラフ問題
- 嘘を含む比較を用いた最小値最大値発見

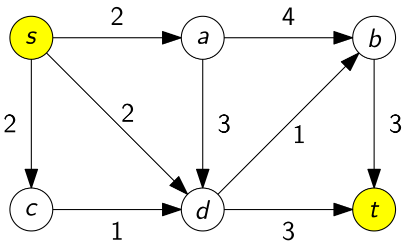
[復習] 2 つの重要な定理：最大流最小カット定理，整数流定理

目次

最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, A)$，各弧 $a \in A$ の容量 $c(a)$，2 頂点 $s, t \in V$ (弧の容量は非負実数)

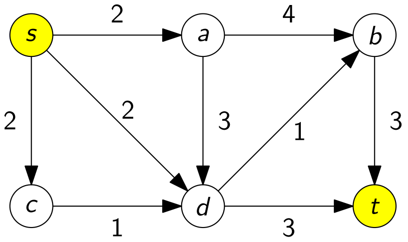


最大流問題とは？

出力

- s から t へ至る流れで，その値が最大のもの

  (s から t へ至る最大流)

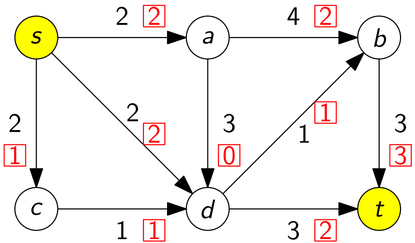


s から t へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で
次の 2 つを満たすもの

1. s, t 以外の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，　(流量保存制約)

$$\underbrace{\sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v))}_{(v\text{ へ流入する総量})} = \underbrace{\sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))}_{(v\text{ から流出する総量})}$$

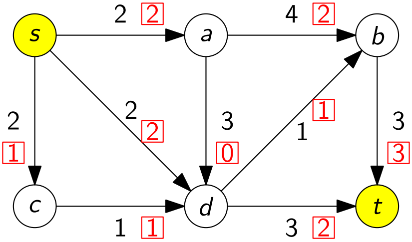


s から t へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$) で
次の 2 つを満たすもの

2. 各弧 $a \in A$ において， (容量制約)

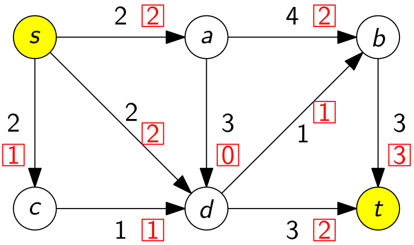
$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$



流れ f の値とは？

s から t へ至る流れ f の値を次の量で定義し，$\mathtt{val}(f)$ と表記する

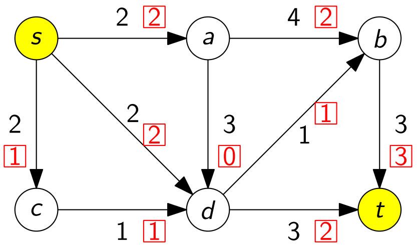
$$\mathtt{val}(f) = \sum_{u:(s,u)\in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s)\in A} f((u,s))$$



この流れの値は 5

最大流とは？

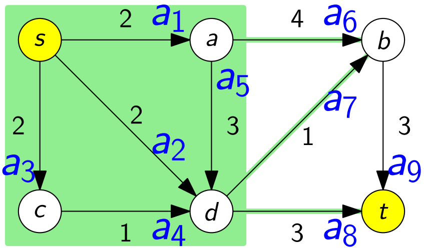
s から t へ至る流れ f が最大流であるとは，
s から t へ至る任意の流れ f' に対して $\mathtt{val}(f') \leq \mathtt{val}(f)$ が成り立つこと



注：最大流が存在する，ということは当たり前ではない

s, t カットとは？

s, t カットとは，頂点部分集合 S で，$s \in S$ と $t \notin S$ を満たすもののこと

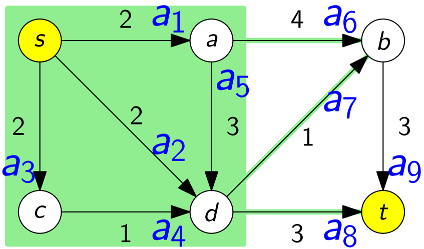


イメージ：s から t へ至る流れは S の側から $V - S$ の側に向かっていく

s,t カットの容量とは？

s,t カット S の容量とは，次の式で定義され，$\mathrm{cap}(S)$ と表記する

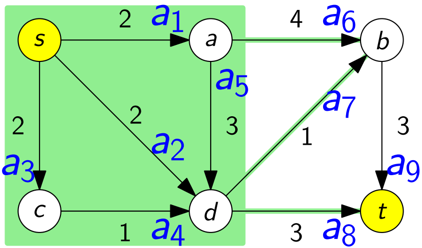
$$\mathrm{cap}(S) = \sum_{(u,v)\in A, u\in S, v\notin S} c((u,v))$$



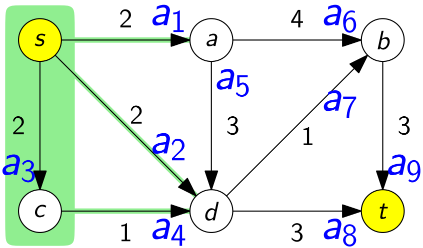
S に始点を持ち，$V - S$ に終点を持つ弧の容量の合計

最小 s, t カットとは？

最小 s, t カットとは，s, t カット S で，
任意の s, t カット S' に対して，$\mathrm{cap}(S) \leq \mathrm{cap}(S')$ を満たすもの



最小 s, t カットではない



最小 s, t カットである

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s, t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流とカットの関係

f が最大流
S が s, t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s, t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流とカットの関係

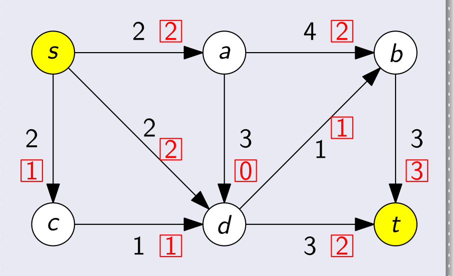
f が最大流
S が s, t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流と最小カットの関係 (弱双対性)

f が最大流
S が最小 s, t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

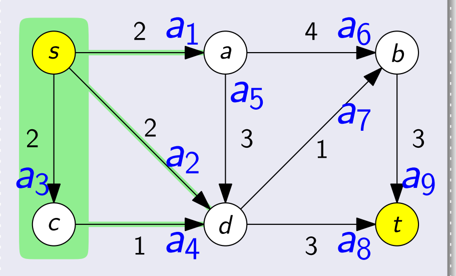
弱双対性の使い方

下界



最大流の値 ≥ 5

上界



最大流の値 ≤ 5

したがって

- 左の図にある流れは最大流であり，その値は 5
- 右の図にある s,t カットは最小 s,t カットであり，その容量は 5

最大流最小カット定理 (強双対性) (Ford, Fulkerson '56)

f が最大流
S が最小 s, t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$

注意

弱双対性

- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ ならば f は最大流

強双対性

- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ となる f, S が必ず存在

整数流定理 (重要)

容量が整数 $\Rightarrow$ どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

最大流の値が整数であり，なおかつ，どの弧に流れる量も整数

目次

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_Mill.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

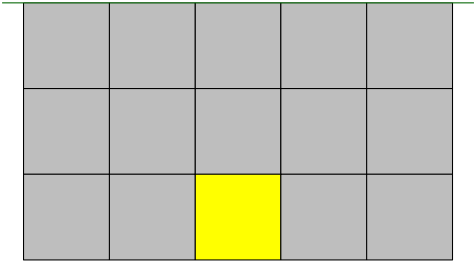
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_open_pit.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrisegoldmine.jpg

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

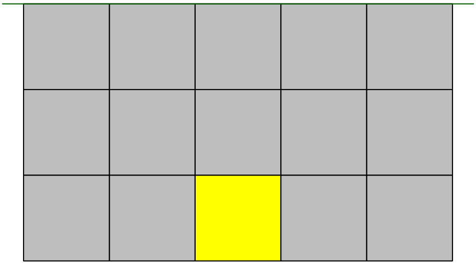
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



金が地下の奥底にある状況

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

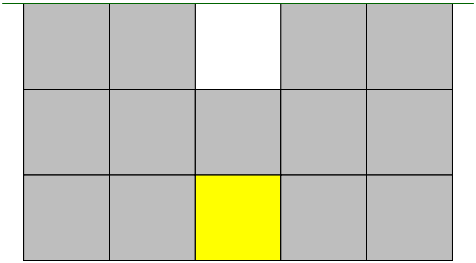
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

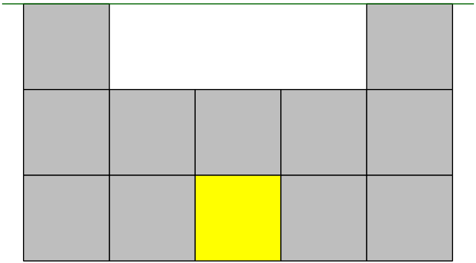
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

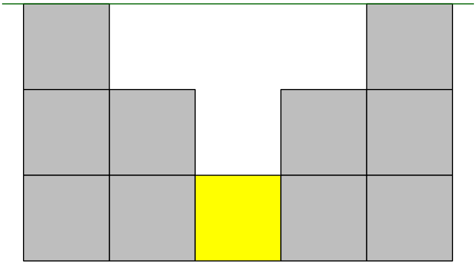
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

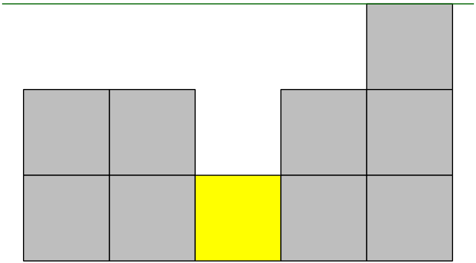
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

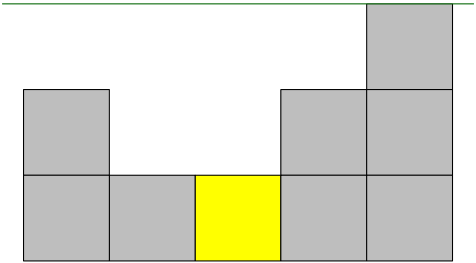
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

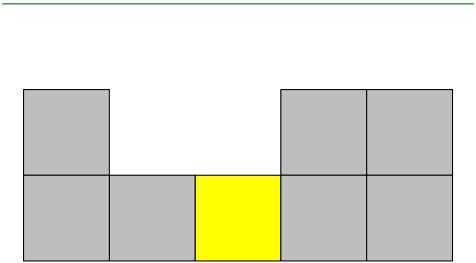
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

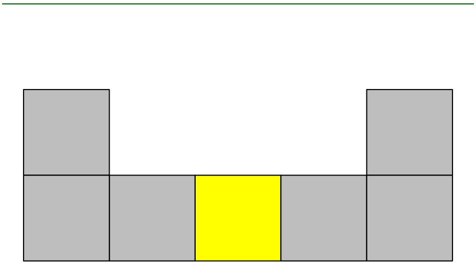
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

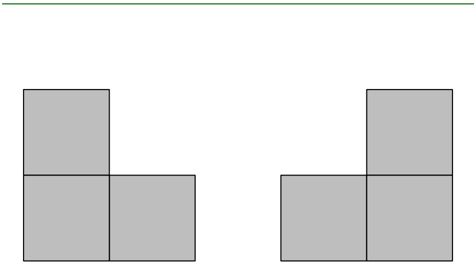
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

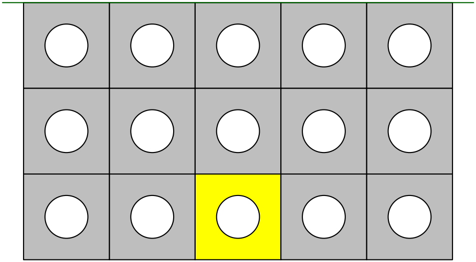
露天掘り問題 (open-pit mining problem)

簡単にするため，深さと幅だけの設定で



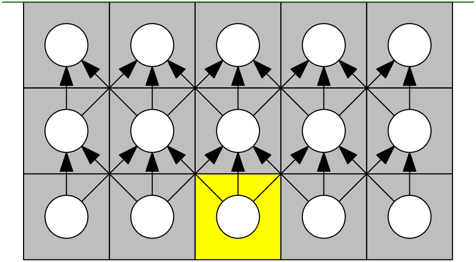
金が取れた！

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



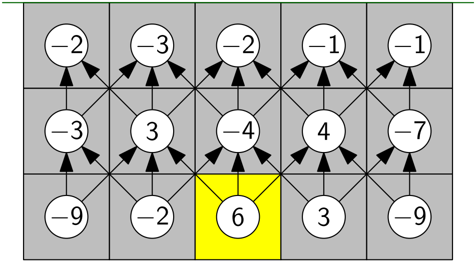
各部分を頂点に対応させる

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



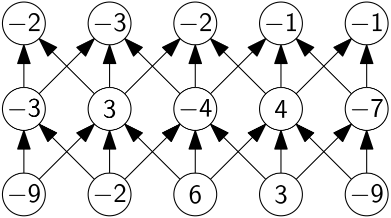
「弧の終点を掘らないと始点が掘れない」という関係を弧で表す

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



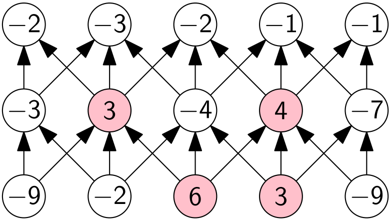
各頂点には，その部分を掘ったときに得られる利益が付いている

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



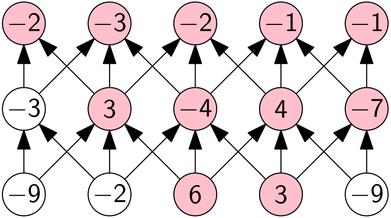
グラフだけを残す (本質的な情報を持っている部分だけ残った)

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



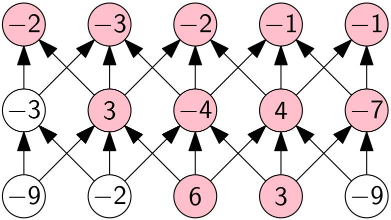
これは許されない掘り方

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



これは許される掘り方で，総利益 $= -4$

ここからの目標



ここからの目標

どのように掘れば最も利益があがるか，最大流問題を使ってモデル化する

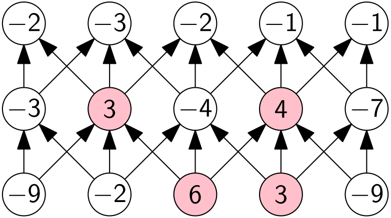
- 実際は，最小カット問題としてモデル化する

露天掘り問題：モデル化のためのアイディア

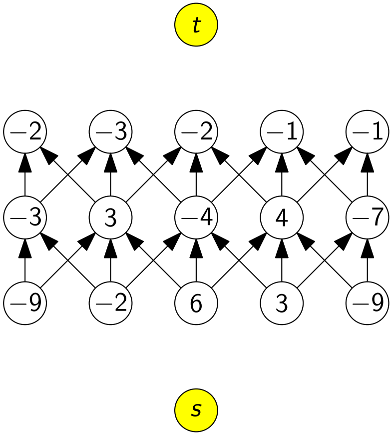
モデル化のためのアイディア

自由に取れるならば，利益の合計を $3+4+6+3=16$ にできる

- -3 を取る $\equiv$ 3 だけ損をする (と考える)
- 6 を取らない $\equiv$ 6 だけ損をする (と考える)
- 目標：損の合計を最小化する

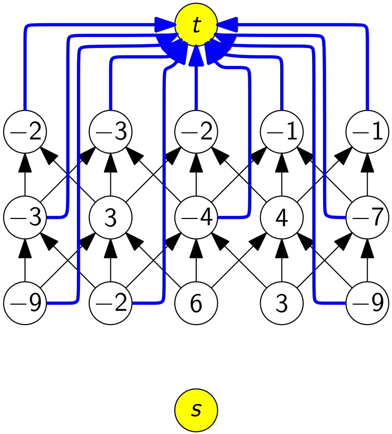


露天掘り問題：最小カットの問題としてのモデル化 (1)



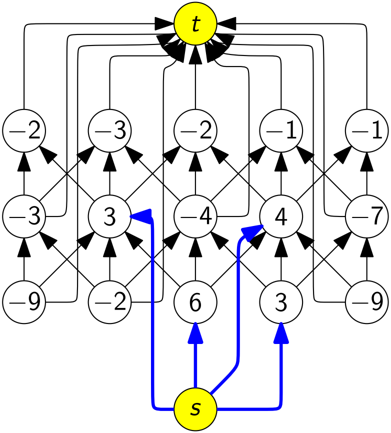
s と t を新たに付ける

露天掘り問題：最小カット問題としてのモデル化 (2)



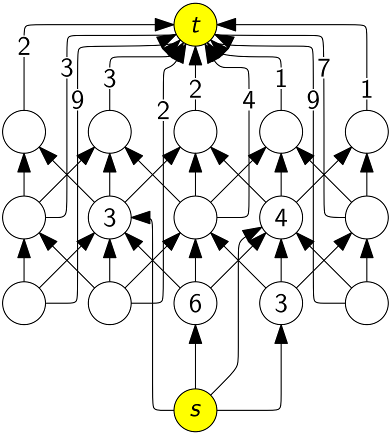
利益が負である頂点から t に向かって弧を付ける

露天掘り問題：最小カット問題としてのモデル化 (3)



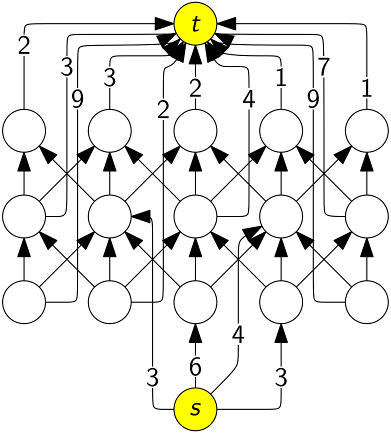
利益が正である頂点に向かって s から弧を付ける

露天掘り問題：最小カット問題としてのモデル化 (4)



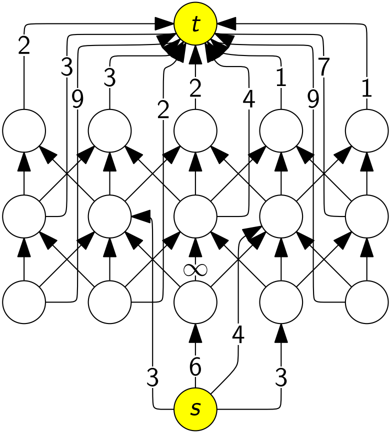
t を終点とする弧の容量はその始点を取ったときの損

露天掘り問題：最小カット問題としてのモデル化 (5)



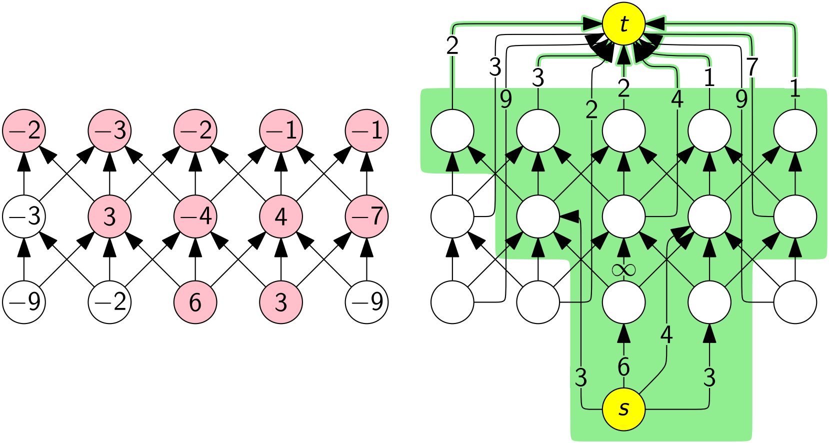
s を始点とする弧の容量はその終点を取らなかったときの損

露天掘り問題：最小カットモデルとしてのモデル化 (6)

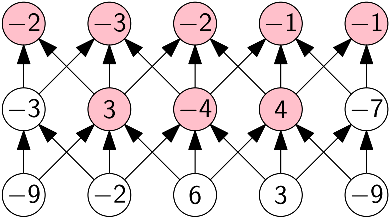


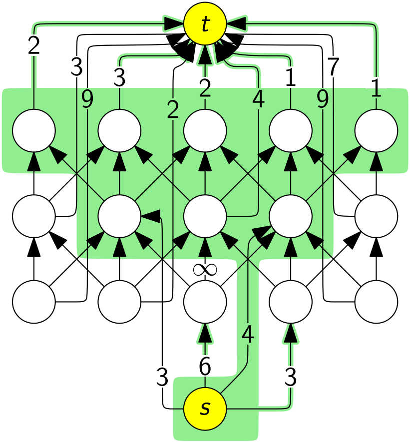
他の弧の容量は ∞ (無限大)

露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (1)

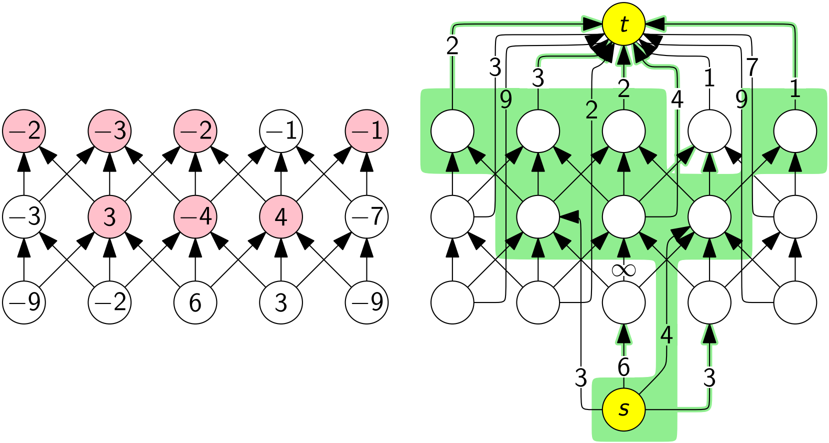


露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (2)





露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (3)

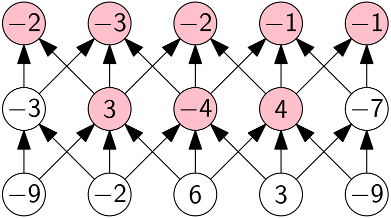


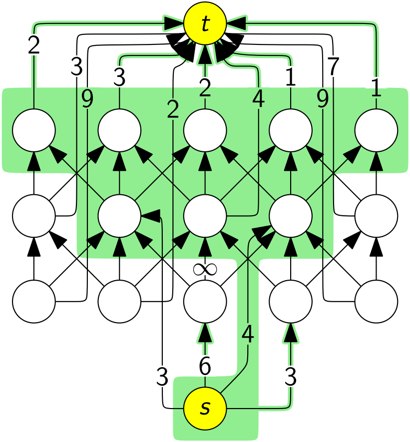
許されない掘り方に対応するカットの容量は無限大

露天掘り問題：ここまでのまとめ

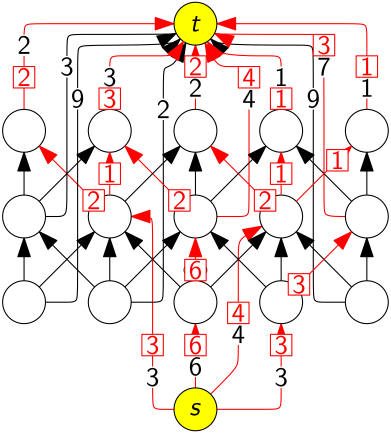
最小カットから，損が最も小さい掘り方が分かる (Picard '76)

最小カットを計算するために，最大流を計算する



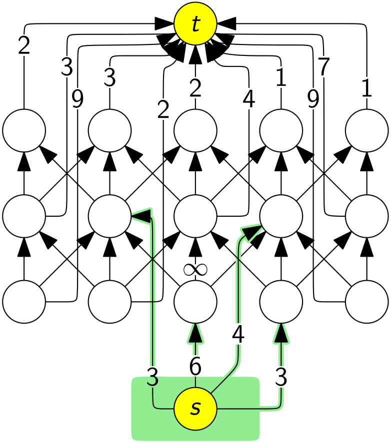


露天掘り問題：最大流



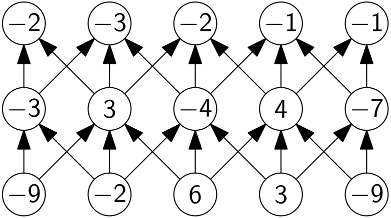
計算された最大流 (値 $= 16$)

露天掘り問題：最小カット



対応する最小カット (容量 $= 16$)

露天掘り問題：最小カットに対応する掘り方

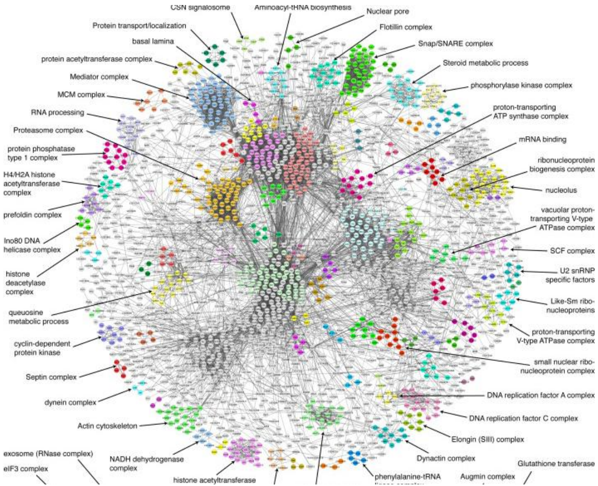


総利益 $= 0$

目次

蛋白質相互作用ネットワーク

密な部分グラフ ⇝ クラスタ (という意味のある構造) ⇝ 知識発見

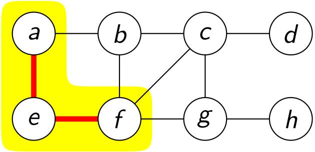


Guruharsha, et al., Cell 147 (2011) pp. 690–703

部分グラフの密度

部分グラフの密度とは？

$$\frac{\text{辺の数}}{\text{頂点の数}}$$

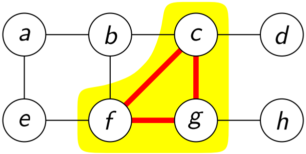


$$\text{密度} = \frac{2}{3}$$

部分グラフの密度

部分グラフの密度とは？

$$\frac{\text{辺の数}}{\text{頂点の数}}$$

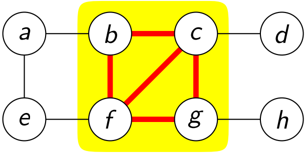


$$\text{密度} = \frac{3}{3} = 1$$

部分グラフの密度

部分グラフの密度とは？

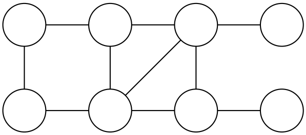
$$\frac{\text{辺の数}}{\text{頂点の数}}$$



$$\text{密度} = \frac{5}{4}$$

最密部分グラフ問題

このグラフの部分グラフで，密度 1.2 以上のものを見つけたい

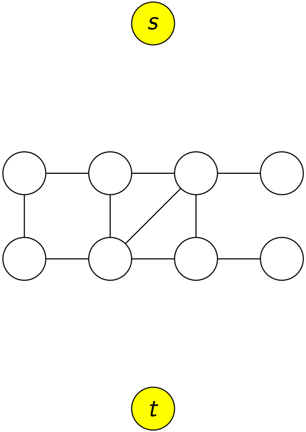


頂点数 $n = 8$，辺数 $m = 10$，密度保証 $= 1.2$

今から行うこと

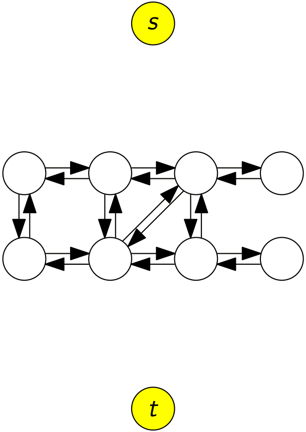
この問題を最小カット問題としてモデル化する

最密部分グラフ問題：最小カット問題としてのモデル化 (1)



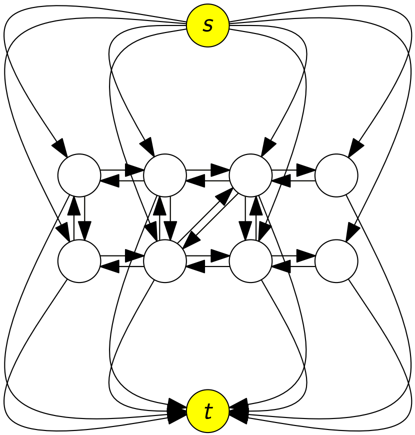
頂点 s と t を付け加える

最密部分グラフ問題：最小カット問題としてのモデル化 (2)



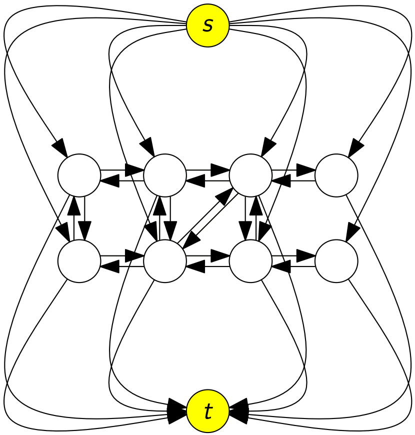
始めからある辺は，両向きの有向辺に変える

最密部分グラフ問題：最小カット問題としてのモデル化 (3)



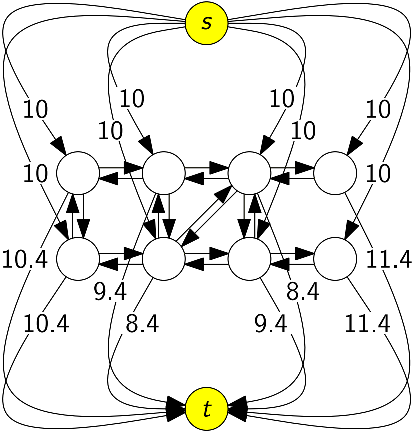
始めからある頂点に向かって s から辺を付ける

最密部分グラフ問題：最小カット問題としてのモデル化 (4)



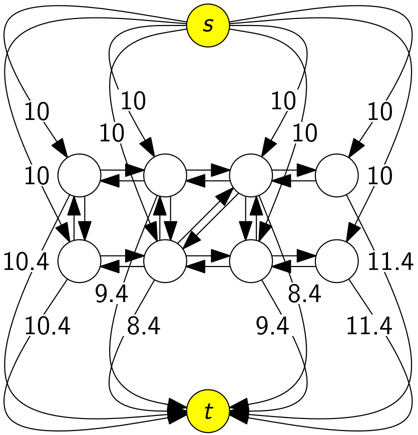
始めからある頂点から t に向かって辺を付ける

最密部分グラフ問題：最小カット問題としてのモデル化 (5)



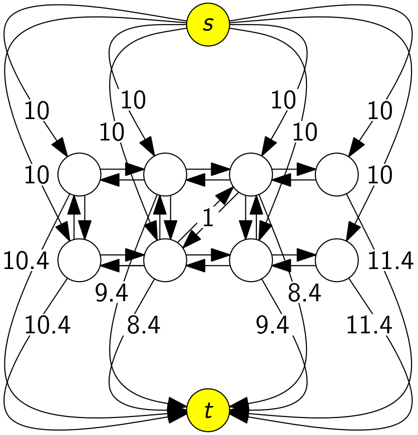
s を始点とする辺の容量 $= m \ (= 10)$

最密部分グラフ問題：最小カット問題としてのモデル化 (6)



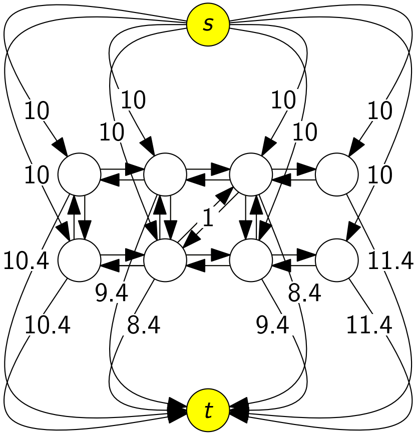
$$t\text{ を終点とする辺の容量} = \underbrace{m + 2 \cdot \text{密度保証}}_{=12.4} - \text{始点に隣接する頂点数}$$

最密部分グラフ問題：最小カット問題としてのモデル化 (7)



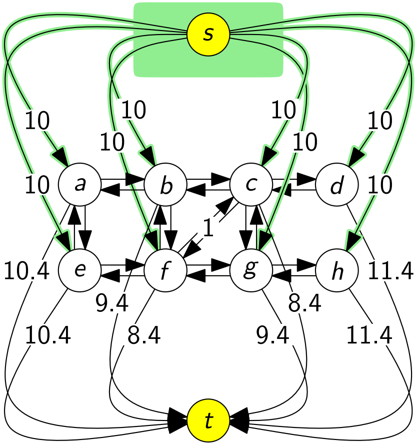
その他の辺の容量 $= 1$

最密部分グラフ問題：最小カット問題としてのモデル化 — 完了



これでモデル化が完了

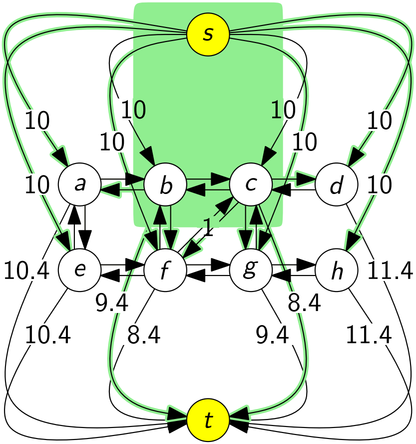
最密部分グラフ問題：カットを見てみる (1)



このカットの容量 $= 80 = mn$

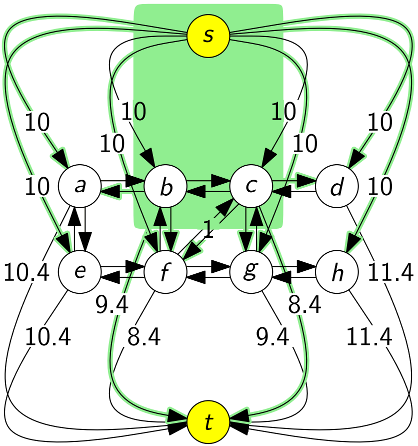
よって，最小カットの容量 ≤ 80

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (2)



このカットの容量 $= 82.8 > 80 = mn$

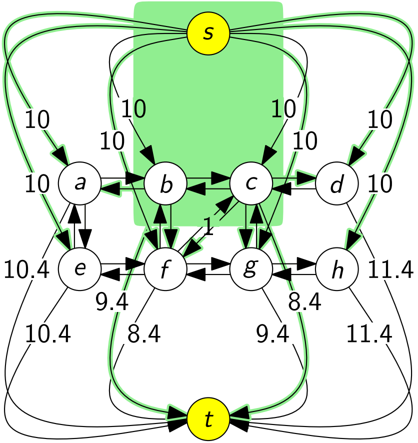
最密部分グラフ問題：カットを見てみる (2)



このカットの容量 $= 82.8 > 80 = mn$

このカットの容量 $= 80 + 2 \cdot 2 \cdot (1.2 - 0.5)$

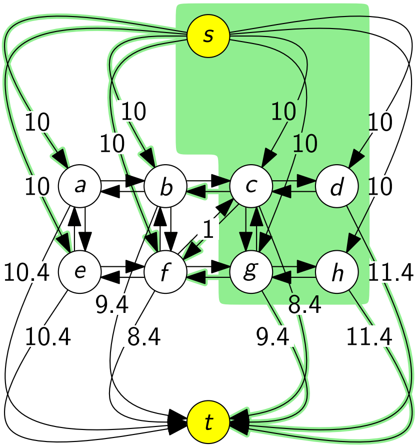
最密部分グラフ問題：カットを見てみる (2)



$$\text{このカットの容量} = 82.8 > 80 = mn$$

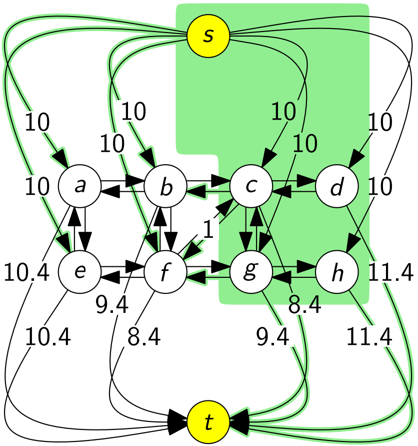
$$\begin{aligned}\text{このカットの容量} &= 80 + 2 \cdot 2 \cdot (1.2 - 0.5) \\ &= mn + 2 \cdot |\{b, c\}| \cdot (\text{密度保証} - \{b, c\}\text{ の密度})\end{aligned}$$

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (3)



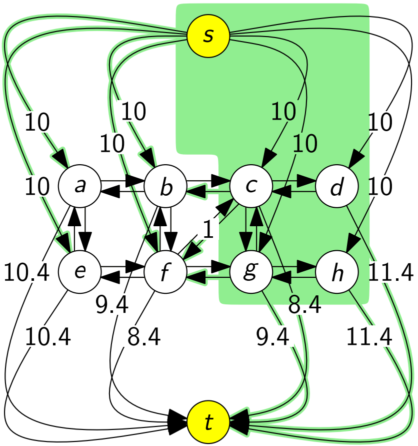
このカットの容量 $= 83.6 > 80 = mn$

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (3)



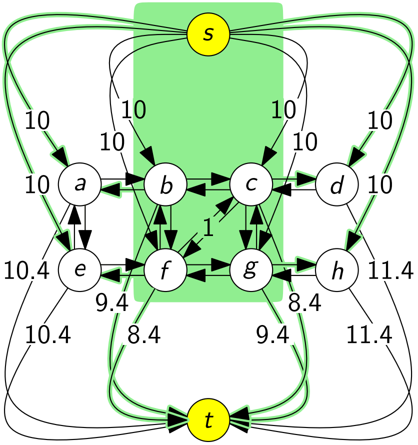
このカットの容量 $= 83.6 > 80 = mn$
このカットの容量 $= 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 0.75)$

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (3)



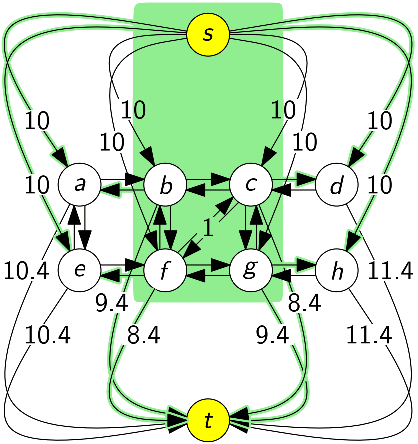
$$\text{このカットの容量} = 83.6 > 80 = mn$$
$$\text{このカットの容量} = 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 0.75)$$
$$= mn + 2 \cdot |\{c, d, g, h\}| \cdot (\text{密度保証} - \{c, d, g, h\}\ \text{の密度})$$

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (4)



このカットの容量 $= 79.6 < 80 = mn$

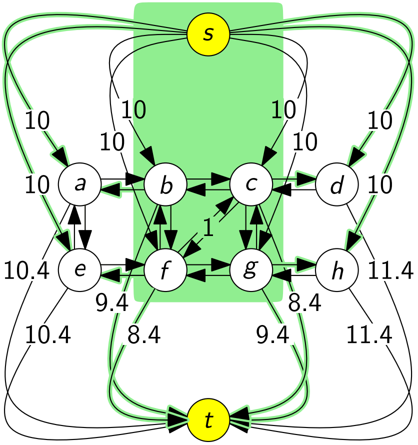
最密部分グラフ問題：カットを見てみる (4)



このカットの容量 $= 79.6 < 80 = mn$

このカットの容量 $= 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 1.25)$

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (4)

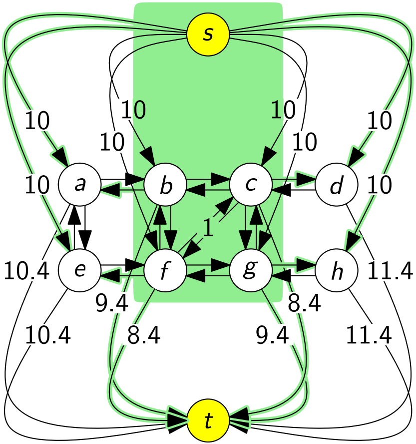


このカットの容量 $= 79.6 < 80 = mn$

このカットの容量 $= 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 1.25)$

$= mn + 2 \cdot |\{b, c, f, g\}| \cdot$(密度保証$- \{b, c, f, g\}$ の密度)

最密部分グラフ問題：カットを見てみる (4) 続き

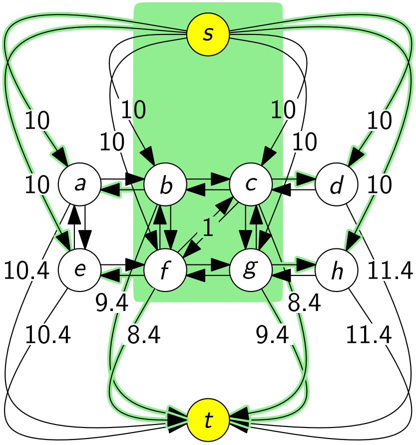


すなわち，密度保証$-\{b, c, f, g\}$ の密度 < 0

$\therefore \{b, c, f, g\}$ の密度 $>$ 密度保証

$\therefore \{b, c, f, g\}$ は密度の高い部分

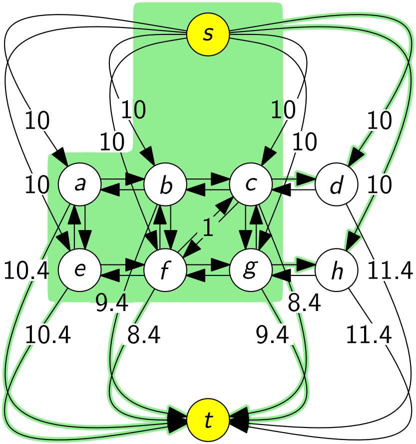
最密部分グラフ問題：カットを見てみる (4) 続きの続き



つまり，最小カットを計算して (Goldberg '84)

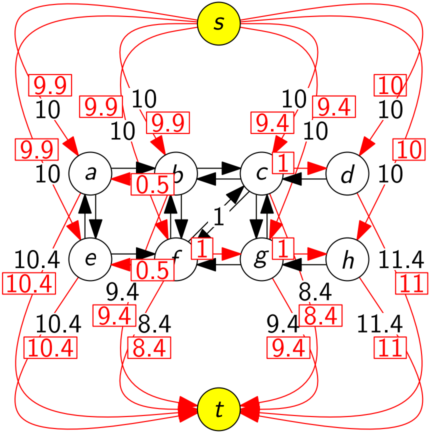
その容量 $< mn$ ならば，そこから密度の高い部分が見つかる

最密部分グラフ問題：最小カット



このカットの容量 $= 78.4 < 80 = mn$ で，これは最小カット

最密部分グラフ問題：最大流



なぜなら，この流れの流量 $= 78.4$ だから

目次

嘘を含む比較を用いた最小値最大値発見

別のスライドを用いて進める
(が，もしかしたら最大流を使うところまでたどりつけないかもしれない)

目次

概要

今日のまとめ

最大流問題を用いて様々な問題を解決できるようになる

- 露天掘り問題
- 最密部分グラフ問題
- 嘘を含む比較を用いた最小値最大値発見

[復習] 2 つの重要な定理：最大流最小カット定理，整数流定理

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次

1. 露天掘り問題
2. 最密部分グラフ問題
3. 嘘を含む比較を用いた最小値最大値発見
4. 今日のまとめ