

グラフとネットワーク 第 13 回  
平面グラフ：モデル化

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 7 月 25 日

最終更新：2016 年 7 月 22 日 12:40

- |   |              |        |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/11) |
| 2 | 道と閉路：数理      | (4/18) |
| 3 | 木：数理         | (4/25) |
| 4 | マッチング：数理     | (5/2)  |
| 5 | マッチング：モデル化   | (5/9)  |
| 6 | 最大流：数理       | (5/16) |
| 7 | 最大流：モデル化 (1) | (5/23) |
| * | 休講           | (5/30) |
| ● | 中間試験         | (6/6)  |

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |              |        |
|----|--------------|--------|
| 8  | 最大流：モデル化 (2) | (6/13) |
| 9  | 連結性：数理とモデル化  | (6/20) |
| 10 | 彩色：数理        | (6/27) |
| 11 | 彩色：モデル化      | (7/4)  |
| 12 | 平面グラフ：数理     | (7/11) |
|    | * 海の日で休み     | (7/18) |
| 13 | 平面グラフ：モデル化   | (7/25) |
| 14 | 予備日 (講義を行う)  | (8/1)  |
|    | ● 期末試験       | (8/8?) |

注意：予定の変更もありうる

### 今日の目標

平面グラフの彩色を用いて次の問題を解決する

- ▶ 地図の彩色
- ▶ 美術館の監視

## 目次

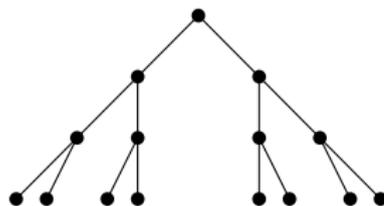
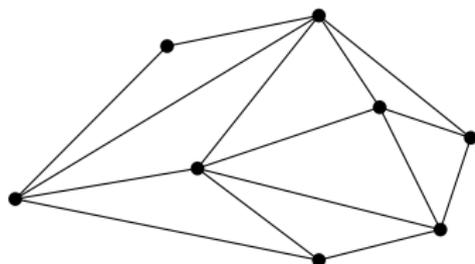
- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

## グラフの平面描画

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

グラフの平面描画とは？

グラフ  $G$  の平面描画とは、 $G$  の描画で、  
 辺を表す曲線どうしが端点以外に共有点を持たないこと

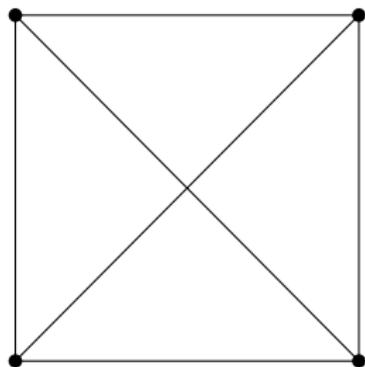
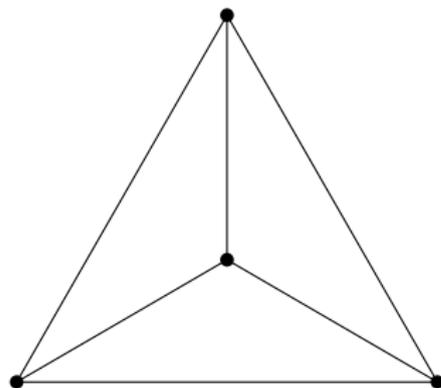


平面描画のことを平面グラフとも呼ぶ

## 平面的グラフ

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

平面的グラフとは？

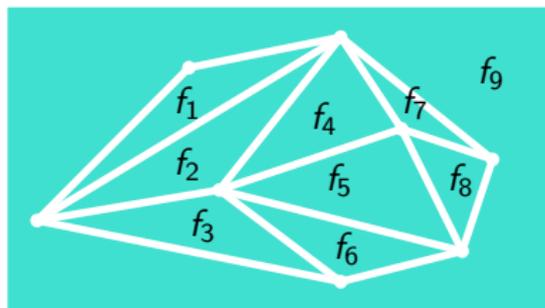
 $G$  が平面的グラフであるとは、 $G$  が平面描画を持つこと例 :  $K_4$  は平面的グラフである $K_4$  の非平面描画 $K_4$  の平面描画

## 平面グラフの面

平面グラフ  $G = (V, E)$  (平面描画を想定)

平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

$G$  の面とは、 $G$  の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



$G$  の面で非有界であるものを  $G$  の外面と呼ぶ

## オイラーの公式

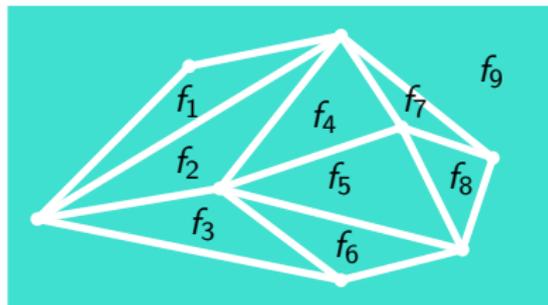
平面グラフ  $G = (V, E)$  (平面描画を想定)

## オイラーの公式

$G$  の頂点数が  $n$ , 辺数が  $m$ , 面数が  $f$ , 連結成分数が  $k$  のとき,

$$n - m + f = 1 + k$$

特に,  $G$  が連結ならば,  $k = 1$  なので,  $n - m + f = 2$



- ▶  $n = 8$
- ▶  $m = 15$
- ▶  $f = 9$
- ▶  $k = 1$
- ▶  $n - m + f = 2$

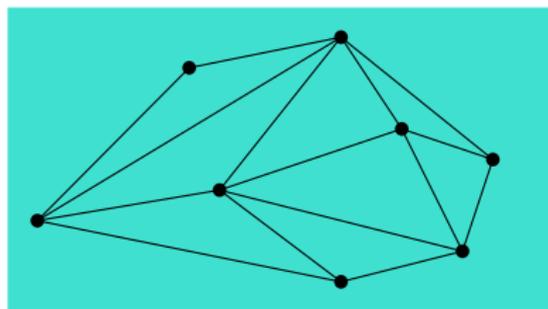
## 平面的グラフの辺数

連結無向グラフ  $G = (V, E)$ 

平面的グラフの辺数は小さい

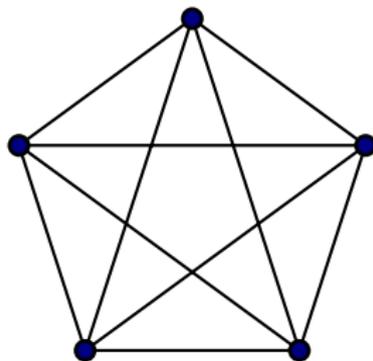
 $G$  が平面的で,  $|V| \geq 3$  ならば,

$$|E| \leq 3|V| - 6$$



- ▶  $|V| = 8$
- ▶  $3|V| - 6 = 18$
- ▶  $|E| = 15$

## このグラフは平面的グラフか?: 証明



平面的ではない

- ▶ 頂点数  $|V|$  は 5, 辺数  $|E|$  は 10
- ▶  $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10 = |E|$
- ▶  $\therefore |E| \leq 3|V| - 6$  を満たさないので, 平面的グラフではない  $\square$

## 目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

## 地図の彩色

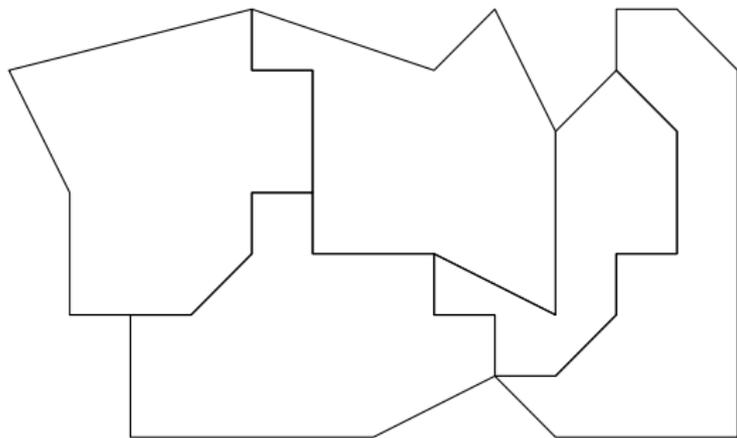


## 地図からグラフへ



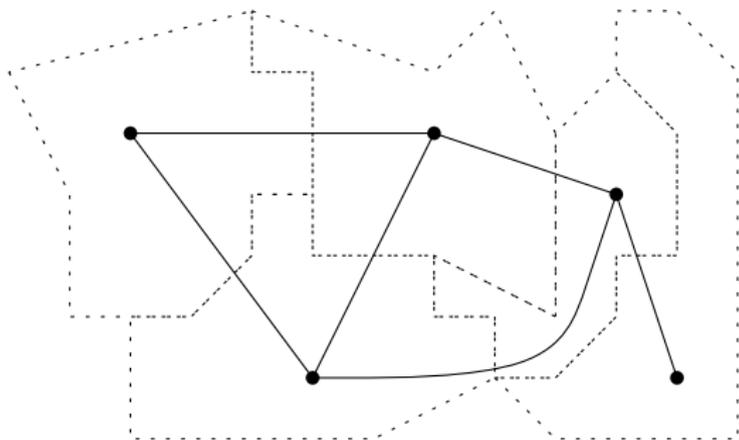
## 地図の数学的モデル化

地図は、平面上の領域を複数の部分領域へ分割したものとみなす



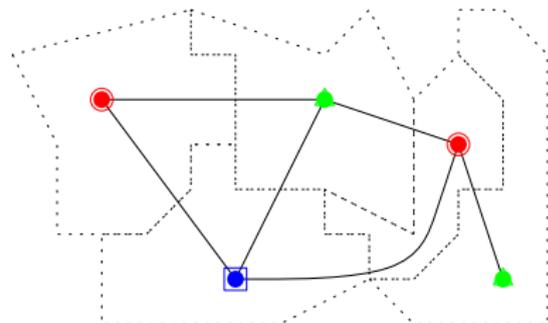
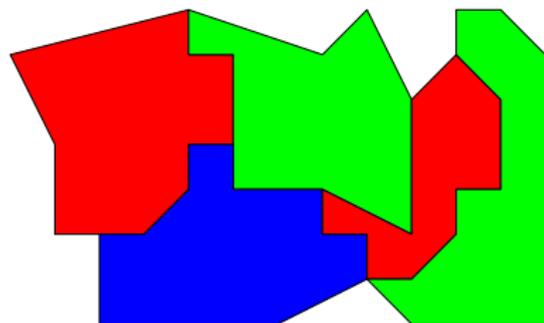
## 双対グラフ

領域分割の**双対グラフ**とは、無向グラフで各頂点が分割された部分領域に対応し、各辺が境界を (1 次元的に) 共有する 2 つの部分領域に対応するもの



## 地図の彩色

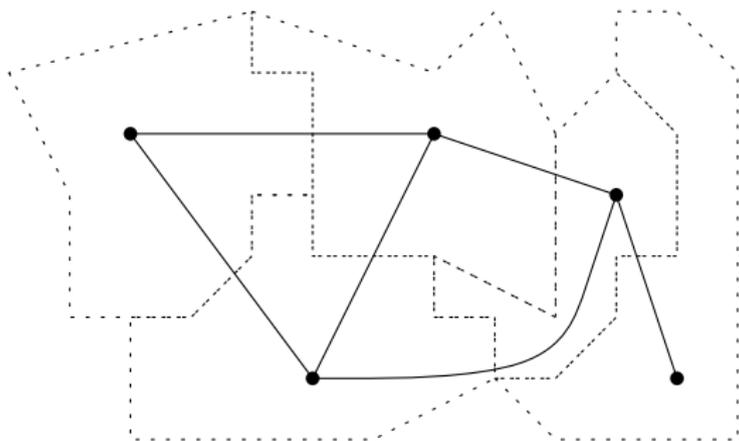
地図の彩色 = その双対グラフの彩色



## 双対グラフの平面性

重要な性質 (証明は略)

地図の双対グラフは平面的グラフである

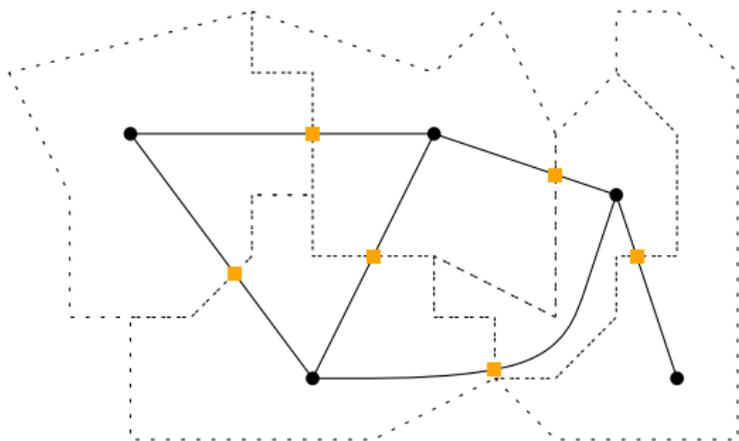


つまり、平面的グラフの彩色ができれば、地図の彩色もできる

## 双対グラフの平面性

重要な性質 (証明は略)

地図の双対グラフは平面的グラフである

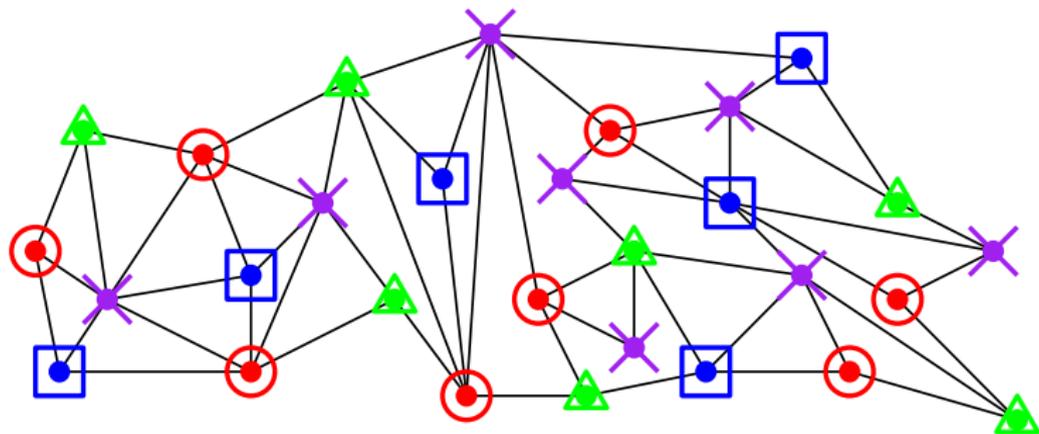


つまり、平面的グラフの彩色ができれば、地図の彩色もできる

## 平面的グラフの彩色

## 目標

平面的グラフをできるだけ少ない色で彩色する

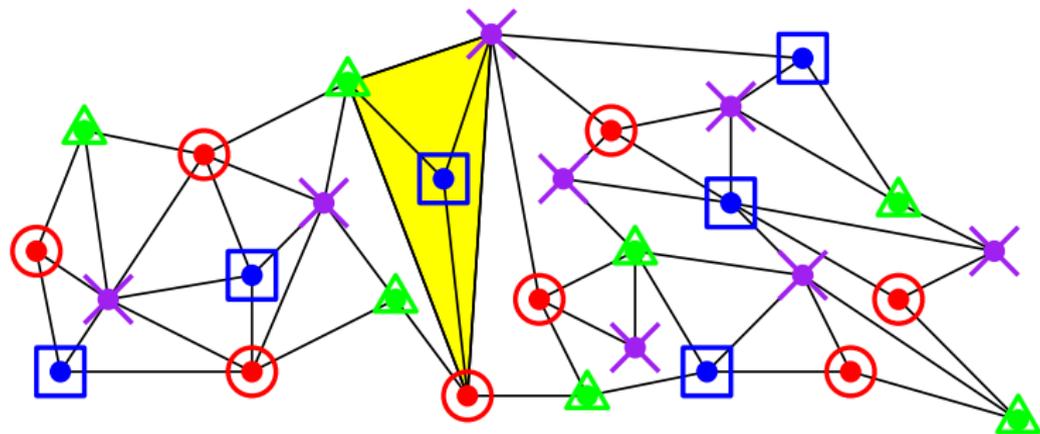


4色必要とする平面的グラフは存在

## 平面的グラフの彩色

## 目標

平面的グラフをできるだけ少ない色で彩色する

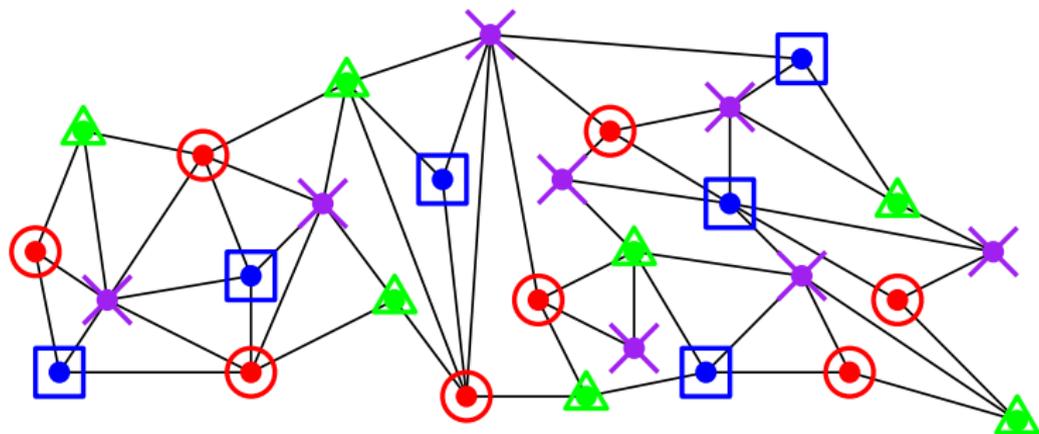


4色必要とする平面的グラフは存在

## 四色定理

四色定理 (Appel, Haken '77)

任意の平面的グラフは4彩色可能

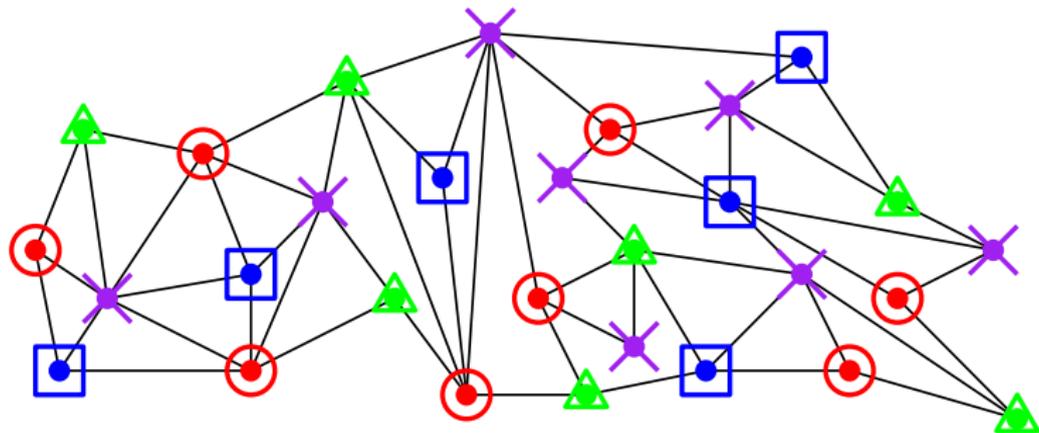


証明はコンピュータを使った膨大な場合分けによる

四色定理はこの講義で証明できないので…

今から証明すること：六色定理

任意の平面的グラフは6彩色可能



使用する道具は、オイラーの公式と帰納法のみ

## 六色定理：証明 (1)

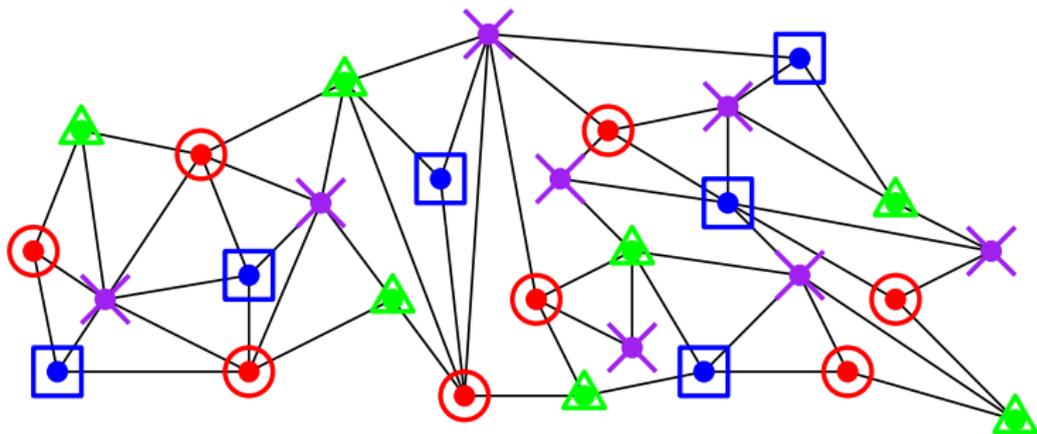
証明：頂点数  $n$  に関する帰納法

- ▶ 頂点数が 1 から 6 のとき，頂点の数だけ色を使えば彩色可能なのでグラフは 6 彩色可能である
- ▶ 頂点数  $n$  の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であると仮定する
- ▶ このとき，頂点数  $n+1$  の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であることを証明する

## 六色定理：証明 (2) — 補題

## 補題

平面的グラフには、必ず次数が5以下の頂点が存在する



## 六色定理：証明 (3) — 補題

## 補題

平面的グラフには、必ず次数が5以下の頂点が存在する

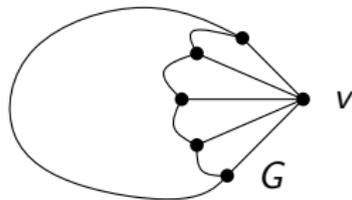
補題の証明：

- ▶ 頂点数が3未満のとき、すべての頂点の次数は2以下なので、正しい
- ▶ 頂点数が3以上である任意の平面的グラフ  $G = (V, E)$  を考える
- ▶  $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$  (オイラーの公式の帰結)
- ▶  $G$  の平均次数  $= \frac{2|E|}{|V|}$  (握手補題の帰結)
- ▶  $\therefore G$  の平均次数  $\leq \frac{2 \cdot (3 \cdot |V| - 6)}{|V|} = 6 - \frac{12}{|V|} < 6$
- ▶  $\therefore$  ある頂点の次数  $< 6$
- ▶  $\therefore$  ある頂点の次数  $\leq 5$  □

## 六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数  $n + 1$  の任意の平面的グラフを  $G = (V, E)$  とする

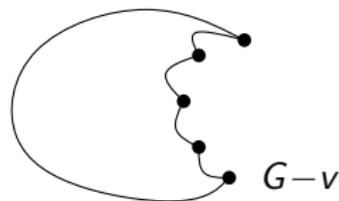
- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が  $G$  に存在する



## 六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数  $n + 1$  の任意の平面的グラフを  $G = (V, E)$  とする

- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が  $G$  に存在する
- ▶ そのような頂点を  $v \in V$  として， $G - v$  を考える

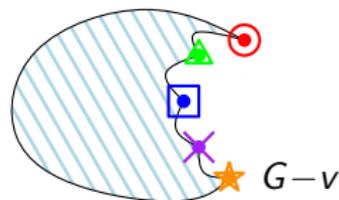


## 六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数  $n+1$  の任意の平面的グラフを  $G = (V, E)$  とする

- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が  $G$  に存在する
- ▶ そのような頂点を  $v \in V$  として， $G-v$  を考える
- ▶  $G-v$  の頂点数  $n$  の平面的グラフなので，6 彩色可能

( $\because$  帰納法の仮定)

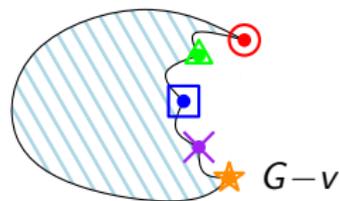


## 六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数  $n+1$  の任意の平面的グラフを  $G = (V, E)$  とする

- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が  $G$  に存在する
- ▶ そのような頂点を  $v \in V$  として， $G-v$  を考える
- ▶  $G-v$  の頂点数  $n$  の平面的グラフなので，6 彩色可能

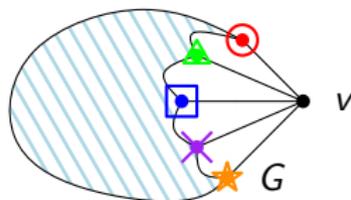
( $\because$  帰納法の仮定)



## 六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数  $n+1$  の任意の平面的グラフを  $G = (V, E)$  とする

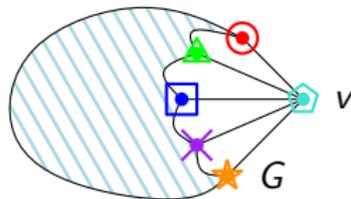
- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が  $G$  に存在する
- ▶ そのような頂点を  $v \in V$  として， $G-v$  を考える
- ▶  $G-v$  の頂点数  $n$  の平面的グラフなので，6 彩色可能  
( $\because$  帰納法の仮定)
- ▶  $G-v$  の 6 彩色において， $v$  の ( $G$  における) 隣接頂点を見ると  
高々 5 色しか使われてない  
( $\because v$  の次数  $\leq 5$ )



## 六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数  $n+1$  の任意の平面的グラフを  $G = (V, E)$  とする

- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が  $G$  に存在する
- ▶ そのような頂点を  $v \in V$  として， $G-v$  を考える
- ▶  $G-v$  の頂点数  $n$  の平面的グラフなので，6 彩色可能  
( $\because$  帰納法の仮定)
- ▶  $G-v$  の 6 彩色において， $v$  の ( $G$  における) 隣接頂点を見ると  
高々 5 色しか使われてない  
( $\because v$  の次数  $\leq 5$ )
- ▶ すなわち， $G-v$  の 6 彩色に， $v$  を付け加えて，  
 $v$  の隣接頂点で使われていない色を  
 $G-v$  の 6 彩色で使ったパレットから選び  
その色で  $v$  を塗ることにより， $G$  の 6 彩色が得られる □

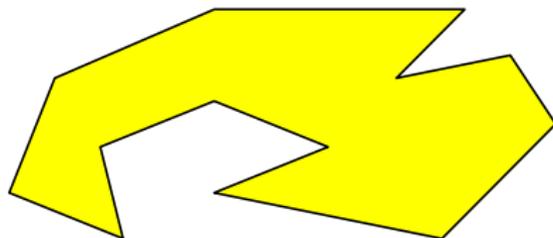


## 目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

## 単純多角形

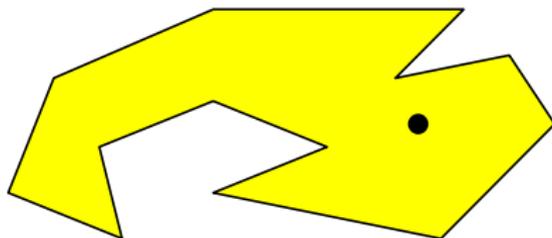
単純多角形：自己交差を持たず，穴も持たない多角形



これが美術館の1つのフロアを表していると思う

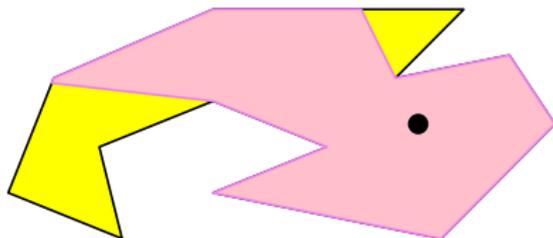
## 単純多角形における監視員

監視員は点

監視員  $g$  が点  $p$  を見ることができる とは？線分  $\overline{gp}$  が多角形  $P$  に含まれている

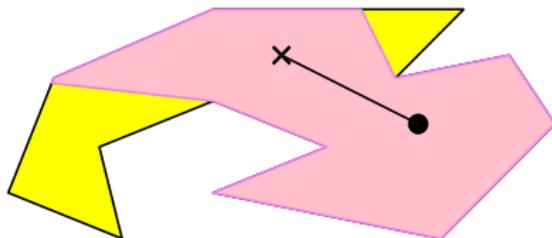
## 単純多角形における監視員

監視員は点

監視員  $g$  が点  $p$  を見ることができるとは？線分  $\overline{gp}$  が多角形  $P$  に含まれている

## 単純多角形における監視員

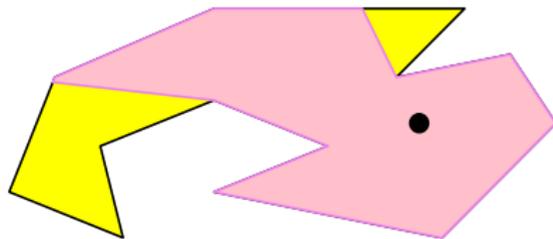
監視員は点

監視員  $g$  が点  $p$  を見ることができる とは？線分  $\overline{gp}$  が多角形  $P$  に含まれている

## 単純多角形の監視

監視員の集合  $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  が多角形  $P$  を監視するとは？

任意の点  $x \in P$  に対して、ある監視員  $g_i$  が存在して  $g_i$  が  $x$  を見ることができる



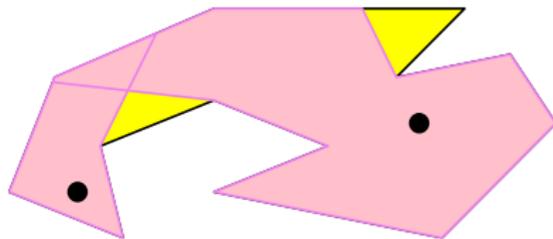
## 目標

できるだけ少ない数の監視員で、与えられた単純多角形を監視したい

## 単純多角形の監視

監視員の集合  $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  が多角形  $P$  を監視するとは？

任意の点  $x \in P$  に対して、ある監視員  $g_i$  が存在して  $g_i$  が  $x$  を見ることができる



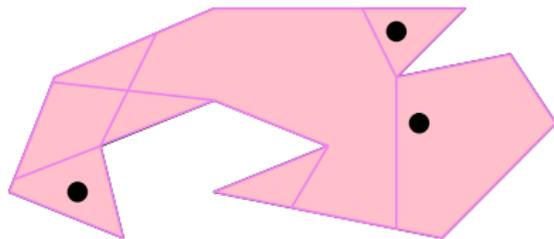
## 目標

できるだけ少ない数の監視員で、与えられた単純多角形を監視したい

## 単純多角形の監視

監視員の集合  $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  が多角形  $P$  を監視するとは？

任意の点  $x \in P$  に対して、ある監視員  $g_i$  が存在して  $g_i$  が  $x$  を見ることができる

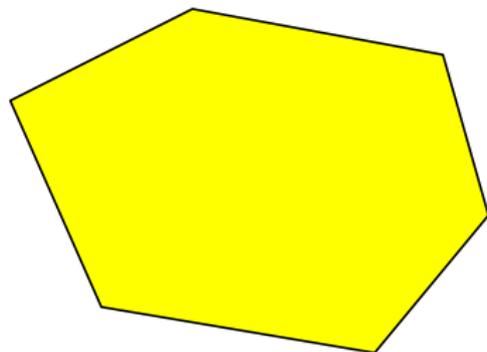


## 目標

できるだけ少ない数の監視員で、与えられた単純多角形を監視したい

## 簡単な場合：凸多角形の監視

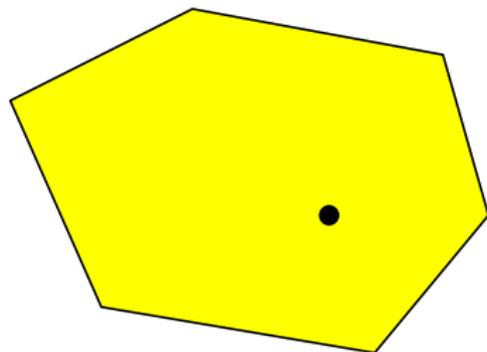
凸多角形は1人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

## 簡単な場合：凸多角形の監視

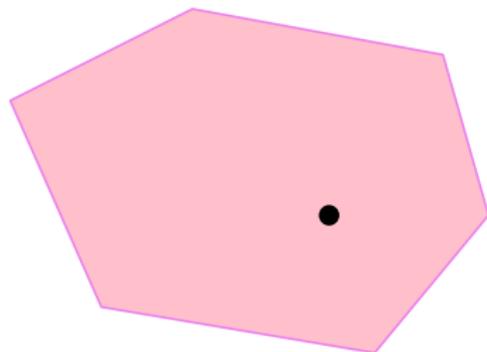
凸多角形は1人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもいい

## 簡単な場合：凸多角形の監視

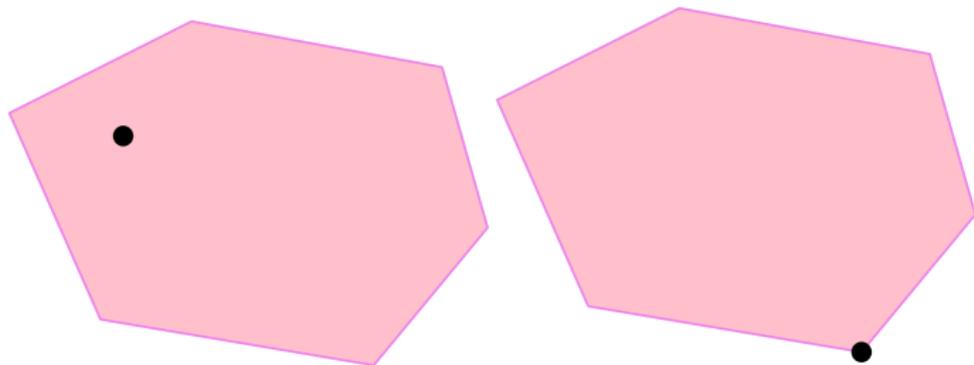
凸多角形は1人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

## 簡単な場合：凸多角形の監視

凸多角形は1人で監視できる



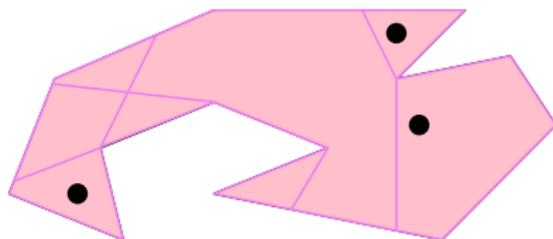
監視員は多角形のどこに置いてもよい

## 単純多角形の監視：定理

## 美術館定理 (Chvátal '75)

頂点数  $n$  の任意の単純多角形は、高々  $\lfloor n/3 \rfloor$  人の監視員で監視可能

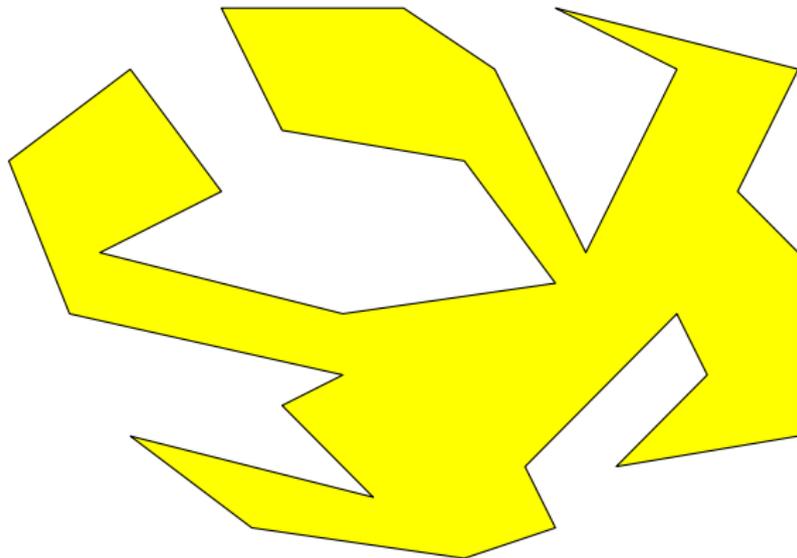
例：  $n = 13$ ,  $\lfloor n/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = 4$



今から行う証明は Fisk ('78) による

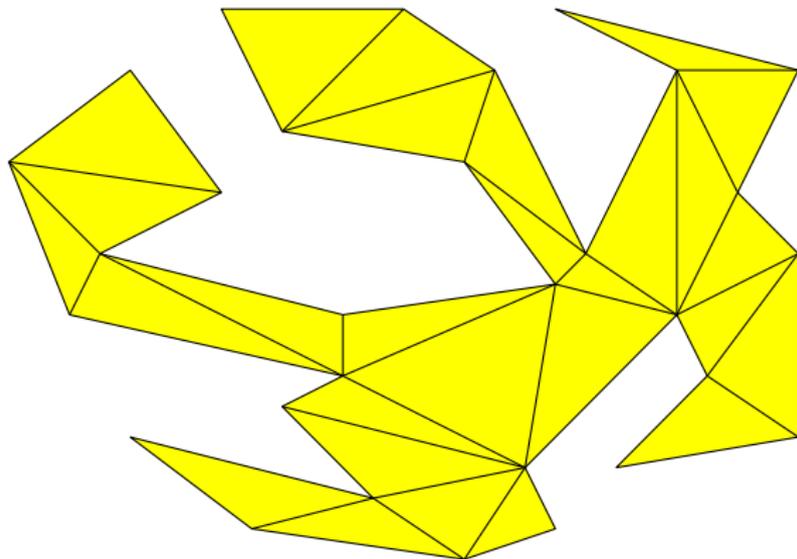
## 単純多角形の監視：証明

## 基本的なアイデア：単純多角形の三角形分割



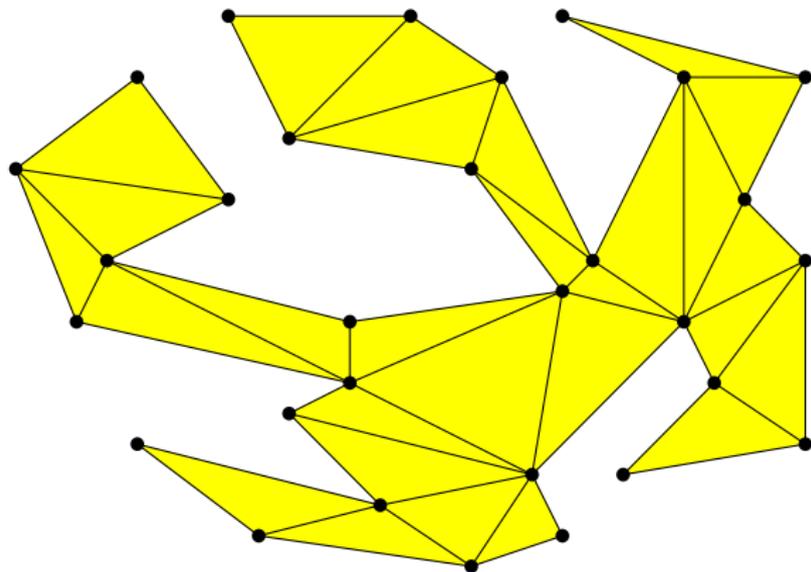
## 単純多角形の監視：証明

## 基本的なアイデア：単純多角形の三角形分割



## 単純多角形の監視：証明

三角形分割をグラフであると見なす



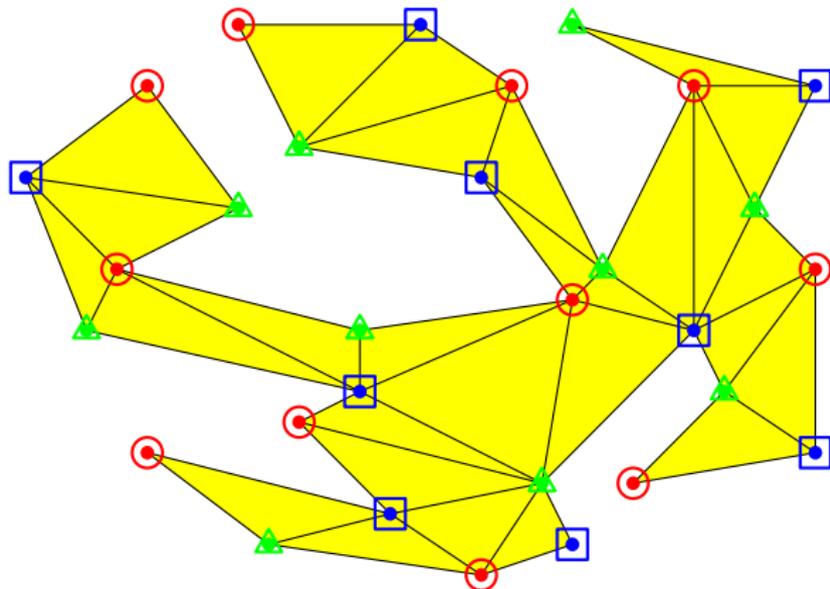
これは外平面グラフ (すべての頂点が外面の境界上にある)

## 外平面的グラフの彩色

## 補題 (演習問題)

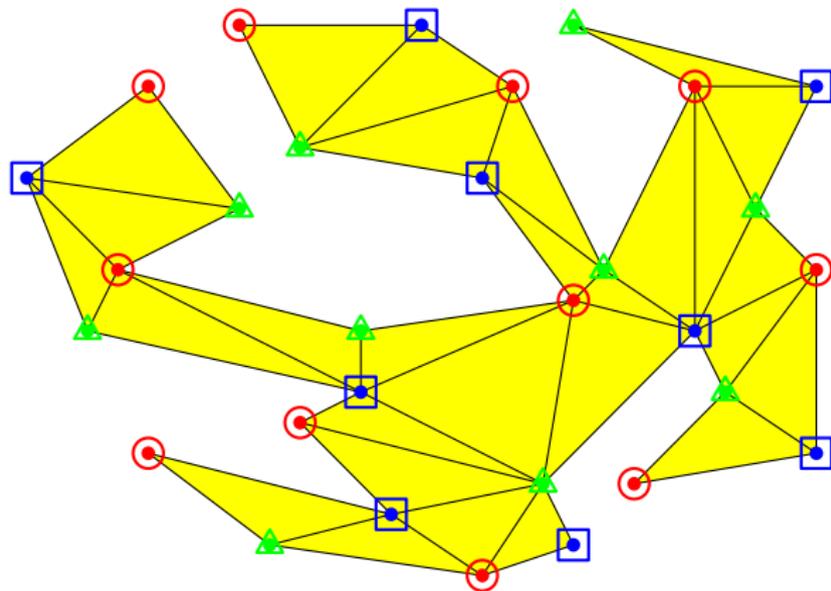
頂点数  $n$  の任意の外平面的グラフは 3 彩色可能

ヒント : 四色定理を使ってもよい (四色定理を使わなくても証明可)



## 三角形分割の彩色

三角形分割における各三角形には3色すべて現れている

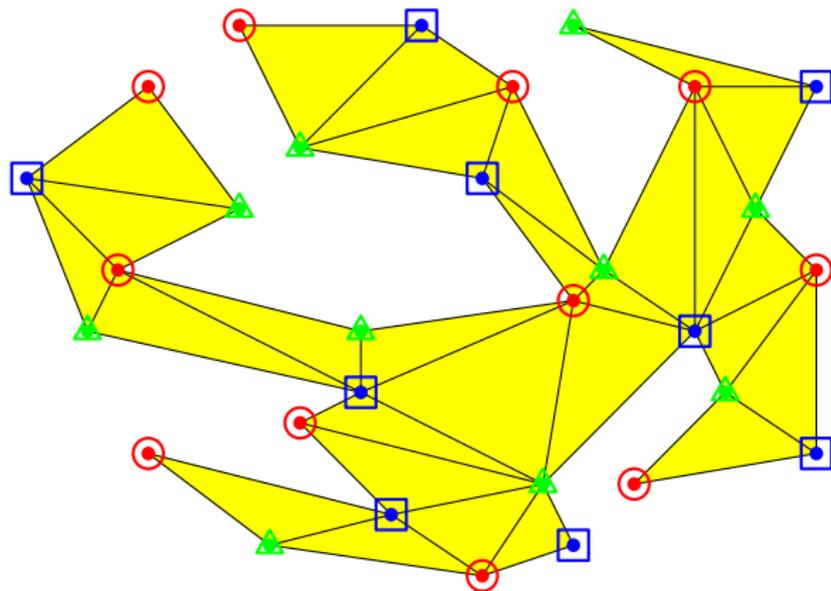


総頂点数 = 30,

● 赤頂点数 = 11, ■ 青頂点数 = 9, ▲ 緑頂点数 = 10

最も使われていない色の頂点を見してみる

最も使われていない色の頂点数  $\leq \lfloor n/3 \rfloor$



総頂点数 = 30,

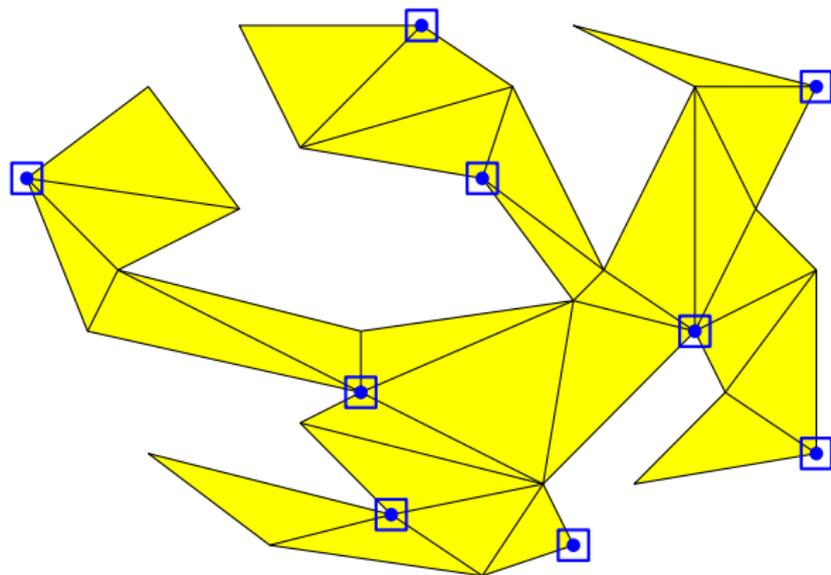
● 赤頂点数 = 11,

■ 青頂点数 = 9,

▲ 緑頂点数 = 10

最も使われていない色の頂点を見してみる

最も使われていない色の頂点数  $\leq \lfloor n/3 \rfloor$

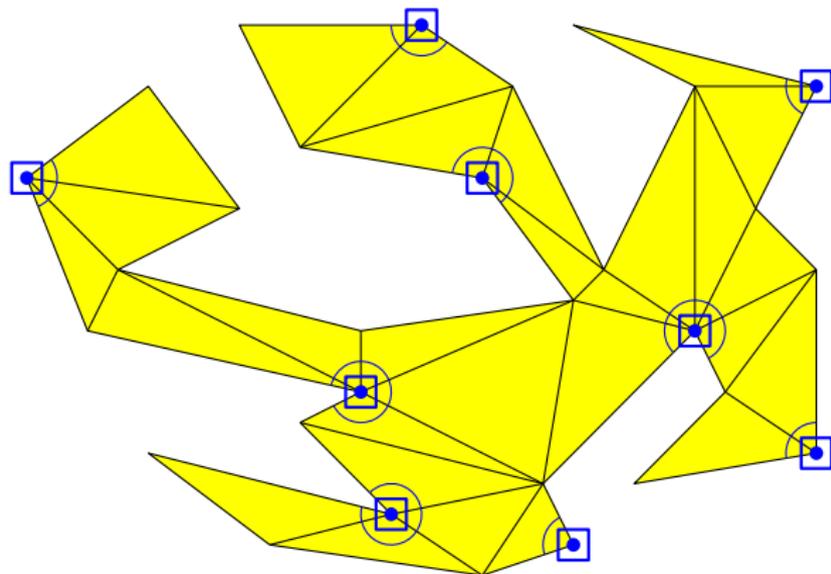


総頂点数 = 30,

● 赤頂点数 = 11, ■ 青頂点数 = 9, ▲ 緑頂点数 = 10

## 最も使われていない色の頂点を見してみる

その色で塗られた頂点に監視員を置けばよい



- ▶ 三角形分割におけるすべての三角形が監視できる
- ▶ すなわち，多角形全体が監視できる



## 目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

## 概要

## 今日のまとめ

平面グラフの彩色を用いて次の問題を解決する

- ▶ 地図の彩色
- ▶ 美術館の監視

## 概要

## 主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- ▶ アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

## 達成目標

以下の4項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、数理モデルを構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理、特に、最小最大定理の重要性を説明でき、それを用いて最適性の証明ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK
- ▶ 授業評価アンケート
  - ▶ 科目番号 : 1128
  - ▶ 科目名 : グラフとネットワーク
  - ▶ 担当教員名 : 岡本 吉央

## 目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ