グラフとネットワーク 第 6 回
最大流：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 5 月 16 日

最終更新：2016 年 5 月 12 日　00:56

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/11)
2. 道と閉路：数理 (4/18)
3. 木：数理 (4/25)
4. マッチング：数理 (5/2)
5. マッチング：モデル化 (5/9)
6. 最大流：数理 (5/16)
7. 最大流：モデル化 (1) (5/23)

* ∗ 休講 (5/30)
* 中間試験 (6/6)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 最大流：モデル化 (2) (6/13)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/20)
10. 彩色：数理 (6/27)
11. 彩色：モデル化 (7/4)
12. 平面グラフ：数理 (7/11)

* ∗ 海の日で休み (7/18)

13. 平面グラフ：モデル化 (7/25)
14. 予備日 (講義を行うかどうかは未定) (8/1)

- 期末試験 (8/8？)

注意：予定の変更もありうる

この講義の概要 (シラバス掲載内容)

主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- 「流れ」が何であるのか記述でき，基本性質を証明できる
- 流れとカットの双対性により流れの最大性を証明できる
- 増加道法にしたがって，最大流を計算できる

重要な定理

- 最大流最小カット定理
- 整数流定理

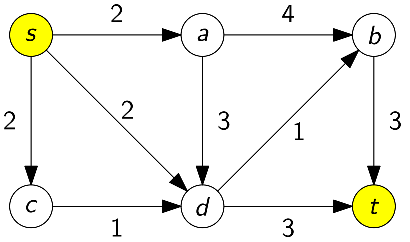
目次

最大流問題とは？

最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, A)$，各弧 $a \in A$ の容量 $c(a)$，2 頂点 $s, t \in V$ (弧の容量は非負実数)

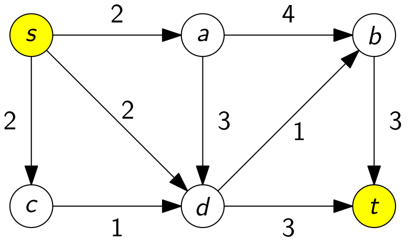


最大流問題とは？

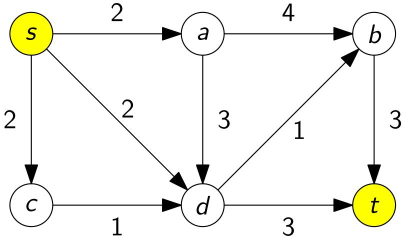
最大流問題とは？

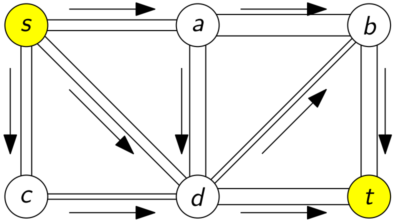
出力

- s から t へ至る流れで，その値が最大のもの
  (s から t へ至る最大流)

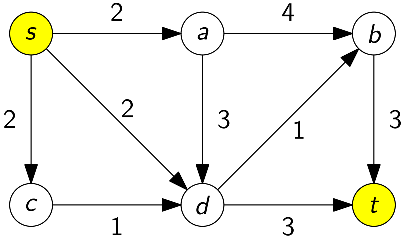


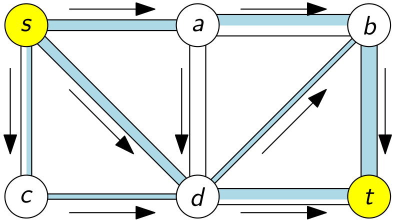
流れとは？: 直感 (1)



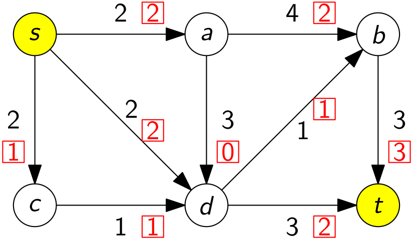


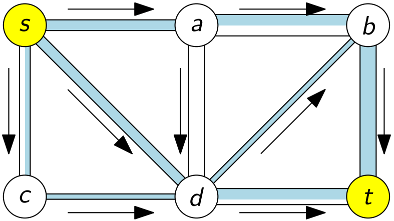
流れとは?: 直感 (2)





流れとは?: 直感 (3)


s
a
b
c
d
t
2 $\boxed{2}$
4 $\boxed{2}$
2 $\boxed{1}$
2 $\boxed{2}$
3 $\boxed{0}$
1 $\boxed{1}$
3 $\boxed{3}$
1 $\boxed{1}$
3 $\boxed{2}$


s
a
b
c
d
t

流れとは？ (1)

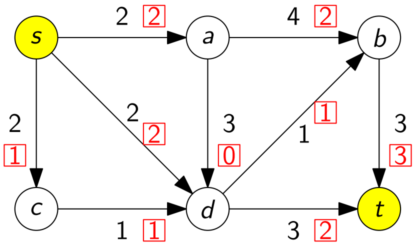
s から t へ至る流れとは？

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f \colon A \to \mathbb{R}$) で
次の 2 つを満たすもの

1. s, t 以外の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して， (流量保存制約)

$$\sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))$$

(v へ流入する総量) (v から流出する総量)



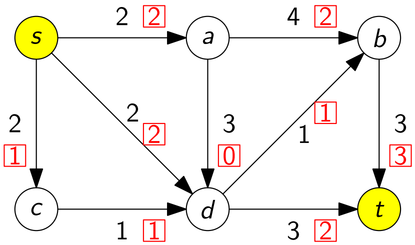
流れとは？ (2)

s から t へ至る流れとは？

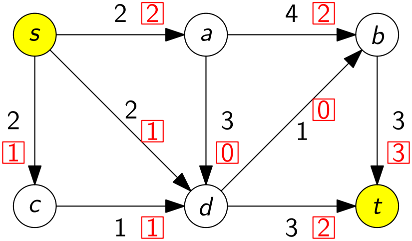
各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f \colon A \to \mathbb{R}$) で次の 2 つを満たすもの

2. 各弧 $a \in A$ において，(容量制約)

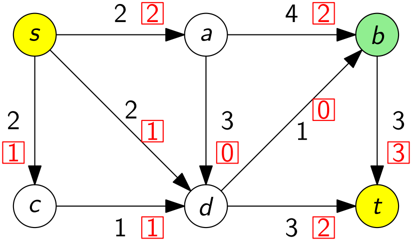
$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$



これは流れか？ (1)

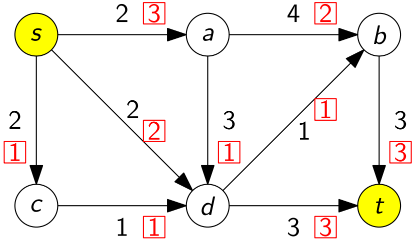


これは流れか？ (1)

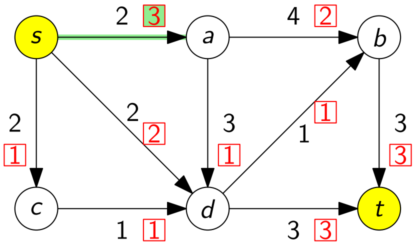


流れではない

これは流れか？ (2)

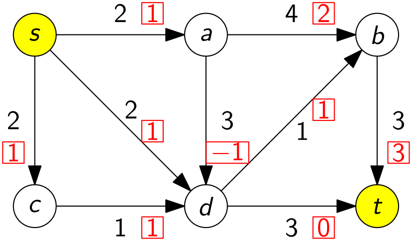


これは流れか？ (2)

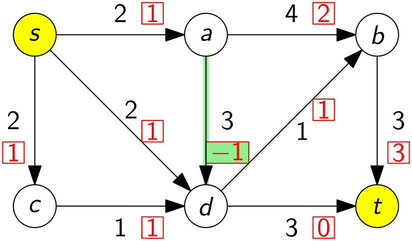


流れではない

これは流れか？ (3)

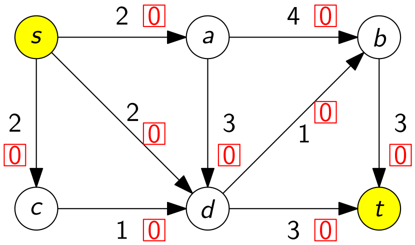


これは流れか？ (3)

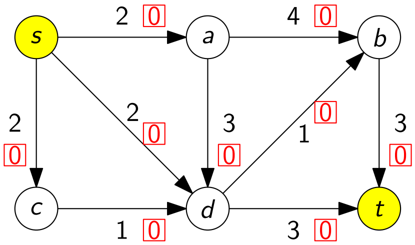


流れではない

これは流れか？ (4)



これは流れか？ (4)



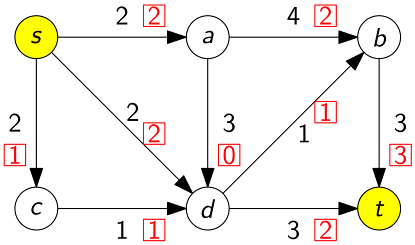
流れである

流れの値

流れ f の値とは？

s から t へ至る流れ f の値を次の量で定義し，$\mathtt{val}(f)$ と表記する

$$\mathtt{val}(f) = \sum_{u:(s,u)\in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s)\in A} f((u,s))$$

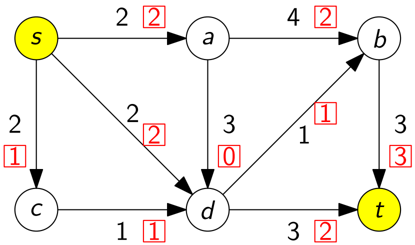


この流れの値は 5

最大流

最大流とは？

s から t へ至る流れ f が最大流であるとは，
s から t へ至る任意の流れ f' に対して $\mathtt{val}(f') \leq \mathtt{val}(f)$ が成り立つこと



注：最大流が存在する，ということは当たり前ではない

記法の簡略化：流入，流出，純流入，純流出

s から t へ至る流れ $f\colon A \to \mathbb{R}$

記法と用語

各頂点 $v \in V$ に対して，次のように記号を定義

- $f^+(v) = \sum_{u:(v,u)\in A} f((v,u))$ （v からの流出）
- $f^-(v) = \sum_{u:(u,v)\in A} f((u,v))$ （v への流入）

このとき，

- $f^+(v) - f^-(v)$ は v における**純流出**
- $f^-(v) - f^+(v)$ は v における**純流入**

$f^+(v) - f^-(v)$ を $\partial f(v)$ と書いて，f の v における**境界**と呼ぶことがある

記法の簡略化：流れの定義と流れの値の定義の書き換え

s から t へ至る流れ $f\colon A \to \mathbb{R}$

つまり，次のように書き換えられる

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

流れ f の値

- $\mathtt{val}(f) = f^+(s) - f^-(s)$

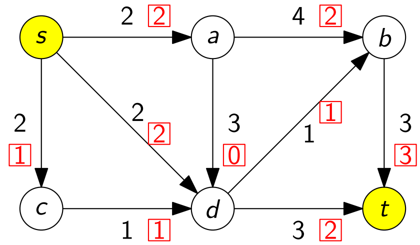
流れの総和 = 流出量の総和 = 流入量の総和

s から t へ至る流れ $f\colon A \to \mathbb{R}$

次が成り立つ

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{v \in V} f^{+}(v) = \sum_{v \in V} f^{-}(v)$$

証明：演習問題 (ヒント：握手補題の証明を思い出す)



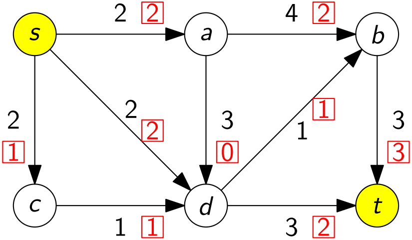
v	$f^{+}(v)$	$f^{-}(v)$
s	5	0
a	2	2
b	3	3
c	1	1
d	3	3
t	0	5
計	14	14

s における純流出 $=$ t における純流入

次が成り立つ

s から t へ至る任意の流れ $f\colon A \to \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{array}{ccc} f^+(s) - f^-(s) & = & f^-(t) - f^+(t) \\ (s \text{ における純流出}) & & (t \text{ における純流入}) \end{array}$$



左辺 $= 5 =$ 右辺

s における純流出 $=$ t における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

s における純流出 $=$ t における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^{+}(v) = f^{-}(v)$

から，

- $$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^{+}(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^{-}(v) \quad \cdots\cdots (1)$$

が得られる．

s における純流出 $=$ t における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

から，

- $$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^-(v) \quad \cdots\cdots (1)$$

が得られる．また，

- $$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \quad \cdots\cdots (2)$$

となる

s における純流出 $=$ t における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

から，

- $$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^-(v) \quad \cdots\cdots (1)$$

が得られる．また，

- $$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \quad \cdots\cdots (2)$$

となるので，式 (2) − 式 (1) より，

- $f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t)$

が得られる．

s における純流出 $=$ t における純流入：証明

流量保存制約

- 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して，$f^+(v) = f^-(v)$

から，

- $$\sum_{v \in V - \{s,t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s,t\}} f^-(v) \quad \cdots\cdots (1)$$

が得られる．また，

- $$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \quad \cdots\cdots (2)$$

となるので，式 (2) − 式 (1) より，

- $f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t)$

が得られる．整理すると

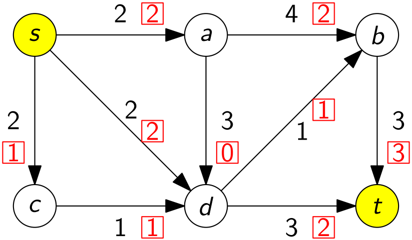
- $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$

が得られる． □

最大流問題が出てくる場面：配送問題

- 有向グラフは 道路ネットワーク をモデル化
- s は 部品工場 をモデル化
- t は 組立工場 をモデル化
- 弧の容量は 道幅 をモデル化

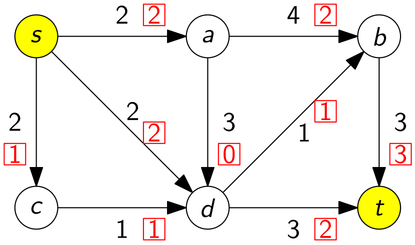
最大流問題 = できるだけ多くの部品を組み立て工場に運ぶには？



他の応用は後の講義で

目次

疑問：流れと「対」になるものは何か？



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

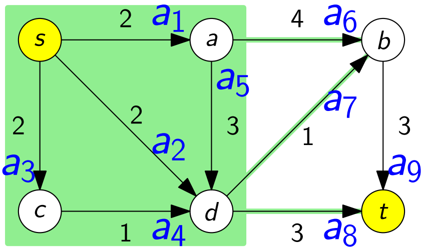
- ⇝ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい

最大化	最小化
マッチング	頂点被覆
流れ	???

カット

s, t カットとは？

s, t カットとは，頂点部分集合 S で，$s \in S$ と $t \notin S$ を満たすもののこと



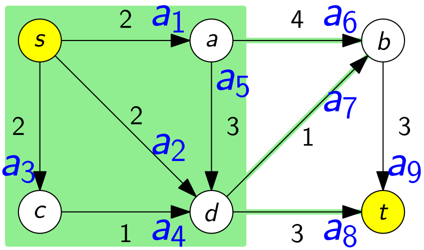
イメージ：s から t へ至る流れは S の側から $V - S$ の側に向かっていく

カットの容量

s,t カットの容量とは？

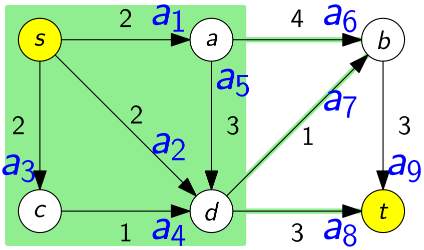
s,t カット S の**容量**とは，次の式で定義され，$\mathrm{cap}(S)$ と表記する

$$\mathrm{cap}(S) = \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v))$$



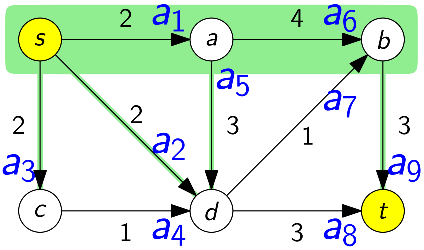
S に始点を持ち，$V - S$ に終点を持つ弧の容量の合計

カット容量の例 (1)



$\{s, a, c, d\}$ は s, t カットで，その容量は 8

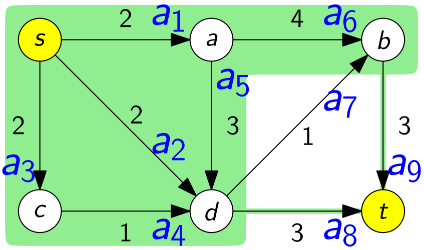
カット容量の例 (2)



$\{s, a, b\}$ は s, t カットで，その容量は 10

注意：a_7 の容量はカットの容量に含めない

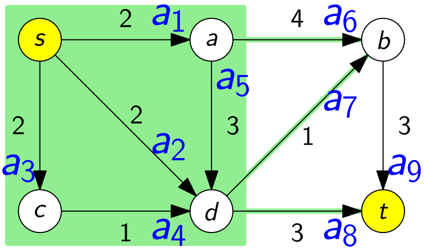
カット容量の例 (3)



$\{s, a, b, c, d\}$ は s, t カットで，その容量は 6

注意：a_7 の容量はカットの容量に含めない

カットの容量と流れ



直感

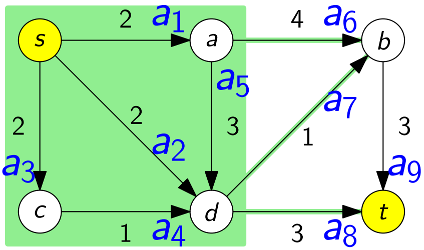
- s から t へ至る流れ f は S から $V - S$ へ向かっていく
- $\therefore$ $\mathtt{cap}(S)$ よりもたくさん s から t へ流れない
- $\therefore$ $\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

カットの容量と流れ：より厳密に

流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s,t カット S に対して

$$\mathtt{val}(f) \le \mathtt{cap}(S)$$



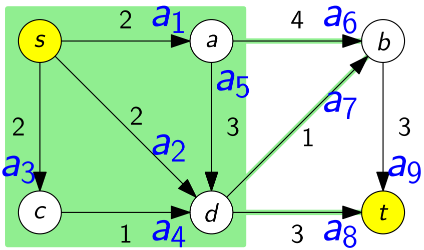
カットの容量と流れ：補題

補題 A

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s,t カット S に対して

$$\mathtt{val}(f) = \underbrace{\sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v))}_{(S\text{ から出る総流量})} - \underbrace{\sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v))}_{(S\text{ に入る総流量})}$$

証明：演習問題



カットの容量と流れ：証明

証明したいこと：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s,t カット S に対して

$$\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$$

証明：

$$\mathtt{val}(f) \overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v))$$

カットの容量と流れ：証明

証明したいこと：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s,t カット S に対して

$$\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&\leq \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) \qquad \because f((u,v)) \geq 0
\end{aligned}$$

カットの容量と流れ：証明

証明したいこと：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s,t カット S に対して

$$\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&\leq \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) && \because f((u,v)) \geq 0 \\
&\leq \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v)) && \because f((u,v)) \leq c((u,v))
\end{aligned}$$

カットの容量と流れ：証明

証明したいこと：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s,t カット S に対して

$$\mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$$

証明：

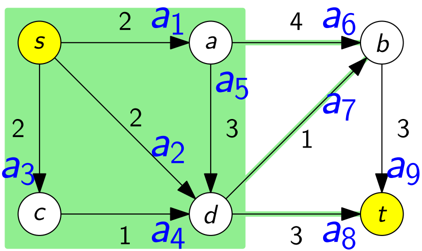
$$\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&\leq \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) && \because f((u,v)) \geq 0 \\
&\leq \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v)) && \because f((u,v)) \leq c((u,v)) \\
&= \mathtt{cap}(S)
\end{aligned}$$

□

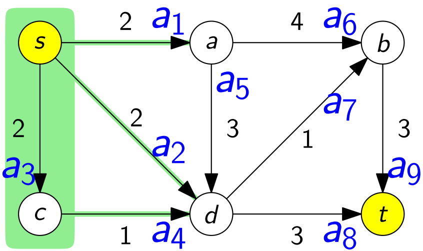
最小カット

最小 s, t カットとは？

最小 s, t カットとは，s, t カット S で，
任意の s, t カット S' に対して，$\mathrm{cap}(S) \leq \mathrm{cap}(S')$ を満たすもの



最小 s, t カットではない



最小 s, t カットである

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c\colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c\colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流とカットの関係

f が最大流
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c \colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流とカットの関係

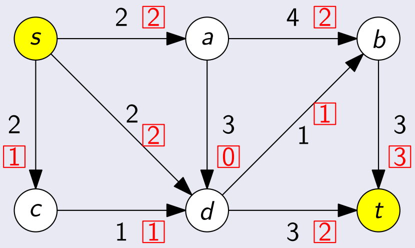
f が最大流
S が s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

最大流と最小カットの関係 (弱双対性)

f が最大流
S が最小 s, t カット
$\Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{cap}(S)$

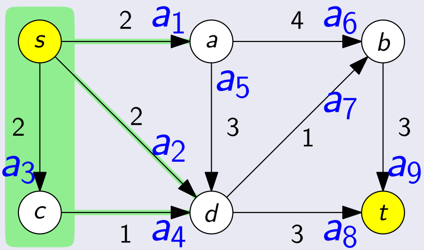
弱双対性の使い方

下界



最大流の値 ≥ 5

上界

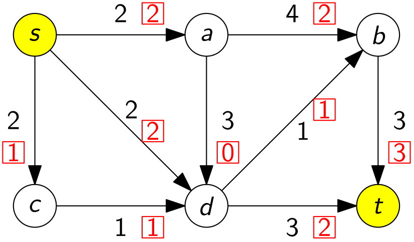


最大流の値 ≤ 5

したがって

- 左の図にある流れは最大流であり，その値は 5
- 右の図にある s, t カットは最小 s, t カットであり，その容量は 5

疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編



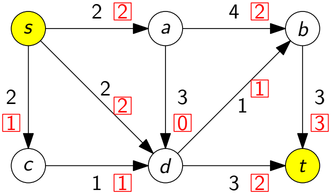
この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- $\rightsquigarrow$ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- $\rightsquigarrow$ それは s, t カット !!!

最大化	最小化
マッチング	頂点被覆
流れ	s, t カット

目次

疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編 (再)



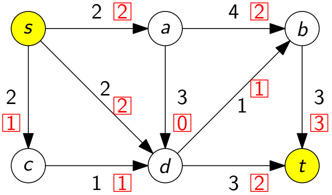
この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- ⇝ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ⇝ それは s, t カット !!!

問題点？

$\mathtt{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ となる f と S が存在しないかもしれない？

疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編 (再)



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- $\rightsquigarrow$ 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- $\rightsquigarrow$ それは s, t カット !!!

問題点？

$\mathtt{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ となる f と S が存在しないかもしれない？

解決 $\rightsquigarrow$ (最大流最小カット定理)

$\mathtt{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ となる f と S が必ず存在する !!

最大流最小カット定理

最大流最小カット定理 (強双対性) (Ford, Fulkerson '56)

f が最大流
S が最小 s,t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$

注意

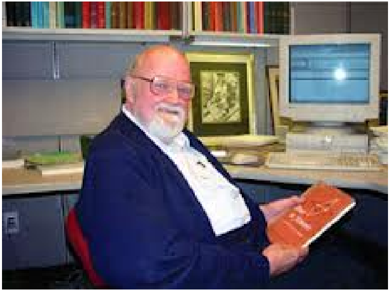
弱双対性

- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ ならば f は最大流

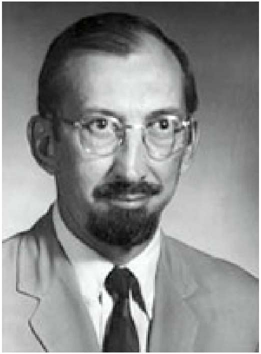
強双対性

- $\mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$ となる f, S が必ず存在

Lester R. Ford, Jr. と Delbert R. Fulkerson



L. R. Ford, Jr.
フォード
(1927–)



D. R. Fulkerson
ファルカーソン
(1924–1976)

https://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=algoritmo_ford_fulkerson

最大流最小カット定理 — 証明に向けて

最大流最小カット定理 (強双対性) (Ford, Fulkerson '56)

f が最大流
S が最小 s,t カット $\Rightarrow \mathtt{val}(f) = \mathtt{cap}(S)$

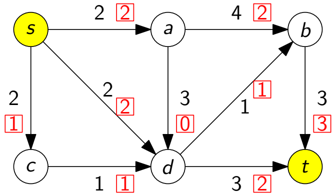
この講義では容量が整数の場合のみ証明する

- 容量が無理数の場合の証明は，この講義の範囲を超える (最後に補足)

証明法：アルゴリズムによる証明

最大流問題の解き方

1. 線形計画問題として定式化し，線形計画法のアルゴリズムを使う
 (『数理計画法』で学ぶ)
2. 最大流問題独自のアルゴリズムを利用する
 (特に，増加道法を紹介する)

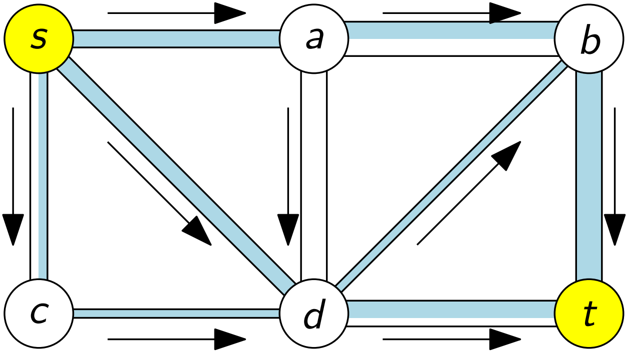


今からやること

増加道法を説明する

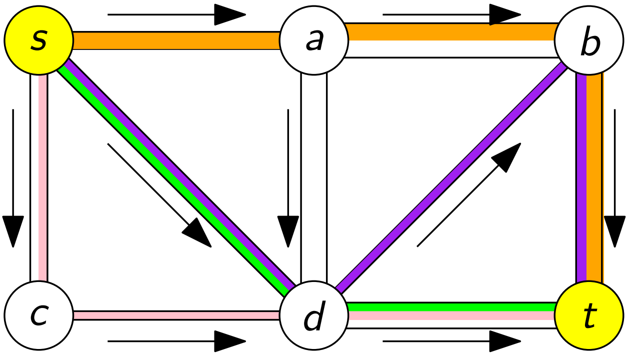
- 重要概念：補助ネットワーク，増加道

増加道法：基本アイディア



- 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

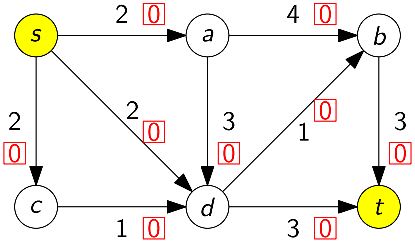
増加道法：基本アイディア



- 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

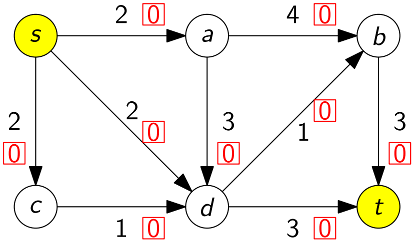
増加道法の動き (1)

任意の流れから始める (例えば，どの弧の上にも 0 だけ流れるもの)

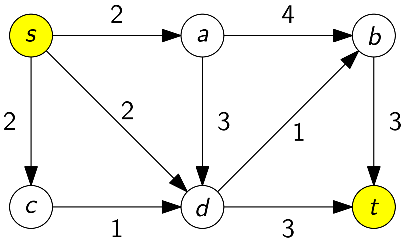


増加道法の動き (1)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る (残余ネットワークとも呼ばれる)



元のネットワーク

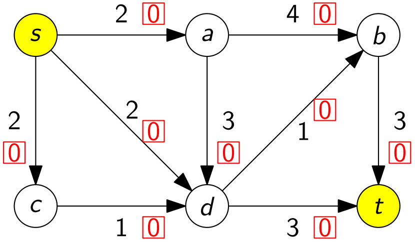


補助ネットワーク

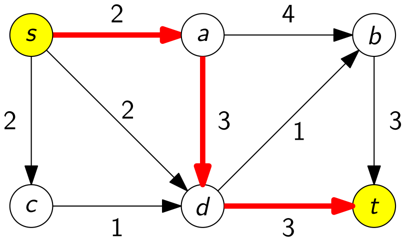
この場合は，始めのグラフと同じ
(次から変わるので，定義はそこで説明)

増加道法の動き (1)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける



元のネットワーク

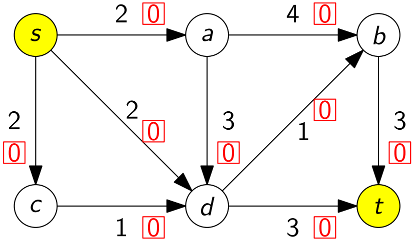


補助ネットワーク

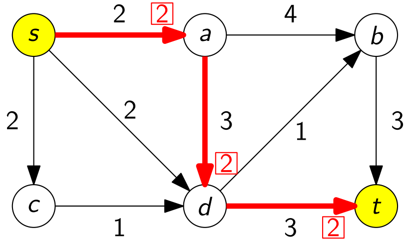
このような道を増加道 (ぞうかどう) と呼ぶ

増加道法の動き (1)：流れの増加

道に沿って，できる限り流れを増加させる



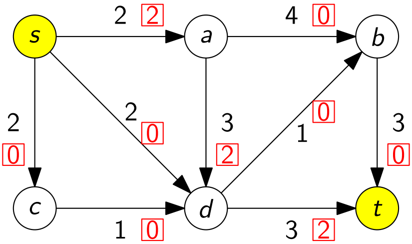
元のネットワーク



補助ネットワーク

増加道法の動き (2)

現在得られている流れ

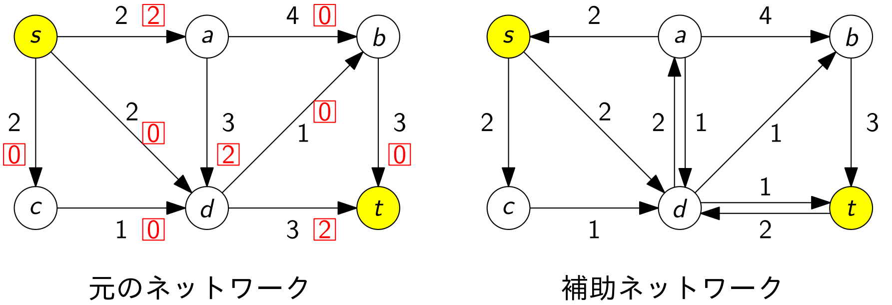


先ほどの手順を繰り返す

- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

増加道法の動き (2)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



補助ネットワークとは？

- 頂点集合はもとの有向グラフと同じ
- 2 頂点間に弧がある ⇔ その弧を通してまだ流せる (逆向き弧に注意)
- 弧の容量 = 流せる最大量

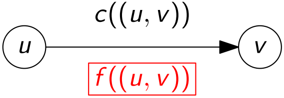
補助ネットワーク：定義

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c\colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 s, t

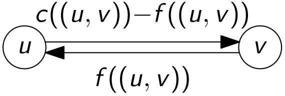
流れ f に対する補助ネットワークとは？

流れ f に対する補助ネットワークは次で定義される

- 有向グラフ $G_f = (V, A_f)$，$A_f = A_f^{\mathrm{F}} \cup A_f^{\mathrm{B}}$
  - $A_f^{\mathrm{F}} = \{(u, v) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) < c((u, v))\}$ (順向きの弧集合)
  - $A_f^{\mathrm{B}} = \{(v, u) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) > 0\}$ (逆向きの弧集合)
- 容量 $c_f\colon A_f \to \mathbb{R}$
  - $(u, v) \in A_f^{\mathrm{F}}$ のとき，$c_f((u, v)) = c((u, v)) - f((u, v))$
  - $(v, u) \in A_f^{\mathrm{B}}$ のとき，$c_f((v, u)) = f((u, v))$



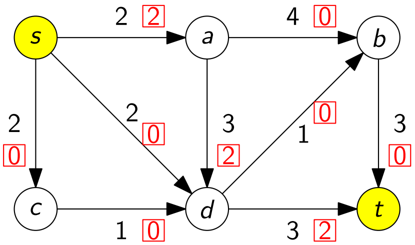
元のネットワーク



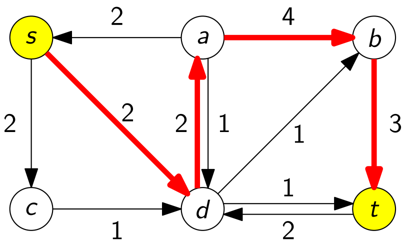
補助ネットワーク

増加道法の動き (2)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける



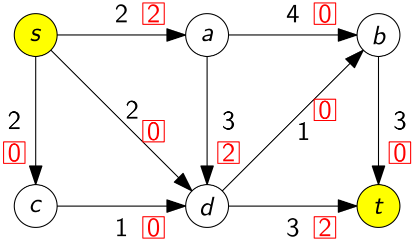
元のネットワーク



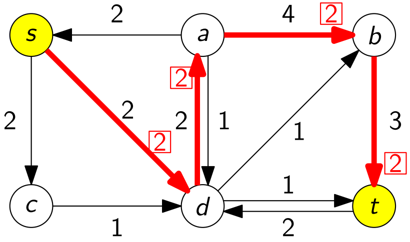
補助ネットワーク

増加道法の動き (2)：流れの増加

道に沿って，できる限り流れを増加させる



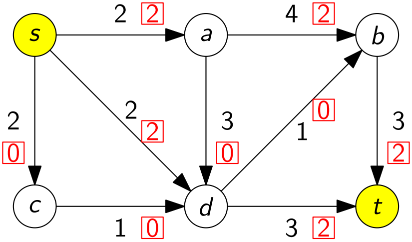
元のネットワーク



補助ネットワーク

増加道法の動き (3)

現在得られている流れ

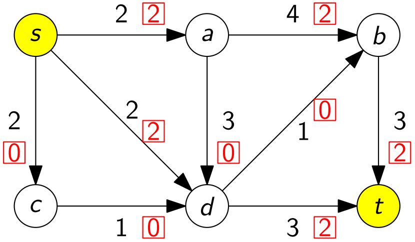


先ほどの手順を繰り返す

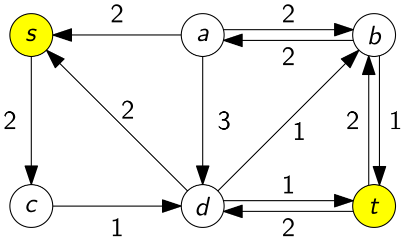
- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

増加道法の動き (3)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



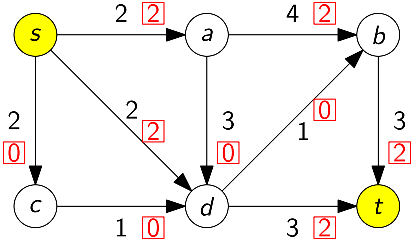
元のネットワーク



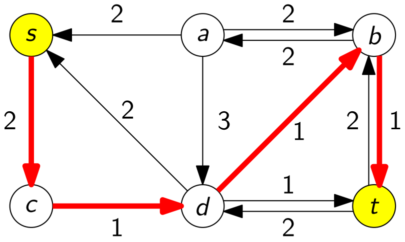
補助ネットワーク

増加道法の動き (3)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける



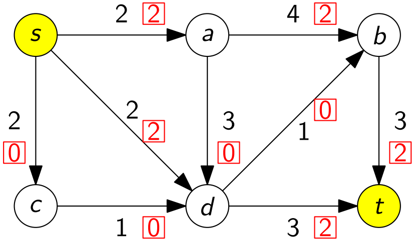
元のネットワーク



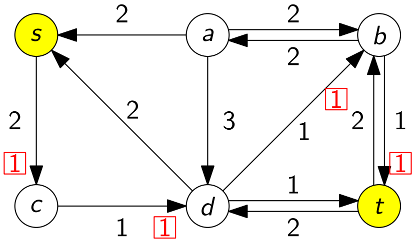
補助ネットワーク

増加道法の動き (3)：流れの増加

道に沿って，できる限り流れを増加させる



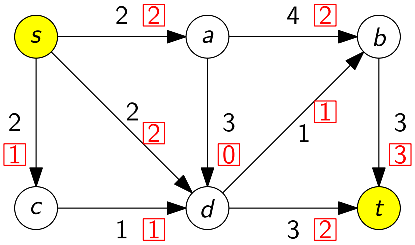
元のネットワーク



補助ネットワーク

増加道法の動き (4)

現在得られている流れ

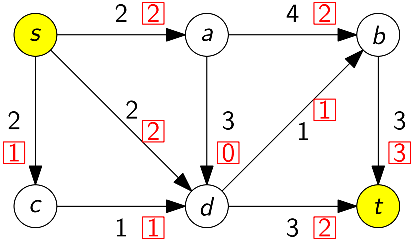


先ほどの手順を繰り返す

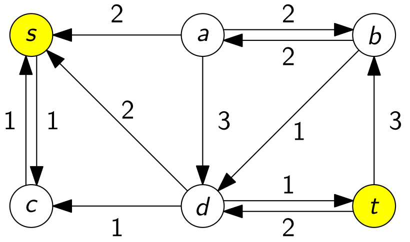
- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

増加道法の動き (4)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



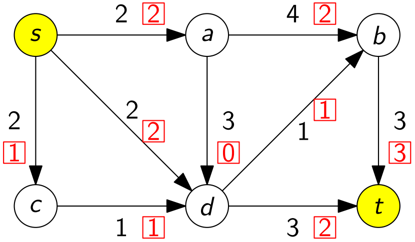
元のネットワーク



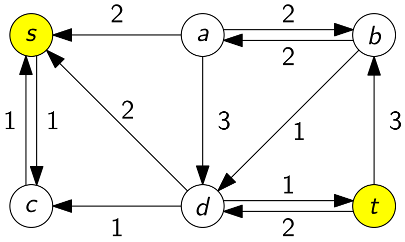
補助ネットワーク

増加道法の動き (4)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける



元のネットワーク

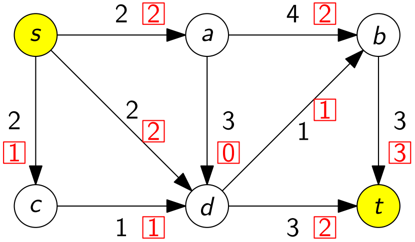


補助ネットワーク

しかし，見つからない！ (存在しない) $\rightsquigarrow$ アルゴリズムは次の段階へ

増加道法の動き (4)：到達可能頂点の探索

補助ネットワークにおいて，s から到達可能な頂点をすべて見つける



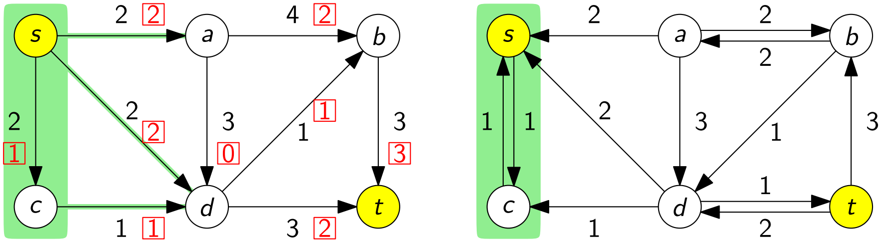
元のネットワーク　　補助ネットワーク

$$S = \left\{ v \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{補助ネットワークにおいて，} s \text{ を始点として，} \\ v \text{ を終点とする道が存在する} \end{array} \right\}$$

$\leadsto$ この S は s, t カットである (なぜか？)

増加道法の動き (4)：最小カットの発見

元の有向グラフにおいて，この s, t カット S の容量 $\mathrm{cap}(S)$ を見る



元のネットワーク　　　　補助ネットワーク

$\rightsquigarrow$ この容量 $\mathrm{cap}(S)$ は得られた流れの値に等しい

- つまり，最大流と最小 s, t カットが得られた！ (アルゴリズム停止)

増加道法：動きのまとめ

有向グラフ $G = (V, A)$，容量 $c\colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 s, t

アルゴリズム：増加道法

初期化：流れ $f := 0$

1. f に対する補助ネットワーク (G_f と c_f) を作る
2. G_f において s を始点，t を終点とする道を見つける
3. 存在するとき，その道に沿って流れを増加．1 に戻る
4. 存在しないとき，f を出力

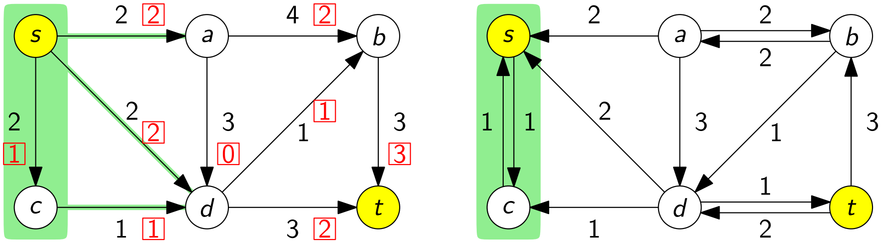
今から証明すること

- 増加道法が停止したとき，最大流を出力すること　(正当性)
- 増加道法が必ず停止すること　(停止性)

注：とりあえず，アルゴリズムの「効率性」は無視

増加道法の正当性：例

なぜ，これが最大流なのか？



元のネットワーク　　　　補助ネットワーク

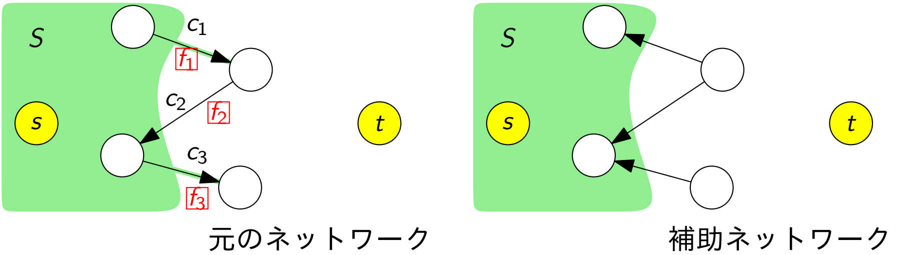
- 補助ネットワークにおいて，S から出ていく弧は存在しない
- S から出る総流量 $= 5$ なので，$\mathtt{val}(f) \geq 5$
- 一方で，$\mathtt{cap}(S) = 5$．つまり，$\mathtt{val}(f) \leq 5$
- $\therefore \mathtt{val}(f) = 5$ であり，$\mathtt{cap}(S) = 5$

増加道法の正当性：証明 (1)

増加道法の正当性

増加道法が停止したとき，その出力 f は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える



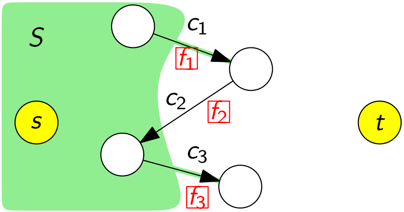
増加道法の正当性：証明 (1)

増加道法の正当性

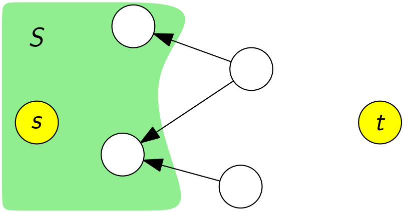
増加道法が停止したとき，その出力 f は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- 出力 f に対する補助ネットワークにおいて，
  s から到達可能な頂点全体の集合を S とする



元のネットワーク



補助ネットワーク

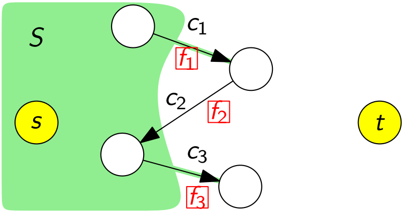
増加道法の正当性：証明 (1)

増加道法の正当性

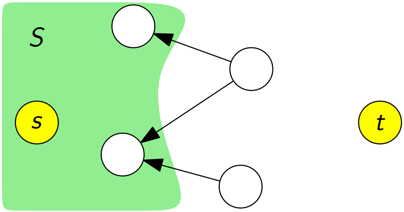
増加道法が停止したとき，その出力 f は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- 出力 f に対する補助ネットワークにおいて，s から到達可能な頂点全体の集合を S とする
- S は s, t カットである (なぜか？)



元のネットワーク



補助ネットワーク

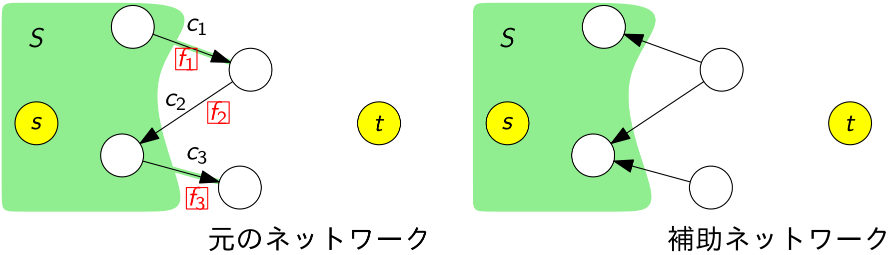
増加道法の正当性：証明 (1)

増加道法の正当性

増加道法が停止したとき，その出力 f は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える

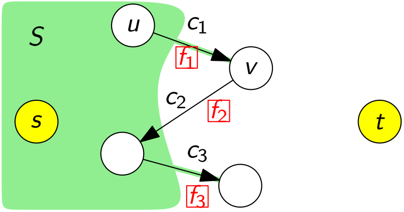
- 出力 f に対する補助ネットワークにおいて，s から到達可能な頂点全体の集合を S とする
- S は s, t カットである (なぜか？)
- つまり，補助ネットワークの弧 $(u, v) \in A_f$ で $u \in S$ かつ $v \notin S$ となるものは存在しない



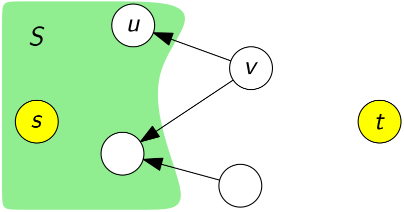
増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \in S, v \notin S$ であるものを考える

- $(u, v) \notin A_f$ であるので，特に $(u, v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$
- $(u, v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$ より，$f((u, v)) = c((u, v))$



元のネットワーク

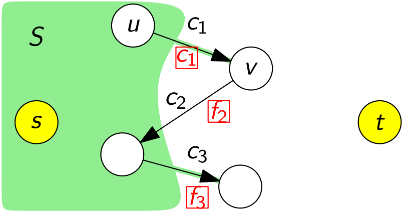


補助ネットワーク

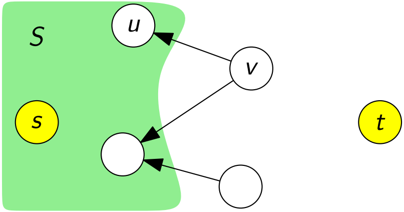
増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \in S, v \notin S$ であるものを考える

- $(u, v) \notin A_f$ であるので，特に $(u, v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$
- $(u, v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$ より，$f((u, v)) = c((u, v))$



元のネットワーク

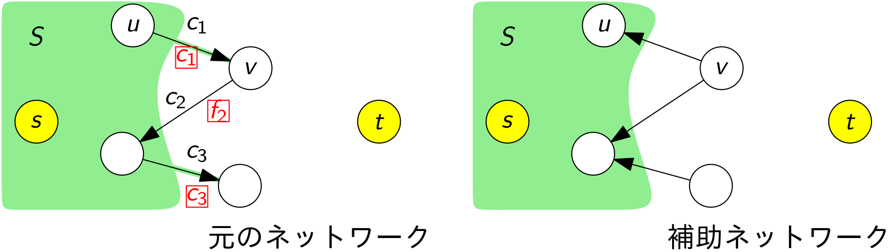


補助ネットワーク

増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \in S, v \notin S$ であるものを考える

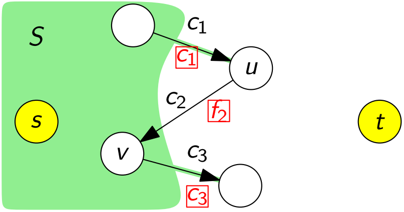
- $(u, v) \notin A_f$ であるので，特に $(u, v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$
- $(u, v) \notin A_f^{\mathrm{F}}$ より，$f((u, v)) = c((u, v))$



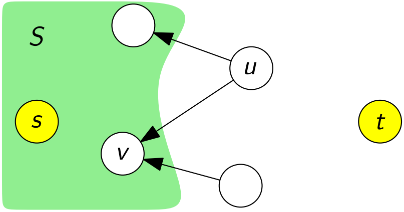
増加道法の正当性：証明 (3)

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \notin S, v \in S$ であるものを考える

- $(v, u) \notin A_f$ であるので，特に $(v, u) \notin A_f^{\mathrm{B}}$
- $(v, u) \notin A_f^{\mathrm{B}}$ より，$f((u, v)) = 0$



元のネットワーク

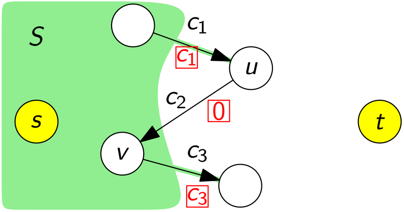


補助ネットワーク

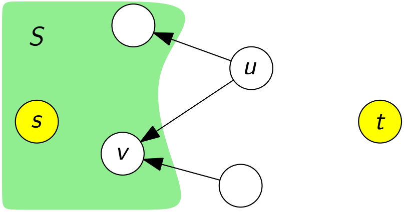
増加道法の正当性：証明 (3)

元のネットワークの弧 $(u,v) \in A$ で $u \notin S, v \in S$ であるものを考える

- $(v,u) \notin A_f$ であるので，特に $(v,u) \notin A_f^{\mathrm{B}}$
- $(v,u) \notin A_f^{\mathrm{B}}$ より，$f((u,v)) = 0$



元のネットワーク



補助ネットワーク

増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\mathtt{val}(f) \overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v))$$

補足

この S は最小 s,t カットである

増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&= \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} 0
\end{aligned}
$$

補足

この S は最小 s,t カットである

増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&= \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} 0 \\
&= \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v))
\end{aligned}
$$

補足

この S は最小 s, t カットである

増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&= \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} 0 \\
&= \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v)) \\
&= \mathtt{cap}(S)
\end{aligned}
$$

補足

この S は最小 s,t カットである

増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
\mathtt{val}(f) &\overset{(\text{補題 A})}{=} \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} f((u,v)) \\
&= \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v)\in A: u\notin S, v\in S} 0 \\
&= \sum_{(u,v)\in A: u\in S, v\notin S} c((u,v)) \\
&= \mathrm{cap}(S)
\end{aligned}
$$

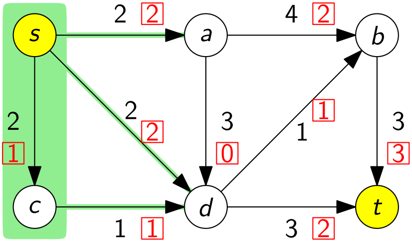
つまり，$\mathtt{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ となり，弱双対性より，f は最大流である □

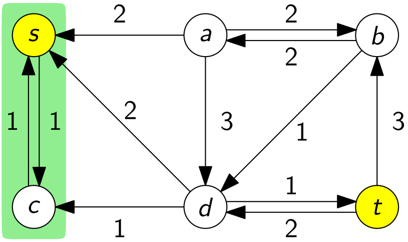
補足

この S は最小 s,t カットである

増加道法の停止性：略証

なぜ増加道法は停止するのか？

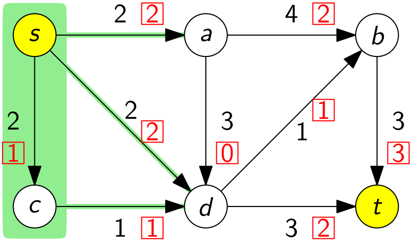


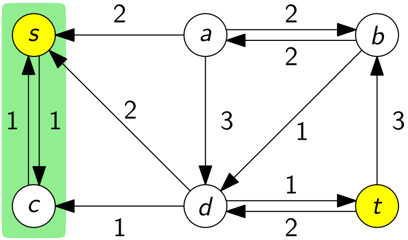


- 容量は整数なので，最小 s, t カットの容量も整数
- 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数

増加道法の停止性：略証

なぜ増加道法は停止するのか？

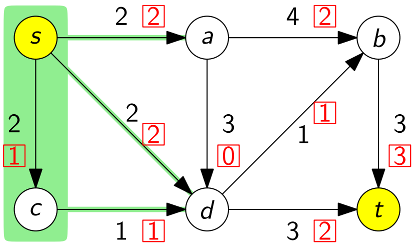




- 容量は整数なので，最小 s, t カットの容量も整数
- 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数
- ∴ 反復が行われる度に，流れの値は 1 以上増える

増加道法の停止性：略証

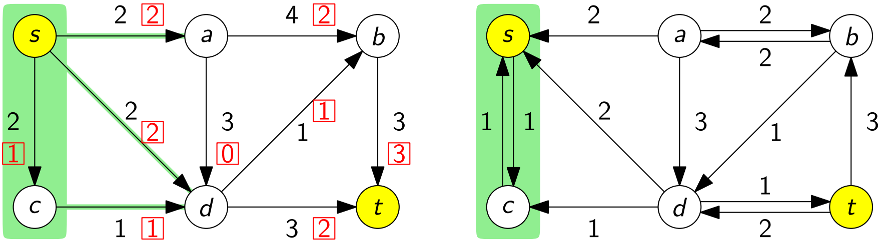
なぜ増加道法は停止するのか？



- 容量は整数なので，最小 s, t カットの容量も整数
- 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数
- ∴ 反復が行われる度に，流れの値は 1 以上増える
- ∴ 反復回数は高々最小 s, t カットの容量で，これは有限 □

整数流定理

- つまり，容量が整数であるならば，出力される最大流も整数



整数流定理 (重要)

容量が整数 $\Rightarrow$ どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

最大流の値が整数であり，なおかつ，どの弧に流れる量も整数

増加道法に対する注意

注意 1

弧の容量に無理数が出てくるとき，

- 増加道法が有限ステップで終了しないこともある
- 増加道法の収束先が最大流ではないこともある
- その 2 つが同時に起こることもある

注意 2

増加道法における，増加道の選び方は工夫できる

- 工夫しない (Ford-Fulkerson のアルゴリズム)
- 幅優先探索を用いる (Edmonds-Karp のアルゴリズム)

Edmonds-Karp のアルゴリズムは多項式時間アルゴリズムである
(Ford-Fulkerson のアルゴリズムはそうではない)

目次

今日のまとめ

今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- 「流れ」が何であるのか記述でき，基本性質を証明できる
- 流れとカットの双対性により流れの最大性を証明できる
- 増加道法にしたがって，最大流を計算できる

重要な定理

- 最大流最小カット定理
- 整数流定理

次回予告

最大流を用いた数理モデル化

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次