

グラフとネットワーク 第 4 回  
マッチング：数理

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 5 月 2 日

最終更新：2016 年 4 月 28 日 20:31

## スケジュール 前半 (予定)

- |   |              |        |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/11) |
| 2 | 道と閉路：数理      | (4/18) |
| 3 | 木：数理         | (4/25) |
| 4 | マッチング：数理     | (5/2)  |
| 5 | マッチング：モデル化   | (5/9)  |
| 6 | 最大流：数理       | (5/16) |
| 7 | 最大流：モデル化 (1) | (5/23) |
| * | 休講           | (5/30) |
| ● | 中間試験         | (6/6)  |

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |                    |        |
|----|--------------------|--------|
| 8  | 最大流：モデル化 (2)       | (6/13) |
| 9  | 連結性：数理とモデル化        | (6/20) |
| 10 | 彩色：数理              | (6/27) |
| 11 | 彩色：モデル化            | (7/4)  |
| 12 | 平面グラフ：数理           | (7/11) |
|    | * 海の日で休み           | (7/18) |
| 13 | 平面グラフ：モデル化         | (7/25) |
| 14 | 予備日 (講義を行うかどうかは未定) | (8/1)  |
|    | ● 期末試験             | (8/8?) |

注意：予定の変更もありうる

## 主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- ▶ アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

## 達成目標

以下の4項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、数理モデルを構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理、特に、最小最大定理の重要性を説明でき、それを用いて最適性の証明ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

## 目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② 最大マッチングと増加道
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆
- ④ 今日のまとめ

## 概要

## 今日の目標

「マッチング」を理解する

- ▶ マッチングの定義を理解する
- ▶ 最大マッチングと極大マッチングの違いを理解する
- ▶ 最大マッチングと増加道の関係を理解する
- ▶ 最大マッチングと最小頂点被覆の関係を理解する

重要な概念

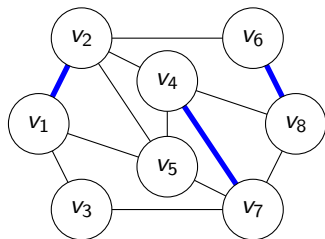
- ▶ 最適性の保証 (弱双対性)  $\rightsquigarrow$  **最適化の基礎**

## グラフにおけるマッチング

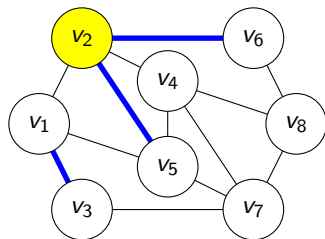
無向グラフ  $G = (V, E)$ 

マッチングとは？

$G$  の **マッチング** とは辺部分集合  $M \subseteq E$  で、  
 $M$  のどの2辺も同じ頂点に接続しないもの



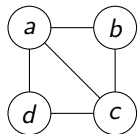
$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$  は  
 マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$  は  
 マッチングではない

マッチングの辺  $e \in M$  は  $e$  の端点を **飽和** する

## グラフにおけるすべてのマッチング

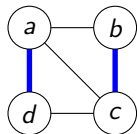


このグラフのマッチングは以下のもの

- ▶  $\emptyset$
- ▶  $\{\{a, b\}\}$
- ▶  $\{\{a, c\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}\}$
- ▶  $\{\{b, c\}\}$
- ▶  $\{\{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$



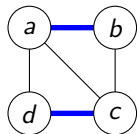
## グラフにおけるすべてのマッチング



このグラフのマッチングは以下のもの

- ▶  $\emptyset$
- ▶  $\{\{a, b\}\}$
- ▶  $\{\{a, c\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}\}$
- ▶  $\{\{b, c\}\}$
- ▶  $\{\{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

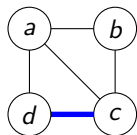
## グラフにおけるすべてのマッチング



このグラフのマッチングは以下のもの

- ▶  $\emptyset$
- ▶  $\{\{a, b\}\}$
- ▶  $\{\{a, c\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}\}$
- ▶  $\{\{b, c\}\}$
- ▶  $\{\{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

## グラフにおけるすべてのマッチング

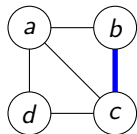


このグラフのマッチングは以下のもの

- ▶  $\emptyset$
- ▶  $\{\{a, b\}\}$
- ▶  $\{\{a, c\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}\}$
- ▶  $\{\{b, c\}\}$
- ▶  $\{\{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

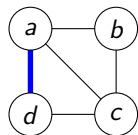
## グラフにおけるすべてのマッチング

このグラフのマッチングは以下のもの



- ▶  $\emptyset$
- ▶  $\{\{a, b\}\}$
- ▶  $\{\{a, c\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}\}$
- ▶  $\{\{b, c\}\}$
- ▶  $\{\{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

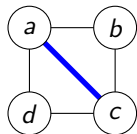
## グラフにおけるすべてのマッチング



このグラフのマッチングは以下のもの

- ▶  $\emptyset$
- ▶  $\{\{a, b\}\}$
- ▶  $\{\{a, c\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}\}$
- ▶  $\{\{b, c\}\}$
- ▶  $\{\{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

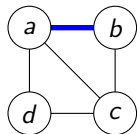
## グラフにおけるすべてのマッチング



このグラフのマッチングは以下のもの

- ▶  $\emptyset$
- ▶  $\{\{a, b\}\}$
- ▶  $\{\{a, c\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}\}$
- ▶  $\{\{b, c\}\}$
- ▶  $\{\{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

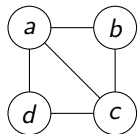
## グラフにおけるすべてのマッチング



このグラフのマッチングは以下のもの

- ▶  $\emptyset$
- ▶  $\{\{a, b\}\}$
- ▶  $\{\{a, c\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}\}$
- ▶  $\{\{b, c\}\}$
- ▶  $\{\{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

## グラフにおけるすべてのマッチング



このグラフのマッチングは以下のもの

- ▶  $\emptyset$
- ▶  $\{\{a, b\}\}$
- ▶  $\{\{a, c\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}\}$
- ▶  $\{\{b, c\}\}$
- ▶  $\{\{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶  $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

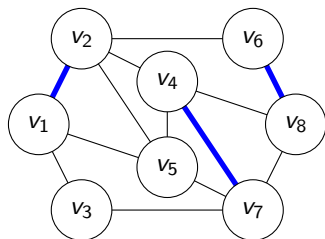


## 最大マッチング

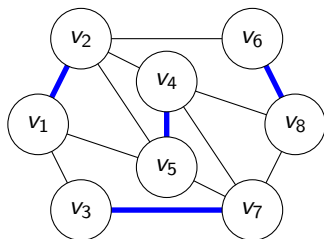
無向グラフ  $G = (V, E)$ 

最大マッチングとは？

$G$  の最大マッチングとは  $G$  のマッチング  $M \subseteq E$  で、  
 $G$  の任意のマッチング  $M'$  に対して  $|M| \geq |M'|$  を満たすもの



最大マッチングではない



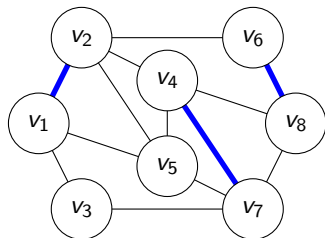
最大マッチングである

## 極大マッチング

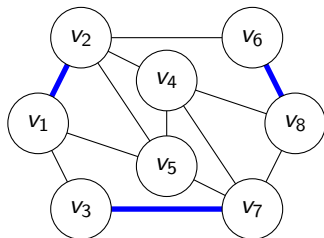
無向グラフ  $G = (V, E)$ 

極大マッチングとは？

$G$  の極大マッチングとは  $G$  のマッチング  $M \subseteq E$  で、  
 任意の辺  $e \in E - M$  に対して  $M \cup \{e\}$  が  $G$  のマッチングではないもの



極大マッチングである



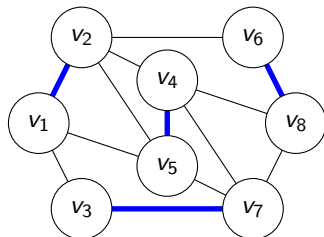
極大マッチングではない

## 完全マッチング

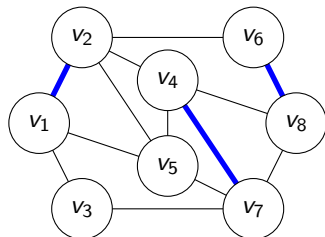
無向グラフ  $G = (V, E)$ 

完全マッチングとは？

$G$  の完全マッチングとは  $G$  のマッチング  $M \subseteq E$  で、 $G$  の任意の頂点に  $M$  のある辺が接続しているもの



完全マッチングである



完全マッチングではない

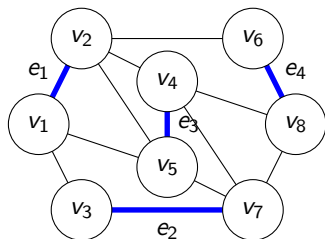
## 完全マッチングの辺数

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

完全マッチングの辺数は？

 $M \subseteq E$  が  $G$  の完全マッチング  $\Rightarrow |V| = 2|M|$ 

証明の着想：数え上げ論法



$M \setminus V$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$e_1$	1	1						
$e_2$			1				1	
$e_3$				1	1			
$e_4$						1		1

この行列における成分の総和を2通りの計算で考えてみる

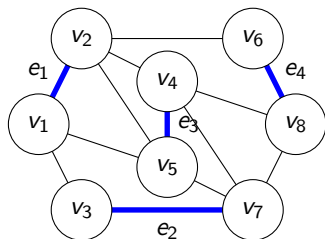
## 完全マッチングの辺数

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

完全マッチングの辺数は？

 $M \subseteq E$  が  $G$  の完全マッチング  $\Rightarrow |V| = 2|M|$ 

証明の着想：数え上げ論法



$M \setminus V$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	
$e_1$	1	1							= 2
$e_2$							1		= 2
$e_3$				1	1				= 2
$e_4$						1		1	= 2

この行列における成分の総和を 2 通りの計算で考えてみる

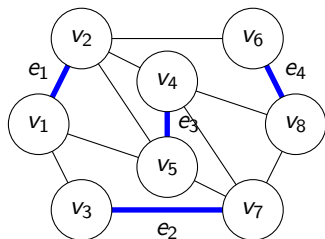
## 完全マッチングの辺数

無向グラフ  $G = (V, E)$

完全マッチングの辺数は？

$M \subseteq E$  が  $G$  の完全マッチング  $\Rightarrow |V| = 2|M|$

証明の着想：数え上げ論法



M	V								
	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	
e1	1	1							= 2
e2			1				1		= 2
e3				1	1				= 2
e4						1		1	= 2

|| || || || || || || ||  
 └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘ └─┘

この行列における成分の総和を 2 通りの計算で考えてみる

## 完全マッチングの辺数：証明

証明：行列  $X \in \mathbb{R}^{V \times M}$  を次のように定義する

$$v \in V, e \in M \text{ に対して, } X_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}) \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \end{cases}$$

## 完全マッチングの辺数：証明

証明：行列  $X \in \mathbb{R}^{V \times M}$  を次のように定義する

$$v \in V, e \in M \text{ に対して, } X_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}) \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \end{cases}$$

- ▶  $M$  は完全マッチングなので、各  $v \in V$  に接続する  $M$  の辺の数は 1

$$\therefore \sum_{v \in V} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in M} X_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} 1 = |V|$$



## 完全マッチングの辺数：証明

証明：行列  $X \in \mathbb{R}^{V \times M}$  を次のように定義する

$$v \in V, e \in M \text{ に対して, } X_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}) \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \end{cases}$$

- ▶  $M$  は完全マッチングなので、各  $v \in V$  に接続する  $M$  の辺の数は 1

$$\therefore \sum_{v \in V} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in M} X_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} 1 = |V|$$

- ▶ 各  $e \in M$  に接続する  $V$  の頂点数は 2

$$\therefore \sum_{v \in V} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{e \in M} \left( \sum_{v \in V} X_{v,e} \right) = \sum_{e \in M} 2 = 2|M|$$

## 完全マッチングの辺数：証明

証明：行列  $X \in \mathbb{R}^{V \times M}$  を次のように定義する

$$v \in V, e \in M \text{ に対して, } X_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}) \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \end{cases}$$

- ▶  $M$  は完全マッチングなので、各  $v \in V$  に接続する  $M$  の辺の数は 1

$$\therefore \sum_{v \in V} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in M} X_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} 1 = |V|$$

- ▶ 各  $e \in M$  に接続する  $V$  の頂点数は 2

$$\therefore \sum_{v \in V} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{e \in M} \left( \sum_{v \in V} X_{v,e} \right) = \sum_{e \in M} 2 = 2|M|$$

- ▶ ゆえに、 $|V| = \sum_{v \in V} \sum_{e \in M} X_{v,e} = 2|M|$

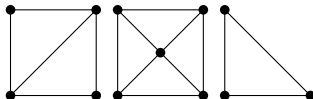
□

## 完全マッチングと最大マッチングの関係

- ▶ 完全マッチングを持たないグラフもある
  - ▶ 例えば，頂点数が奇数のグラフ



- ▶ 例えば，頂点数が奇数の連結成分を持つグラフ



- ▶ 頂点数が偶数である連結グラフでもそのようなものがある (演習問題)
- ▶ 完全マッチングを持つグラフにおいて，  
完全マッチングは最大マッチングである (演習問題)

## 最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ  $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$  が  $G$  の最大マッチング  $\Rightarrow M$  は  $G$  の極大マッチング

証明 (背理法による) :  $M$  を  $G$  の最大マッチングとする

▶  $M$  が  $G$  の極大マッチングではないと仮定する

▶

▶

▶ これは 矛盾 □

標語的なまとめ

$M$  が完全マッチング  $\Rightarrow M$  が最大マッチング  $\Rightarrow M$  が極大マッチング

## 最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ  $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$  が  $G$  の最大マッチング  $\Rightarrow M$  は  $G$  の極大マッチング

証明 (背理法による) :  $M$  を  $G$  の最大マッチングとする

- ▶  $M$  が  $G$  の極大マッチングではないと仮定する
- ▶ 極大マッチングの定義より,  
ある  $e \in E - M$  が存在して,  $M \cup \{e\}$  は  $G$  のマッチング
- ▶
- ▶ これは 矛盾 □

標語的なまとめ

$M$  が完全マッチング  $\Rightarrow M$  が最大マッチング  $\Rightarrow M$  が極大マッチング

## 最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ  $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$  が  $G$  の最大マッチング  $\Rightarrow M$  は  $G$  の極大マッチング

証明 (背理法による) :  $M$  を  $G$  の最大マッチングとする

- ▶  $M$  が  $G$  の極大マッチングではないと仮定する
- ▶ 極大マッチングの定義より,  
ある  $e \in E - M$  が存在して,  $M \cup \{e\}$  は  $G$  のマッチング
- ▶  $|M \cup \{e\}| = |M| + 1 > |M|$
- ▶ これは 矛盾 □

標語的なまとめ

$M$  が完全マッチング  $\Rightarrow M$  が最大マッチング  $\Rightarrow M$  が極大マッチング

## 最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ  $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$  が  $G$  の最大マッチング  $\Rightarrow M$  は  $G$  の極大マッチング

証明 (背理法による) :  $M$  を  $G$  の最大マッチングとする

- ▶  $M$  が  $G$  の極大マッチングではないと仮定する
- ▶ 極大マッチングの定義より,  
ある  $e \in E - M$  が存在して,  $M \cup \{e\}$  は  $G$  のマッチング
- ▶  $|M \cup \{e\}| = |M| + 1 > |M|$
- ▶ これは  $M$  が最大マッチングであることに矛盾 □

標語的なまとめ

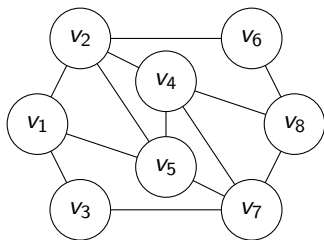
$M$  が完全マッチング  $\Rightarrow M$  が最大マッチング  $\Rightarrow M$  が極大マッチング

# 目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② **最大マッチングと増加道**
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆
- ④ 今日のまとめ

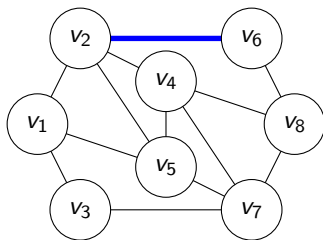


## 最大マッチングをどのように見つければよい？



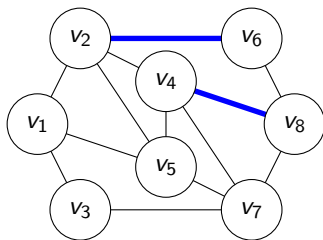
辺を1つずつ追加していくような方法では、  
極大マッチングを見つけることはできるが、  
最大マッチングを見つけられるとは限らない

## 最大マッチングをどのように見つければよい？



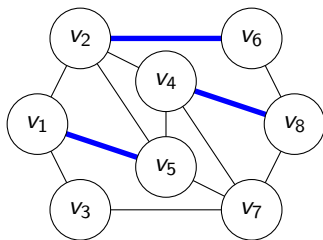
辺を1つずつ追加していくような方法では、  
極大マッチングを見つけることはできるが、  
最大マッチングを見つけられるとは限らない

## 最大マッチングをどのように見つければよい？



辺を1つずつ追加していくような方法では、  
極大マッチングを見つけることはできるが、  
最大マッチングを見つけられるとは限らない

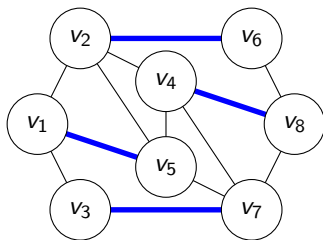
## 最大マッチングをどのように見つければよい？



辺を1つずつ追加していくような方法では、  
極大マッチングを見つけることはできるが、  
最大マッチングを見つけられるとは限らない

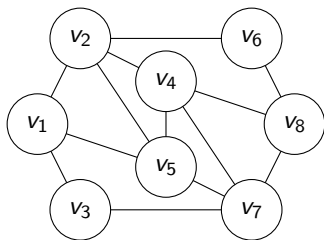
## 最大マッチングをどのように見つければよい？

最大マッチングが見つかった



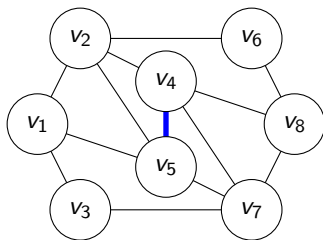
辺を1つずつ追加していくような方法では、  
極大マッチングを見つけることはできるが、  
最大マッチングを見つけられるとは限らない

## 最大マッチングをどのように見つければよい？



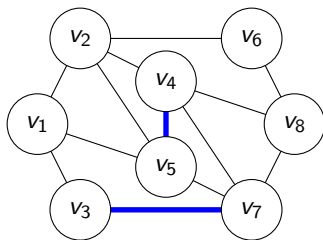
辺を1つずつ追加していくような方法では、  
極大マッチングを見つけることはできるが、  
最大マッチングを見つけられるとは限らない

## 最大マッチングをどのように見つければよい？



辺を1つずつ追加していくような方法では、  
極大マッチングを見つけることはできるが、  
最大マッチングを見つけられるとは限らない

## 最大マッチングをどのように見つければよい？

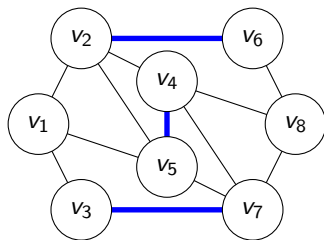


辺を1つずつ追加していくような方法では、  
極大マッチングを見つけることはできるが、  
最大マッチングを見つけられるとは限らない



## 最大マッチングをどのように見つければよい？

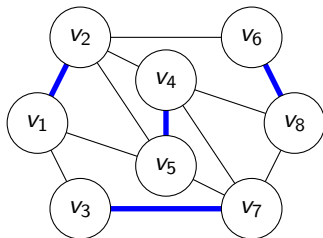
最大マッチングが見つからなかった



辺を1つずつ追加していくような方法では、  
極大マッチングを見つけることはできるが、  
最大マッチングを見つけられるとは限らない

## 最大性の確認法？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには  
どうしたらよいか？



## 格言

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには  
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

## 最大性の確認法

### 格言 (再掲)

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには  
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

### なぜ？

- ▶ 確認は発見より難しくない
- ▶ 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

### 最大性の確認法

2つ紹介する

- 1 **増加道**を用いる方法
- 2 **頂点被覆**を用いる方法

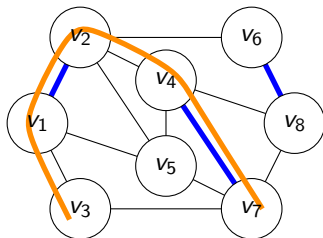
2つとも重要

## 交互道

無向グラフ  $G = (V, E)$ , マッチング  $M \subseteq E$

## 交互道とは？

$M$  に関する**交互道**とは,  $G$  における道  $v_1, \dots, v_k$  で ( $k \geq 1$ ),  $M$  の辺と  $E - M$  の辺が交互に現れるもの



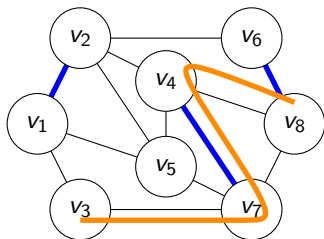
$v_3, v_1, v_2, v_4, v_7$  は青のマッチングに関する交互道である

## 増加道

無向グラフ  $G = (V, E)$ , マッチング  $M \subseteq E$

## 増加道とは？

$M$  に関する**増加道**とは,  $M$  に関する交互道  $v_1, \dots, v_k$  で ( $k \geq 1$ ),  $v_1$  と  $v_k$  が  $M$  の辺と接続しないもの



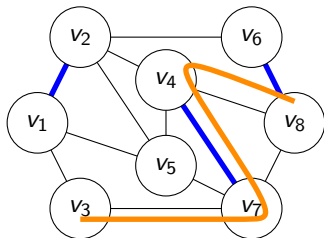
$v_3, v_7, v_4, v_8$  は青のマッチングに関する増加道

## 増加道

無向グラフ  $G = (V, E)$ , マッチング  $M \subseteq E$

## 増加道とは？

$M$  に関する**増加道**とは,  $M$  に関する交互道  $v_1, \dots, v_k$  で ( $k \geq 1$ ),  $v_1$  と  $v_k$  が  $M$  の辺と接続しないもの



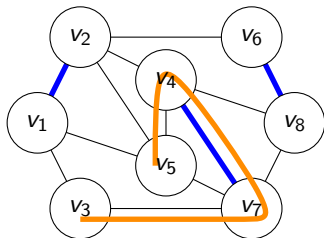
$v_3, v_7, v_4, v_8$  は青のマッチングに関する増加道ではない

## 増加道

無向グラフ  $G = (V, E)$ , マッチング  $M \subseteq E$

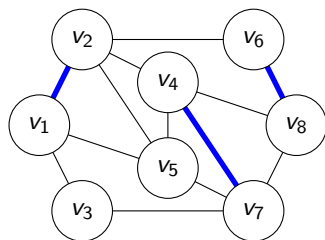
## 増加道とは？

$M$  に関する**増加道**とは,  $M$  に関する交互道  $v_1, \dots, v_k$  で ( $k \geq 1$ ),  $v_1$  と  $v_k$  が  $M$  の辺と接続しないもの



$v_3, v_7, v_4, v_5$  は青のマッチングに関する増加道である

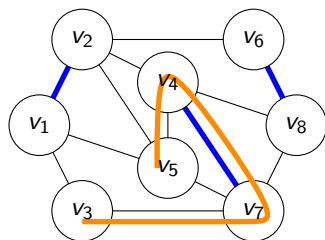
## 増加道に沿ってマッチングを大きくする



辺数3の  
マッチング



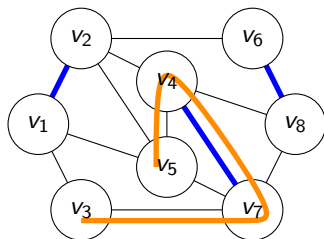
## 増加道に沿ってマッチングを大きくする



辺数 3 の  
マッチング

増加道

## 増加道に沿ってマッチングを大きくする



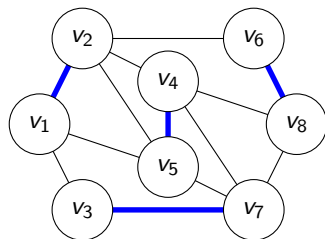
辺数 3 の  
マッチング



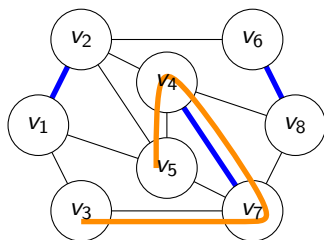
増加道に沿って  
大きくする



辺数 4 の  
マッチング



## 増加道に沿ってマッチングを大きくする



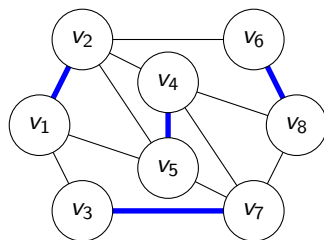
辺数 3 の  
マッチング



増加道に沿って  
大きくする



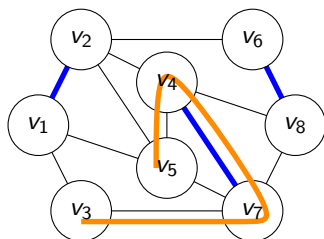
辺数 4 の  
マッチング



つまり

$M$  に関する増加道が存在する  $\Rightarrow M$  は最大マッチングではない

## 増加道に沿ってマッチングを大きくする



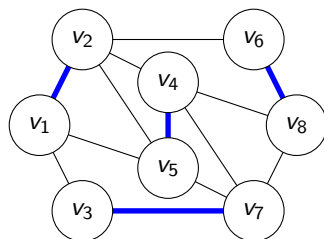
辺数 3 の  
マッチング

~>

増加道に沿って  
大きくする

~>

辺数 4 の  
マッチング



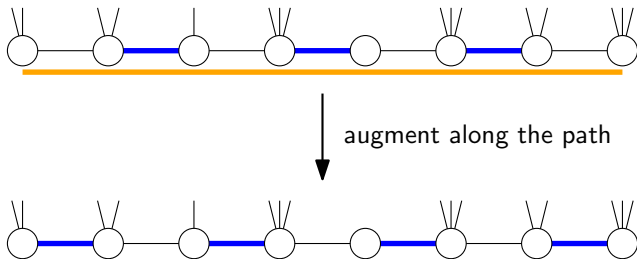
つまり

$M$  に関する増加道が存在する  $\Rightarrow M$  は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

$M$  は最大マッチングである  $\Rightarrow M$  に関する増加道が存在しない

## 増加道に沿ってマッチングを大きくする：一般的な説明



増加させた後もマッチングになっている

## 最大マッチングと増加道

無向グラフ  $G = (V, E)$ , マッチング  $M \subseteq E$

## 最大マッチングと増加道の関係

(Berge '57)

$M$  が  $G$  の最大マッチング  $\Leftrightarrow M$  に関する増加道が存在しない

「 $\Rightarrow$ 」の証明 : 演習問題 (前ページのスライドがヒント)

「 $\Leftarrow$ 」の証明 : 対偶を証明する

▶  $M$  が  $G$  の最大マッチングではないと仮定

▶  $\therefore M$  に関する増加道が存在する



## 最大マッチングと増加道

無向グラフ  $G = (V, E)$ , マッチング  $M \subseteq E$

## 最大マッチングと増加道の関係

(Berge '57)

$M$  が  $G$  の最大マッチング  $\Leftrightarrow M$  に関する増加道が存在しない

「 $\Rightarrow$ 」の証明：演習問題 (前ページのスライドがヒント)

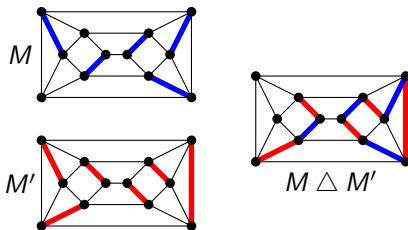
「 $\Leftarrow$ 」の証明：対偶を証明する

- ▶  $M$  が  $G$  の最大マッチングではないと仮定
- ▶  $M'$  を  $G$  の最大マッチングとする
- ▶ つまり,  $|M'| > |M|$
- ▶ ..... ← ここを今から埋めていく
- ▶  $\therefore M$  に関する増加道が存在する



## 最大マッチングと増加道：証明 (続き 1)

$M$  と  $M'$  の対称差  $M \triangle M'$  を考える



集合の対称差とは？

$$X \triangle Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

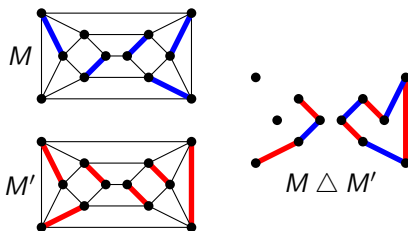
格言

対称差で2つの集合の違いが見える



## 最大マッチングと増加道：証明 (続き 2)

$M$  と  $M'$  の対称差  $M \triangle M'$  を考える



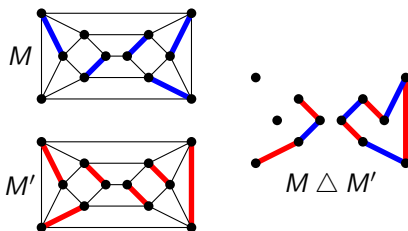
グラフ  $(V, M \triangle M')$  の各頂点の次数は 0 か 1 か 2

このグラフ  $(V, M \triangle M')$  の連結成分は何か？

- ▶ 次数 0 の頂点を持つ連結成分  $\rightsquigarrow$  孤立点
- ▶ 次数 1 の頂点を持つ連結成分  $\rightsquigarrow$  道
- ▶ 次数 2 の頂点だけから成る連結成分  $\rightsquigarrow$  閉路
  - ▶  $M$  と  $M'$  の辺が交互に現れるので、その長さは偶数

## 最大マッチングと増加道：証明 (続き 3)

$M$  と  $M'$  の対称差  $M \triangle M'$  を考える



グラフ  $(V, M \triangle M')$  の連結成分は孤立点か、道か、長さ偶数の閉路である

このグラフ  $(V, M \triangle M')$  中の状況を考える

- ▶ 長さ偶数の閉路において、 $M$  の辺の数 =  $M'$  の辺の数
- ▶  $|M'| > |M|$  なので、  
ある道において、 $M$  の辺の数 <  $M'$  の辺の数

この道は  $M$  に関する増加道!!!

## 最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「 $\Leftarrow$ 」の証明：対偶を証明する

- ▶  $M$  が  $G$  の最大マッチングではないと仮定
- ▶  $M'$  を  $G$  の最大マッチングとする
- ▶ つまり,  $|M'| > |M|$

- ▶  $\therefore P$  は  $G$  において  $M$  に関する増加道である



## 最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「 $\Leftarrow$ 」の証明：対偶を証明する

- ▶  $M$  が  $G$  の最大マッチングではないと仮定
- ▶  $M'$  を  $G$  の最大マッチングとする
- ▶ つまり,  $|M'| > |M|$
- ▶ グラフ  $(V, M \Delta M')$  を考える

- ▶  $\therefore P$  は  $G$  において  $M$  に関する増加道である



## 最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「 $\Leftarrow$ 」の証明：対偶を証明する

- ▶  $M$  が  $G$  の最大マッチングではないと仮定
  - ▶  $M'$  を  $G$  の最大マッチングとする
  - ▶ つまり,  $|M'| > |M|$
  - ▶ グラフ  $(V, M \Delta M')$  を考える
    - ▶ 各頂点の次数は 2 以下であり,  $M$  の辺と  $M'$  の辺が交互に現れる
    - ▶  $\therefore$  各連結成分は孤立点か, 道か, 長さ偶数の閉路である
- 
- ▶  $\therefore P$  は  $G$  において  $M$  に関する増加道である □

## 最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「 $\Leftarrow$ 」の証明：対偶を証明する

- ▶  $M$  が  $G$  の最大マッチングではないと仮定
- ▶  $M'$  を  $G$  の最大マッチングとする
- ▶ つまり,  $|M'| > |M|$
- ▶ グラフ  $(V, M \Delta M')$  を考える
  - ▶ 各頂点の次数は 2 以下であり,  $M$  の辺と  $M'$  の辺が交互に現れる
  - ▶  $\therefore$  各連結成分は孤立点か, 道か, 長さ偶数の閉路である
  - ▶ 長さ偶数の閉路において,  $M$  の辺の数 =  $M'$  の辺の数
  - ▶  $|M'| > |M|$  なので, ある道  $P$  において  $M$  の辺の数  $<$   $M'$  の辺の数
  - ▶  $P$  の端点は  $M$  の辺に接続していない
- ▶  $\therefore P$  は  $G$  において  $M$  に関する増加道である □

## 増加道の重要性：アルゴリズム

増加道で「山登り」ができる

## 増加道に基づく最大マッチング発見アルゴリズム (雛形)

- ▶ 入力：無向グラフ  $G = (V, E)$
  - ▶ 出力： $G$  の最大マッチング  $M$
- 1  $M := \emptyset$  とする
  - 2 while  $M$  に関する増加道  $P$  が存在する do
    - ①  $P$  に沿って  $M$  を大きくする
  - 3  $M$  を出力

先ほどの定理 (Berge) によって、  
このアルゴリズムは必ず停止し、最大マッチングを出力することが分かる

## 格言

アルゴリズムは数学的構造が導く

## Claude Berge (クロード・ベルジュ, 1926–2002)



<http://moc.g-scop.grenoble-inp.fr/?p=5>



## 目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② 最大マッチングと増加道
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆**
- ④ 今日のまとめ

## 最大性の確認法 (再掲)

### 格言 (再掲)

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには  
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

### なぜ？

- ▶ 確認は発見より難しくない
- ▶ 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

### 最大性の確認法

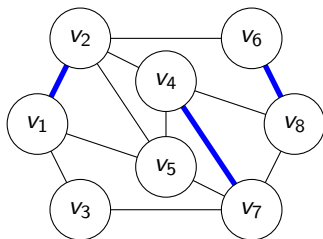
2つ紹介する

- 1 増加道を用いる方法
- 2 頂点被覆を用いる方法

2つとも重要

## 非最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングでないことを確認するには  
どうしたらよいか？



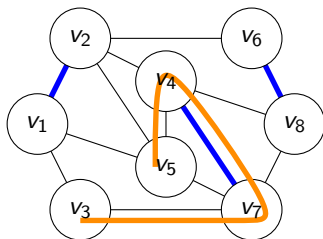
増加道を見つければよい

別の言い方

1つの増加道がマッチングの非最大性に対する証拠になっている

## 非最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングでないことを確認するには  
 どうしたらよいか？



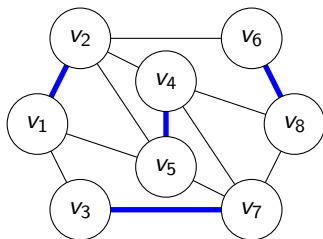
増加道を見つければよい

別の言い方

1つの増加道がマッチングの非最大性に対する証拠になっている

## 最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するにはどうしたらよいか？



増加道がないことを言えばよいが，どのようにして言えばよいのか？

## 別の言い方

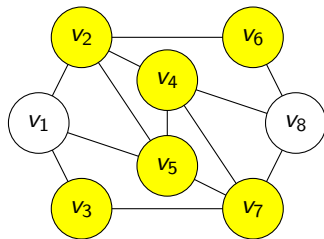
マッチングの最大性に対する**証拠**はあるのか？

## 頂点被覆

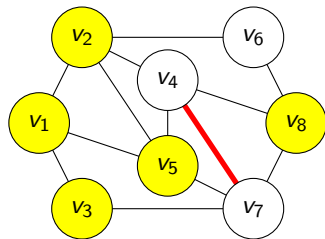
無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 頂点被覆とは？

$G$  の頂点被覆とは頂点部分集合  $C \subseteq V$  で、  
 $G$  のどの辺もある  $C$  の頂点に接続しているもの



$\{V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7\}$  は  
頂点被覆である



$\{V_1, V_2, V_3, V_5, V_8\}$  は  
頂点被覆ではない

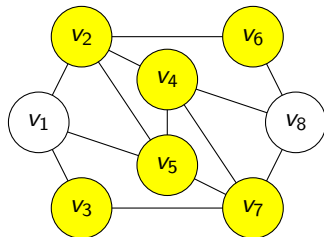
頂点被覆の頂点は、それに接続する辺を覆う (被覆する)

## 最小頂点被覆

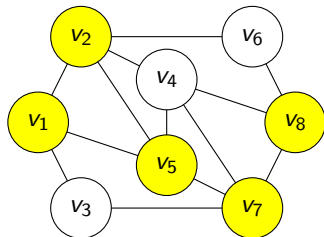
無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 最小頂点被覆とは？

$G$  の**最小頂点被覆**とは頂点被覆  $C \subseteq V$  で、  
 $G$  の任意の頂点被覆  $C'$  に対して  $|C| \leq |C'|$  を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  は  
最小頂点被覆ではない



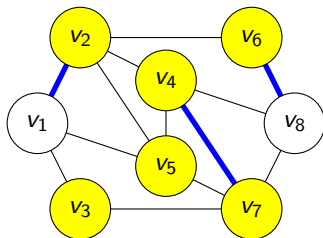
$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$  は  
最小頂点被覆である

## マッチングと頂点被覆の関係

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

$M$  が  $G$  のマッチング  
 $C$  が  $G$  の頂点被覆  $\Rightarrow |M| \leq |C|$

例 :  $|M| = 3, |C| = 6$ 



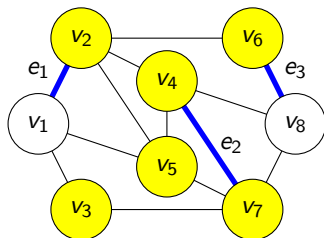
## マッチングと頂点被覆の関係：証明の着想

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

$M$  が  $G$  のマッチング  
 $C$  が  $G$  の頂点被覆  $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



$M \backslash C$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
$e_1$	1					
$e_2$			1			1
$e_3$					1	

この行列における成分の総和を2通りの計算で考えてみる

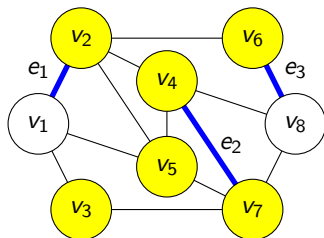
## マッチングと頂点被覆の関係：証明の着想

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

$M$  が  $G$  のマッチング  
 $C$  が  $G$  の頂点被覆  $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



$M$	$C$							
	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$		
$e_1$	1						$\geq 1$	
$e_2$			1			1	$\geq 1$	
$e_3$					1		$\geq 1$	

この行列における成分の総和を 2 通りの計算で考えてみる

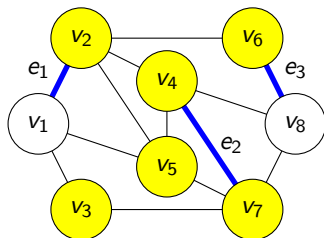
## マッチングと頂点被覆の関係：証明の着想

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

$M$  が  $G$  のマッチング  
 $C$  が  $G$  の頂点被覆  $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



$M \setminus C$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	
$e_1$	1						$\geq 1$
$e_2$			1		1		$\geq 1$
$e_3$					1		$\geq 1$
	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	
	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	

この行列における成分の総和を2通りの計算で考えてみる

## マッチングと頂点被覆の関係：証明

証明：行列  $X \in \mathbb{R}^{C \times M}$  を次のように定義する

$$v \in C, e \in M \text{ に対して, } X_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}) \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \end{cases}$$

## マッチングと頂点被覆の関係：証明

証明：行列  $X \in \mathbb{R}^{C \times M}$  を次のように定義する

$$v \in C, e \in M \text{ に対して, } X_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}) \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \end{cases}$$

▶  $M$  はマッチングなので、 $C$  の各頂点に接続する  $M$  の辺の数は 1 以下

$$\therefore \sum_{v \in C} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{v \in C} \left( \sum_{e \in M} X_{v,e} \right) \leq \sum_{v \in C} 1 = |C|$$

## マッチングと頂点被覆の関係：証明

証明：行列  $X \in \mathbb{R}^{C \times M}$  を次のように定義する

$$v \in C, e \in M \text{ に対して, } X_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}) \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \end{cases}$$

- ▶  $M$  はマッチングなので、 $C$  の各頂点に接続する  $M$  の辺の数は 1 以下

$$\therefore \sum_{v \in C} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{v \in C} \left( \sum_{e \in M} X_{v,e} \right) \leq \sum_{v \in C} 1 = |C|$$

- ▶  $C$  は頂点被覆なので、 $M$  の各辺に接続する  $C$  の頂点の数は 1 以上

$$\therefore \sum_{v \in C} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{e \in M} \left( \sum_{v \in C} X_{v,e} \right) \geq \sum_{e \in M} 1 = |M|$$

## マッチングと頂点被覆の関係：証明

証明：行列  $X \in \mathbb{R}^{C \times M}$  を次のように定義する

$$v \in C, e \in M \text{ に対して, } X_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}) \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \end{cases}$$

- ▶  $M$  はマッチングなので、 $C$  の各頂点に接続する  $M$  の辺の数は 1 以下

$$\therefore \sum_{v \in C} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{v \in C} \left( \sum_{e \in M} X_{v,e} \right) \leq \sum_{v \in C} 1 = |C|$$

- ▶  $C$  は頂点被覆なので、 $M$  の各辺に接続する  $C$  の頂点の数は 1 以上

$$\therefore \sum_{v \in C} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{e \in M} \left( \sum_{v \in C} X_{v,e} \right) \geq \sum_{e \in M} 1 = |M|$$

- ▶  $\therefore |M| \leq \sum_{v \in C} \sum_{e \in M} X_{v,e} \leq |C|$

□

## マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

 $M$  が  $G$  のマッチング $C$  が  $G$  の頂点被覆

$$\Rightarrow |M| \leq |C|$$



## マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

$M$  が  $G$  のマッチング  
 $C$  が  $G$  の頂点被覆  $\Rightarrow |M| \leq |C|$

## 最大マッチングと頂点被覆の関係

$M$  が  $G$  の最大マッチング  
 $C$  が  $G$  の頂点被覆  $\Rightarrow |M| \leq |C|$

## マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

$M$  が  $G$  のマッチング  
 $C$  が  $G$  の頂点被覆  $\Rightarrow |M| \leq |C|$

## 最大マッチングと頂点被覆の関係

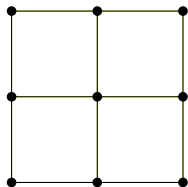
$M$  が  $G$  の最大マッチング  
 $C$  が  $G$  の頂点被覆  $\Rightarrow |M| \leq |C|$

## 最大マッチングと最小頂点被覆の関係 (弱双対性)

$M$  が  $G$  の最大マッチング  
 $C$  が  $G$  の最小頂点被覆  $\Rightarrow |M| \leq |C|$

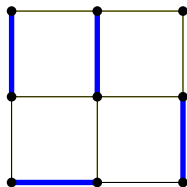
## 頂点被覆の重要性

次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつですか？



## 頂点被覆の重要性

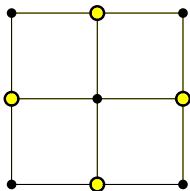
次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつですか？



最大マッチングの辺数  $\geq 4$

## 頂点被覆の重要性 (続き)

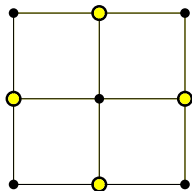
次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつですか？



これは頂点被覆

## 頂点被覆の重要性 (続き)

次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつですか？

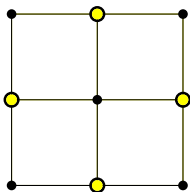


これは頂点被覆なので、

最大マッチングの辺数  $\leq 4$

## 頂点被覆の重要性 (続き)

次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつですか？



これは頂点被覆なので、

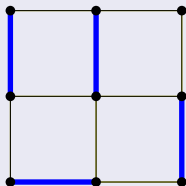
最大マッチングの辺数  $\leq 4$

- ▶ したがって、最大マッチングの辺数 = 4 である!!!

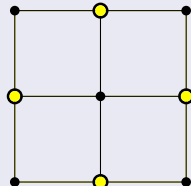
## 頂点被覆の重要性：今一度

次のグラフの最大マッチングの辺数はいくつ？

下界

最大マッチングの辺数  $\geq 4$ 

上界

最大マッチングの辺数  $\leq 4$ したがって、最大マッチングの辺数  $= 4$ 

## 格言

頂点被覆を見ることで、マッチングの最大性が保証される



## 頂点被覆の重要性：まとめ

次の2つを同時に行う

## 下界

辺数  $k$  のマッチングを見つける

- ▶ このとき、  
最大マッチングの辺数  $\geq k$

## 上界

頂点数  $k$  の頂点被覆を見つける

- ▶ このとき、  
最大マッチングの辺数  $\leq k$

よって、この2つができれば

最大マッチングの辺数  $= k$

## 頂点被覆の重要性：アルゴリズム

頂点被覆により，最適値の「挟み打ち」ができる

## 頂点被覆に基づく最大マッチング発見アルゴリズム (雛形)

- ▶ 入力：無向グラフ  $G = (V, E)$
- ▶ 出力： $G$  の最大マッチング  $M$  と最小頂点被覆  $C$

- 1  $M := \emptyset, C := \emptyset$  とする
- 2 while  $|M| < |C|$  do
  - ①  $M$  を大きくするか， $C$  を小さくする
- 3  $M$  と  $C$  を出力

先ほどの考察より，このアルゴリズムが停止するならば，必ず最大マッチングと最小頂点被覆を出力することが分かる

## 問題点

停止しないかもしれない

# 目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② 最大マッチングと増加道
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆
- ④ 今日のまとめ

## 今日のまとめ

## 今日の目標

「マッチング」を理解する

- ▶ マッチングの定義を理解する
- ▶ 最大マッチングと極大マッチングの違いを理解する
- ▶ 最大マッチングと増加道の関係を理解する
- ▶ 最大マッチングと最小頂点被覆の関係を理解する

重要な概念

- ▶ 最適性の保証 (弱双対性)  $\rightsquigarrow$  **最適化の基礎**

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK

## 目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② 最大マッチングと増加道
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆
- ④ 今日のまとめ