グラフとネットワーク	2016年8月8日
期末試験	岡本 吉央

10:40–12:10．携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．使用可能な解答用紙は1枚のみ．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1 砂漠で遭難した人々をオアシスで救護したい．遭難者は8人おり，オアシスは3か所ある．遭難者は携帯電話によって決められた場所まで歩くよう誘導できる．各オアシスに対して，各遭難者までの距離と救護可能人数は次の通りである．

距離	遭難者								救護可能人数
(km)	1	2	3	4	5	6	7	8	(人)
オアシス A	4	3	1	3	4	3	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	5	3	3
オアシス C	5	4	4	1	4	3	1	1	4

このとき，どの遭難者も 2 km 以下しか歩かないようにして，全員救護できるか，判定したい．

(a) この問題を最大流問題としてモデル化せよ．つまり，考えるべき有向グラフとその各弧の容量を示せ．

(b) 問 (a) で得られた問題に対する最大流は何か？ 最小 s, t カットは何か？ それぞれ答えよ．そして，最大流の値と最小 s, t カットの値が一致することを確かめよ．

(c) 問 (a) と (b) の結果より，全員救護できるかできないか答えよ．また，全員救護できないとき，最大何人まで救護できるか答えよ．

問題 2 無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，その大域点連結度を $\kappa(G)$，最小次数を $\delta(G)$ で表す．無向グラフ $G = (V, E)$ の頂点数が2以上であるとき，

$$|V| + \kappa(G) \geq 2\delta(G) + 1$$

が成り立つことを証明せよ．(注意：頂点数 n の完全グラフ K_n に対して，$\kappa(K_n) = n - 1$ である．)

問題 3 無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，その独立集合の頂点数の最大値を $\alpha(G)$ で表し，染色数を $\chi(G)$ で表す．このとき，

$$\alpha(G)\chi(G) \geq |V|$$

が成り立つことを証明せよ．

問題 4 次の問いに答えよ．

1. 頂点数が3以上である任意の連結平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して，G が長さ3の閉路を含まないならば，$|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$ が成り立つことを証明せよ．
2. それを用いて，完全二部グラフ $K_{3,3}$ が平面的ではないことを証明せよ．

以上