

提出締切：2016年7月25日

復習問題 12.1 任意の木が平面的グラフであることを証明せよ。

復習問題 12.2 平面グラフ G の頂点数, 辺数, 面数, 連結成分数がそれぞれ n, m, f, k であるとき,

$$n - m + f = 1 + k$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 12.3 次の問いに答えよ。

1. 頂点数が3以上である任意の連結平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して, $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ が成り立つことを証明せよ。
2. それを用いて, 頂点数5の完全グラフ K_5 が平面的ではないことを証明せよ。

復習問題 12.4 正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体以外に, 3次元正多面体が存在しないことを証明せよ。(ヒント: 3次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい。)

補足問題 12.5 次の問いに答えよ。

1. 頂点数が2以上である任意の連結外平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して, $|E| \leq 2 \cdot |V| - 3$ が成り立つことを証明せよ。
2. それを用いて, 頂点数4の完全グラフ K_4 が外平面的ではないことを証明せよ。

追加問題 12.6 ある3以上の整数 n に対して, 頂点数が n であり, 辺数が $3n - 6$ 以下であるが, 平面的ではないグラフを構成せよ。そのグラフがなぜ平面的でないのかも説明せよ。

追加問題 12.7 次の問いに答えよ。

1. 頂点数が3以上である任意の連結平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して, G が長さ3の閉路を含まないならば, $|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$ が成り立つことを証明せよ。

2. それを用いて, 完全二部グラフ $K_{3,3}$ が平面的ではないことを証明せよ。

追加問題 12.8 各面が正五角形か正六角形であるような3次元凸多面体において, 正五角形である面の数が必ず12になることを証明せよ。(ヒント: 3次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい。まず, 各頂点の次数が3であることを証明せよ。)

追加問題 12.9 次の3条件をどれも満たす3次元凸多面体をすべて挙げよ。なぜそうなるのか, 理由も述べよ。

- 面として, 正三角形と正方形を少なくとも1つずつ含む。
- 面として, 正三角形と正方形以外を含まない。
- どの頂点においても, 集まる面の数はちょうど3である。

追加問題 12.10 次の問いに答えよ。

1. 頂点数が2以上である任意の連結外平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して, G が長さ3の閉路を含まないとき, $|E| \leq \frac{3}{2} \cdot |V| - 2$ が成り立つことを証明せよ。
2. それを用いて, 完全二部グラフ $K_{2,3}$ が外平面的ではないことを証明せよ。