

提出締切：2016年6月13日

**復習問題 7.1** König-Egerváry の定理は「任意の二部グラフ  $G = (V, E)$  において、 $G$  の最大マッチング  $M$  と  $G$  の最小頂点被覆  $C \subseteq V$  に対して、 $|M| = |C|$  となる」ことを主張している。以下の手順にしたがって、König-Egerváry の定理を証明せよ。

1. グラフ  $G$  の部集合を  $A, B$  とする。このとき、 $G$  から次の有向グラフ  $G' = (V', A')$  を構成する。すなわち、 $V' = V \cup \{s, t\}$  であり、 $A' = \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E, u \in A, v \in B\} \cup \{(s, u) \mid u \in A\} \cup \{(v, t) \mid v \in B\}$  とするのである。また、 $G'$  の各弧  $(x, y)$  に対して容量を

$$c((x, y)) = \begin{cases} 1 & (x = s \text{ または } y = t \text{ のとき}), \\ \infty & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

と定める。(ただし、 $\infty$  は十分大きな整数を表す記号であると見なす。)  $G'$  における最大流の値が  $G$  の最大マッチングの辺数以下であることを証明せよ。(ヒント: 整数流定理を用いよ。)

2. 上で構成した有向グラフと弧容量に対して、 $G'$  における最小  $s, t$  カットの容量が  $G$  の最小頂点被覆の頂点数以上であることを証明せよ。
3. 最大マッチングと最小頂点被覆に対する弱双対性と最大流と最小  $s, t$  カットに対する強双対性を用いて、König-Egerváry の定理の証明を完結させよ。

**復習問題 7.2** 二部グラフ  $G = (V, E)$  を考える。ただし、 $V$  は部集合  $A, B$  へ分割されるものとする。このとき、Hall の結婚定理は「 $G$  が  $A$  の頂点をすべて飽和するマッチングを持つための必要十分条件は、任意の  $S \subseteq A$  に対して  $|S| \leq |N(S)|$  が成り立つことである」と主張している。以下の手順に従って、Hall の結婚定理を証明せよ。

1. まず、条件の必要性を証明せよ。
2. 条件の十分性を示すために、対偶、すなわち、「 $G$  が  $A$  の頂点をすべて飽和するマッチングを持たないならば、ある  $S \subseteq A$  に対して  $|S| > |N(S)|$  が成り立つ」ことを示せ。

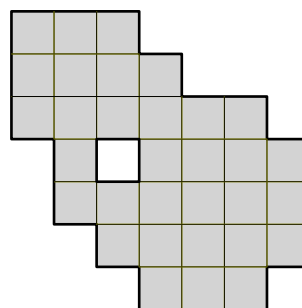
**復習問題 7.3** トランプ・カードの1デッキには、各ランク (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) のカードが4枚ずつ存在する。つまり、カードの総枚数は52である。この52枚のカードを4枚ずつ13個の組へ任意に分けたとき、各組から1枚ずつカードをうまく選ぶと、すべてのランクのカードを取り出せることを証明せよ。

**追加問題 7.4** 二部グラフ  $G = (V, E)$  のすべての頂点の次数が同じであるとする。そして、この次数が1以上であると仮定する。

1.  $G$  の2つの部集合を  $A$  と  $B$  とするとき、 $|A| = |B|$  が成り立つことを証明せよ。
2.  $G$  が  $A$  の頂点をすべて飽和するマッチングを持つことを証明せよ。
3. 以上より、 $G$  が完全マッチングを持つことを証明せよ。

**追加問題 7.5** 二部グラフ  $G = (V, E)$  の辺数を  $m$  とし、最大次数を  $\Delta \geq 1$  とする。König-Egerváry の定理を用いて、 $G$  が辺数  $m/\Delta$  以上のマッチングを持つことを証明せよ。

**追加問題 7.6** 次の灰色の部分で表された図形に  $1 \times 2$  の長方形をいくつか重なりあうことなく置くことで、この図形全体を覆うことができるだろうか? 理由も付けて答えよ。



(ヒント: 二部グラフのマッチングに関する問題としてモデル化せよ。)

**追加問題 (発展) 7.7** 実正方行列  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  が二重確率行列であるとは、 $A$  の任意の成分が非負であり、 $P$  のどの行の成分和、どの列の成分和も 1 であることである。二重確率行列が置換行列であるとは、その成分がどれも 0 か 1 であることである。

任意の二重確率行列  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  に対して、ある自然数  $m$  と非負実数  $c_1, \dots, c_m$ , 置換行列  $P_1, \dots, P_m$  が存在して、

$$A = c_1 P_1 + \dots + c_m P_m \quad \text{かつ} \quad c_1 + \dots + c_m = 1$$

が成り立つことを証明せよ。例えば、

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 5/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という等式が成立する。(ヒント： $A$  における非零成分の数に関する数学的帰納法を用いてもよい。そのとき、Hall の結婚定理が使えるか考えてみよ。)(補足：これは、バーコフ・フォンノイマンの定理と呼ばれ、最適化理論において重要な役割を果たしている。)