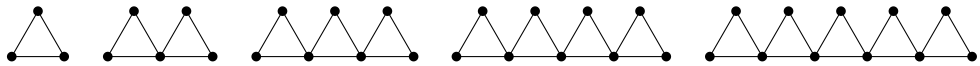
離散数理工学　　　　　　　　　　　　　　　　2016 年 12 月 13 日
中間試験　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　岡本 吉央

9:00–10:30．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1　自然数 $n \geq 1$ に対して，次の図のように，三角形を n 個連ねたグラフ G_n を考える．



G_1　　G_2　　G_3　　G_4　　G_5

グラフ G_n の独立集合の総数を g_n で表すことにする．このとき，

$$g_n = \begin{cases} 4 & (n = 1 \text{ のとき}), \\ 10 & (n = 2 \text{ のとき}), \\ 2g_{n-1} + g_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：はじめの段階で，$G_1, G_2, \ldots$ ではないグラフを考えるとよいかもしれない．)

問題 2　次の漸化式を考える．

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2b_{n-1} - 3n + 9 & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 b_n を閉じた形で与えよ．(注：母関数を用いる方法によらない解答であっても，部分点を与える．)

問題 3　群 G, H に対して，G から H への群準同型写像 $\phi\colon G \to H$ が存在するとする．このとき，任意の $x \in G$ と任意の非負整数 $n \geq 0$ に対して，

$$\phi(x^n) = \phi(x)^n$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：G の単位元を e_G，H の単位元を e_H とするとき，$\phi(e_G) = e_H$ が成り立つことを用いてもよい．)

問題 4　15 パズルとは，4×4 の盤面に，1 から 15 の書かれた正方形のコマが 1 つずつ置かれ，1 か所の空きを利用してコマを動かし，目的の配置を作成するパズルである．

下の図にある左の配置から右の配置が作成できるか，できないか，理由を付けて答えよ．

5	3	1	2
4	10	9	8
7	6		15
14	13	12	11

→

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

以上