離散数理工学 第 14 回
トピックス

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 2 月 7 日

最終更新：2017 年 2 月 6 日　12:53

スケジュール 前半

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/4)
- ⋆ 休講 (体育祭) (10/11)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/18)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/25)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/1)
- ⋆ 休講 (出張) (11/8)
5. 離散代数：対称群と置換群 (11/15)
6. 離散代数：有限群 (11/22)
7. 離散代数：有限群の応用 (11/29)

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/6)
- ⋆ 中間試験 (12/13)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/20)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/10)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/17)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/24)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/31)
- ⋆ トピックス (2/7)
- ⋆ 期末試験 (2/14)

注意：予定の変更もありうる

目次

Gál と Miltersen

http://www.cs.utexas.edu/~panni/

https://resources.mpi-inf.mpg.de/conferences/adfocs-01/program.html

この問題の出自 (データ構造に関する論文)

- Anna Gál, Peter Bro Miltersen: The cell probe complexity of succinct data structures. Theor. Comput. Sci. 379(3): 405–417 (2007)

100 囚人の問題：設定

設定

- 100 人の死刑囚
- 死刑囚には番号が振られている $(1, 2, \ldots, 100)$
- 死刑囚は一人ずつ部屋に連れられて行き，そこで以下を行う
  - その部屋には $1, 2, \ldots, 100$ と番号の書かれた箱がある
  - 箱には $1, 2, \ldots, 100$ の中の番号が 1 つだけ書かれた紙が入っている
  - 紙に書かれている番号はすべて異なる
  - 死刑囚はその中の 50 個の箱を開けられる
  - 開けた箱の中に自分と同じ番号の紙が入っていれば「成功」
  - そうでなければ「失敗」
- 全員の死刑囚が成功すれば，全員釈放．そうでなければ，全員死刑

死刑囚は前もって相談できる

問題

死刑囚はどれほどの確率で「全員釈放」されるか？

100 囚人の問題：簡単な戦略

簡単な戦略

各死刑囚は，一様ランダムに 50 個の箱を明ける

この戦略で「全員釈放」となる確率は？

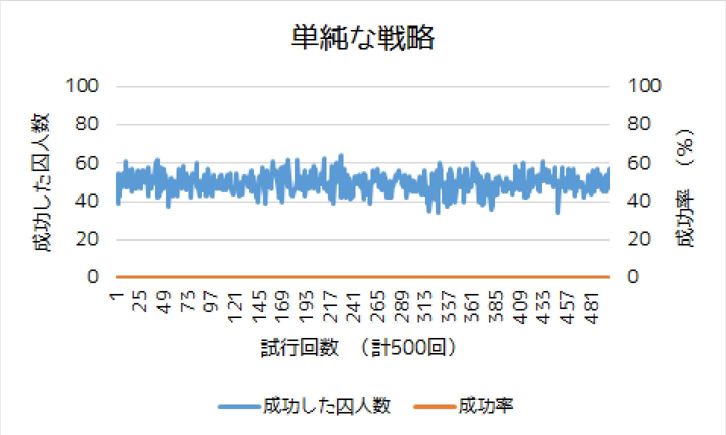
- 1 人の死刑囚が成功する確率は $\dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$
- $\therefore$ 100 人全員が成功する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 7.89 \times 10^{-31}$$

これは「ほぼ 0」

シミュレーション：単純な戦略

500 回の試行



100 囚人の問題：賢い戦略　(Sven Skyum による)

賢い戦略

囚人 i は次の戦略を取る

(1) まず，箱 i を開ける

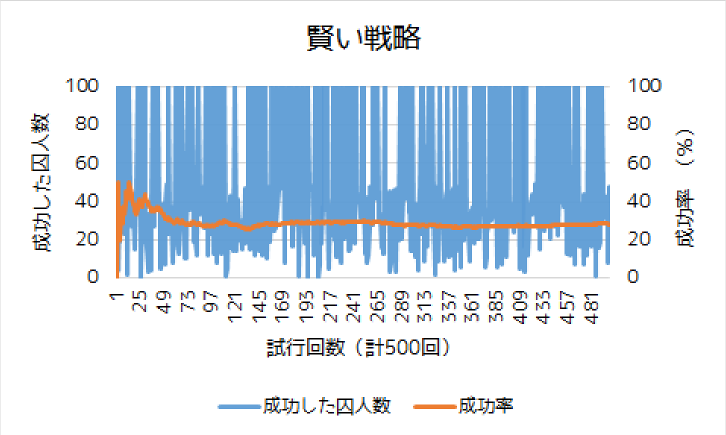
(2) いま開けた箱の紙に書いてあるのが i ならば，成功で終了

(3) そうでなければ，その紙に書いてある番号の箱を開けて (2) に戻る

これだけ

シミュレーション：賢い戦略

500 回の試行



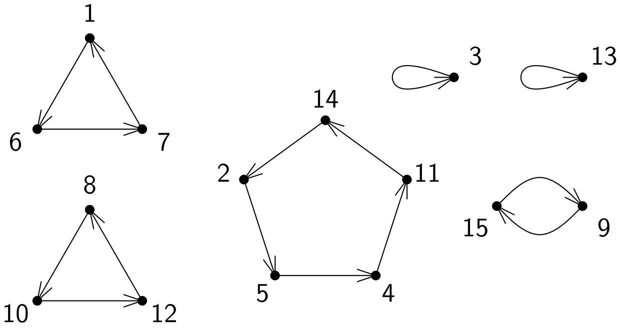
成功率 28.2%

解析：賢い戦略 (1)

鍵となる考え

「箱 i の中にある紙の番号が $\pi(i)$」という置換 π を考える

置換の巡回表現



すべての囚人が成功するのはいつか？

置換における互いに素な巡回置換の長さがどれも 50 以下であるとき

解析：賢い戦略 (2)

ある囚人が失敗するのはいつか？

置換における互いに素な巡回置換に長さが 50 を超えるものがあるとき

長さが 50 を超える巡回置換は 1 つしかない (要素数が 100 だから)

- その巡回置換の長さを *ell* とする ($\ell > 50$)
- 要素数 100 の置換の中で，長さ ℓ の巡回置換を持つものの総数は

$$\binom{100}{\ell}(\ell-1)!(100-\ell)!$$

- 整理すると

$$\binom{100}{\ell}(\ell-1)!(100-\ell)! = \frac{100!}{\ell!(100-\ell)!}(\ell-1)!(100-\ell)! = \frac{100!}{\ell}$$

解析：賢い戦略 (2)

ある囚人が失敗するのはいつか？

置換における互いに素な巡回置換に長さが 50 を超えるものがあるとき

- したがって，失敗確率は

$$\frac{1}{100!}\sum_{\ell=51}^{100}\frac{100!}{\ell} = \sum_{\ell=51}^{100}\frac{1}{\ell} \approx 0.68$$

- したがって，成功確率は

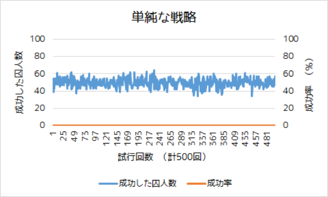
$$1-\sum_{\ell=51}^{100}\frac{1}{\ell} \approx 1-0.68 = 0.32$$

つまり，およそ 32 パーセントで成功する

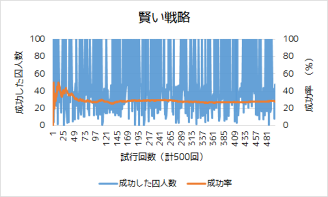
シミュレーション (再掲)

500 回の試行

単純な戦略



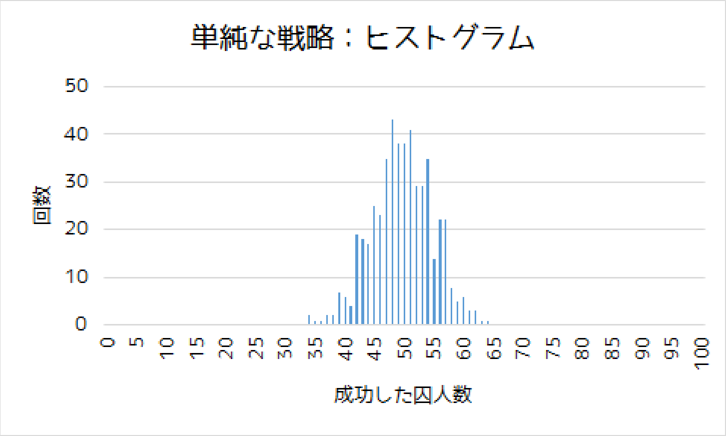
賢い戦略



何が起きているのか？

シミュレーション：単純な戦略 (ヒストグラム)

500 回の試行



成功した囚人数が 50 の周りに分布 (50 ＝ 成功した囚人数の期待値)

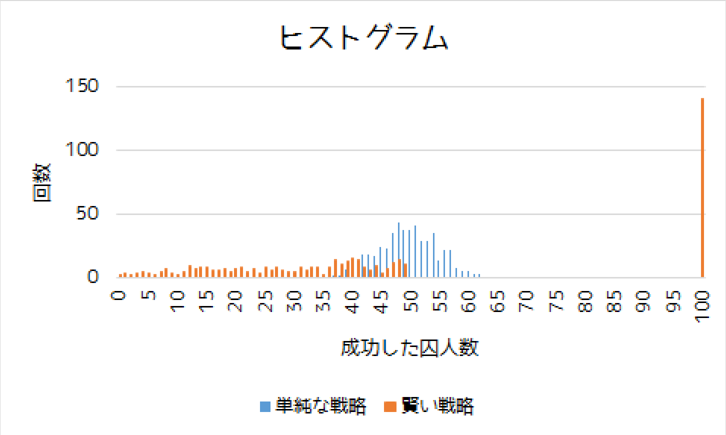
シミュレーション：賢い戦略 (ヒストグラム)

500 回の試行

成功した囚人数が 50 の周りに分布していない

シミュレーション：ヒストグラムを重ねて描いたもの

500 回の試行



賢い戦略は囚人ごとの「独立性」を壊している

目次

ある帽子ゲームとその変種について

これは PowerPoint のスライドで

目次