離散数理工学 第 6 回
離散代数：有限群

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 11 月 22 日

最終更新：2016 年 11 月 21 日　15:39

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/4)
- ⋆ 休講 (体育祭) (10/11)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/18)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/25)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/1)
- ⋆ 休講 (出張) (11/8)
5. 離散代数：対称群と置換群 (11/15)
6. 離散代数：有限群 (11/22)
7. 離散代数：有限群の応用 (11/29)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/6)
- ⋆ 中間試験 (12/13)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/20)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/10)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/17)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/24)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/31)
- ⋆ 予備日 (2/7)
- ⋆ 期末試験 (2/14?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

有限群に関する基礎的な用語が使えるようになる

- 群の定義，単位元，逆元
- 群の表示
- 群の同型性，準同型性

目次

群の例 (1)：整数と加法

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ に関して群となり，その群を $(\mathbb{Z}, +)$ と表す

群表 (ケーリー表とも呼ばれる)

$+$	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\vdots$											
-4	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\cdots$
-3	$\cdots$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
-2	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
-1	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
0	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
1	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
2	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
3	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
4	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\vdots$											

群の構成要素

群は 2 つのものから定義される

- 集合 G
- G 上の演算 $\circ$
  - $x, y \in G$ に対する演算結果が $x \circ y$
  - 演算は他の記号 (例えば，$*$，$\cdot$，$\times$，$+$ など) で表すことも多い
  - $x \circ y$ を単に xy と書くことも多い $\leftarrow$ 今後これを用いていることが多い

ただし，この G と $\circ$ は次の条件を満たす必要がある

この 2 つを組にして，$(G, \circ)$ と群を表記する
(「$\circ$」を省略して,「G」だけで表記する場合も多い)

群の定義

群とは？

集合 G と G 上の演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ が群であるとは，次を満たすこと

1. ある要素 $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して
$$x \circ e = e \circ x = x$$
2. 任意の要素 $x \in G$ に対して，ある要素 $y \in G$ が存在して
$$x \circ y = y \circ x = e$$
3. 演算 $\circ$ は次の結合性を満たす：任意の $x, y, z \in G$ に対して
$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

群の例 (1)：整数と加法 — 1 つ目の条件

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ に関して群となり，その群を $(\mathbb{Z}, +)$ と表す

群表

$+$	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\vdots$											
-4	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\cdots$
-3	$\cdots$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
-2	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
-1	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
0	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
1	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
2	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
3	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
4	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\vdots$											

群の例 (1)：整数と加法 — 2 つ目の条件

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ に関して群となり，その群を $(\mathbb{Z}, +)$ と表す

群表

$+$	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\vdots$											
-4	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\cdots$
-3	$\cdots$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
-2	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
-1	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
0	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
1	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
2	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
3	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
4	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\vdots$											

群の定義：単位元と逆元

群とは？

集合 G と G 上の演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ が**群**であるとは，次を満たすこと

1. ある要素 $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して
$$x \circ e = e \circ x = x$$
2. 任意の要素 $x \in G$ に対して，ある要素 $y \in G$ が存在して
$$x \circ y = y \circ x = e$$
3. 演算 $\circ$ は次の**結合性**を満たす：任意の $x, y, z \in G$ に対して
$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

群の定義：単位元と逆元

群とは？

集合 G と G 上の演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ が群であるとは，次を満たすこと

1. ある要素 $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して
$$x \circ e = e \circ x = x$$
この e を G の単位元と呼ぶ
2. 任意の要素 $x \in G$ に対して，ある要素 $y \in G$ が存在して
$$x \circ y = y \circ x = e$$
3. 演算 $\circ$ は次の結合性を満たす：任意の $x, y, z \in G$ に対して
$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

群の定義：単位元と逆元

群とは？

集合 G と G 上の演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ が群であるとは，次を満たすこと

1. ある要素 $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して
$$x \circ e = e \circ x = x$$
この e を G の単位元と呼ぶ
2. 任意の要素 $x \in G$ に対して，ある要素 $y \in G$ が存在して
$$x \circ y = y \circ x = e$$
この y を G における x の逆元と呼び，x^{-1} で表すことが多い
3. 演算 $\circ$ は次の結合性を満たす：任意の $x, y, z \in G$ に対して
$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

群ではない例

1. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は乗法 $\times$ に関して群になる？
   - ならない (なぜ？)
2. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は乗法 $\times$ に関して群になる？
   - ならない (なぜ？)
3. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は減算 $-$ に関して群になる？
   - ならない (なぜ？)

群の例 (2)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	z	w	x
z	z	w	x	y
w	w	x	y	z

この表は次の関係を表している

$$
\begin{array}{llll}
x \circ x = x, & x \circ y = y, & x \circ z = z, & x \circ w = w, \\
y \circ x = y, & y \circ y = z, & y \circ z = w, & y \circ w = x, \\
z \circ x = z, & z \circ y = w, & z \circ z = x, & z \circ w = y, \\
w \circ x = w, & w \circ y = x, & w \circ z = y, & w \circ w = z
\end{array}
$$

群の例 (2)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	z	w	x
z	z	w	x	y
w	w	x	y	z

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- 単位元は？
- x の逆元は？ y の逆元は？ z の逆元は？ w の逆元は？
- 結合性は？ (例えば，$(y \circ w) \circ z \stackrel{?}{=} y \circ (w \circ z)$)

群の例 (3)

$$G = \{x, y, z, w\}$$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	x	w	z
z	z	w	x	y
w	w	z	y	x

この表は次の関係を表している

$$\begin{array}{llll} x \circ x = x, & x \circ y = y, & x \circ z = z, & x \circ w = w, \\ y \circ x = y, & y \circ y = x, & y \circ z = w, & y \circ w = z, \\ z \circ x = z, & z \circ y = w, & z \circ z = x, & z \circ w = y, \\ w \circ x = w, & w \circ y = z, & w \circ z = y, & w \circ w = x \end{array}$$

群の例 (3)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	x	w	z
z	z	w	x	y
w	w	z	y	x

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- 単位元は？
- x の逆元は？ y の逆元は？ z の逆元は？ w の逆元は？
- 結合性は？ (例えば，$(y \circ w) \circ z \stackrel{?}{=} y \circ (w \circ z)$)

群の例 (4)

$G = \{e, a, b, x, y, z\}$

群表

$\circ$	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	x	y	e	z	b
b	b	z	e	y	x	a
x	x	e	z	a	b	y
y	y	b	a	z	e	x
z	z	y	x	b	a	e

この表は次の関係を表している

$$
\begin{array}{llllll}
e \circ e = e, & e \circ a = a, & e \circ b = b, & e \circ x = x, & e \circ y = y, & e \circ z = z, \\
a \circ e = a, & a \circ a = x, & a \circ b = y, & a \circ x = e, & a \circ y = z, & a \circ z = b, \\
b \circ e = b, & b \circ a = z, & b \circ b = e, & b \circ x = y, & b \circ y = x, & b \circ z = a, \\
x \circ e = x, & x \circ a = e, & x \circ b = z, & x \circ x = a, & x \circ y = b, & x \circ z = y, \\
y \circ e = y, & y \circ a = b, & y \circ b = a, & y \circ x = z, & y \circ y = e, & y \circ z = x, \\
z \circ e = z, & z \circ a = y, & z \circ b = x, & z \circ x = b, & z \circ y = a, & z \circ z = e
\end{array}
$$

群の例 (4)

$G = \{e, a, b, x, y, z\}$

群表

$\circ$	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	x	y	e	z	b
b	b	z	e	y	x	a
x	x	e	z	a	b	y
y	y	b	a	z	e	x
z	z	y	x	b	a	e

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- 単位元は？
- G の各要素の逆元は？
- 結合性は？ (例えば，$(x \circ y) \circ z \stackrel{?}{=} x \circ (y \circ z)$)

注意：$a \circ y \neq y \circ a$ (可換性を満たさない)

アーベル群

アーベル群とは？

群 $(G, \circ)$ がアーベル群であるとは，次の性質を満たすこと

$$\text{任意の } x, y \in G \text{ に対して，} \quad x \circ y = y \circ x$$

この性質を可換性 (交換性) と呼ぶ

- アーベル群は可換群とも呼ばれる
- アーベル群ではない場合，群は非可換群と呼ばれる

有限群と位数

有限群とは？

群 $(G, \circ)$ が有限群であるとは，G の要素数が $|G|$ が有限であること

有限群の位数とは？

有限群 $(G, \circ)$ の位数とは，$|G|$ のこと

今までの例

- 例 (1)：有限群ではない (アーベル群)
- 例 (2)：有限群であり，位数は 4 (アーベル群)
- 例 (3)：有限群であり，位数は 4 (アーベル群)
- 例 (4)：有限群であり，位数は 6 (非可換群)

この講義の焦点は有限群

群の要素の表記法

群 $(G, \circ)$

- $x \circ y$ とは書かずに，xy と書くことが多い
- $x \circ x$ とは書かずに，x^2 と書くことが多い
- $(x \circ y) \circ z$ と $x \circ (y \circ z)$ は同じなので，
  これらを $x \circ y \circ z$ と書き，もっと省略して xyz と書くことが多い
- xxx とは書かずに，x^3 と書くことが多い
- x を n 個並べたものは x^n と書くことが多い
- x の逆元は x^{-1} と書くことが多い
- x^{-1} を n 個並べたものは x^{-n} と書くことが多い
- x^0 は単位元 e を表す

このとき，次の指数法則が成り立つ

観察

任意の $x \in G$ と任意の整数 n, m に対して，$x^n x^m = x^{n+m}$

練習問題

群 G

例題

任意の $x, y \in G$ に対して，$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

証明：

- 逆元の定義より，$(xy)(xy)^{-1} = e$ (ただし，e は G の単位元)
- この式の両辺に左から x^{-1} をかけると

$$\begin{aligned} x^{-1}(xy)(xy)^{-1} &= x^{-1}e \\ (x^{-1}x)y(xy)^{-1} &= x^{-1} \\ y(xy)^{-1} &= x^{-1} \end{aligned}$$

- 今得られた式の両辺に左から y^{-1} をかけると

$$\begin{aligned} y^{-1}y(xy)^{-1} &= y^{-1}x^{-1} \\ \therefore \quad (xy)^{-1} &= y^{-1}x^{-1} \end{aligned}$$

□

目次

復習：置換群とは？

有限集合 X

置換群とは？

X 上の置換群とは，X 上の置換の集合 S で以下を満たすもの

1. $e \in S$ (恒等置換を持つ)
2. $\pi, \sigma \in S$ ならば $\pi\sigma \in S$ (積で閉じている)
3. $\pi \in S$ ならば $\pi^{-1} \in S$ (逆置換も持つ)

置換群は群

観察

置換群は写像の合成に関して群である

用語の対応

群	置換群
単位元	恒等置換
逆元	逆置換

置換群の群表 (1)

対称群 S_3 の群表

$\circ$	e	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
e	e	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	e	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3)$
$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	e	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$
$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	e	$(1\ 3)$	$(1\ 2)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	e
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	e	$(1\ 2\ 3)$

置換群の群表 (2)

交代群 A_3 の群表

$\circ$	e	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
e	e	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	e
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	e	$(1\ 2\ 3)$

目次

群の要素を作る

群 G

- $a \in G$ のとき，$a^2 \in G$，$a^3 \in G$，$a^4 \in G$，...
- $a, b \in G$ のとき，$ab \in G$，$a^2b \in G$，$aba \in G$，...

このように，要素を並べることで，G の要素がどんどん作れる

群の表示：例 (3) を見て

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	x	w	z
z	z	w	x	y
w	w	z	y	x

- $yz = w$ が成り立つ
- つまり，y と z があれば，w は復元できる (w はある意味で不要)
- x は単位元 (e と書く)
- y は $y^2 = e$ を満たす
- z は $z^2 = e$ を満たす
- y と z は $yz = zy$ を満たす (書き換えると $z^{-1}yzy^{-1} = e$)

群の表示：例 (3) を見て

$G = \{e, a, b, ab\}$

群表

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

別の書き方 (群の表示と呼ばれる)：

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle$$

読み方

- 「a, b」を並べることで G の要素はすべて表現できる
- 並べたとき,「$a^2 = b^2 = e$, $ab = ba$」と置き換えてよい
- 置き換える規則は，これら (から導かれるもの) 以外にない

用語

- $\{a, b\}$ は G の生成系,「$a^2 = b^2 = e$, $ab = ba$」は関係式

群の表示：例 (3) を見て

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle$$

簡約の例

$$\begin{aligned} ab^3a^3b &= abbbaaab \\ &= a(bb)b(aa)ab \\ &= aebeab \\ &= abab \\ &= a(ba)b \\ &= a(ab)b \\ &= aabb \\ &= ee \\ &= e \end{aligned}$$

群の表示：群の例 (2)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	z	w	x
z	z	w	x	y
w	w	x	y	z

関係式

- 単位元は x (e と書くことにする)
- $y^2 = z$，$y^3 = zy = w$ (y があれば，z と w は表現できる)
- $y^4 = wy = e$

群の表示：群の例 (2)

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

群の表示

$$\langle a \mid a^4 = e \rangle$$

巡回群

(有限) 巡回群とは？

位数 n の巡回群とは，次の表示を持つ群　　($n \geq 0$ は自然数)

$$C_n = \langle a \mid a^n = e \rangle$$

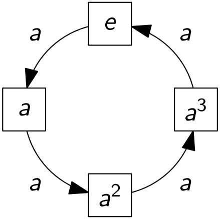
例 (2) は位数 4 の巡回群

注意

- $C_n = \{e, a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}\}$
- すなわち，C_n の位数は n
- C_n はアーベル群 (演習問題)
  - ヒント：C_n の任意の要素はある自然数 k を用いて a^k と書ける

ケーリー・グラフ：巡回群

$C_4 = \langle a \mid a^4 = e \rangle$



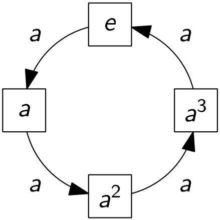
ケーリー・グラフ

群 G とその生成系 S

ケーリー・グラフとは？

(G, S) のケーリー・グラフとは，次で定義される有向グラフ

- 頂点集合は G
- 孤 $(x, y) \in G \times G$ がある $\Leftrightarrow$ ある $z \in S$ が存在して，$y = xz$



群の表示：群の例 (4)

$G = \{e, a, b, x, y, z\}$

群表

$\circ$	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	x	y	e	z	b
b	b	z	e	y	x	a
x	x	e	z	a	b	y
y	y	b	a	z	e	x
z	z	y	x	b	a	e

関係式

- $a^2 = x$，$ab = y$, $ba = z$ (a, b があれば，x, y, z は表現できる)
- $a^3 = e$, $b^2 = e$, $abab = e$

群の表示：群の例 (4)

$$G = \{e, a, b, a^2, ab, ba\}$$

群表

$\circ$	e	a	b	a^2	ab	ba
e	e	a	b	a^2	ab	ba
a	a	a^2	ab	e	ba	b
b	b	ba	e	ab	a^2	a
a^2	a^2	e	ba	a	b	ab
ab	ab	b	a	ba	e	a^2
ba	ba	ab	a^2	b	a	e

群の表示

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$$

群の表示：群の例 (4)

群の表示

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$$

簡約の例

$$\begin{aligned} aba &= ababb \\ &= (abab)b \\ &= eb \\ &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2ba^2b &= aabaab \\ &= aabaeab \\ &= aababbab \\ &= a(abab)bab \\ &= aebab \\ &= abab \\ &= e \end{aligned}$$

二面体群

(有限) 二面体群とは？

位数 $2n$ の二面体群とは，次の表示を持つ群　　$(n \geq 0$ は自然数$)$

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = abab = e \rangle$$

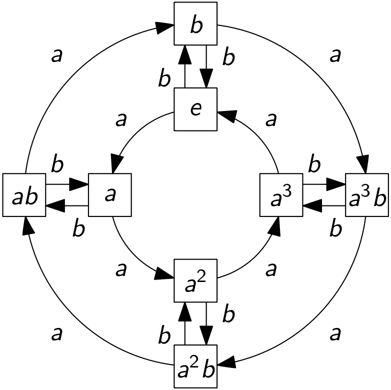
例 (4) は位数 6 の二面体群

注意

- $D_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$
- すなわち，D_n の位数は $2n$
- $n \geq 3$ のとき D_n は非可換群 (演習問題)
  - ヒント：ab と ba を考える

ケーリー・グラフ：二面体群

$$D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = abab = e \rangle$$



目次

対称群の表示 (1)

対称群 S_3 の群表

$\circ$	e	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
e	e	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	e	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3)$
$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	e	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$
$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	e	$(1\ 3)$	$(1\ 2)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	e
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	e	$(1\ 2\ 3)$

S_3 の表示は？

対称群の表示 (続き)

1 つの表示法

$\circ$	e	a	b	bab	ba	ab
e	e	a	b	bab	ba	ab
a	a	e	ab	ba	bab	b
b	b	ba	e	ab	a	bab
bab	bab	ab	ba	e	b	a
ba	ba	b	bab	a	ab	e
ab	ab	bab	a	b	e	ba

つまり,

$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$$

対称群の表示 (続き)

別の表示法

$\circ$	e	x	yx	xy	y	y^2
e	e	x	yx	xy	y	y^2
x	x	e	y^2	y	xy	yx
yx	yx	y	e	y^2	x	xy
xy	xy	y^2	y	e	yx	x
y	y	yx	xy	x	y^2	e
y^2	y^2	xy	x	yx	e	y

つまり,

$$\langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$$

対称群の表示：ここまでのまとめ

3 次の対称群 S_3 に対して，2 つの表示が得られた

- $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$
- $\langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$

別の言い方をすると

- この 2 つの有限群は 3 次の対称群と 同型 である

同型な群は，本質的に「同じ」である

群の準同型性と同型性

群 $(G, \circ)$ と群 $(H, \star)$

群準同型写像とは？

$(G, \circ)$ から $(H, \star)$ への**群準同型写像**とは，
写像 $\phi\colon G \to H$ で，次を満たすもの

$$\text{任意の } x, y \in G \text{ に対して，} \quad \phi(x \circ y) = \phi(x) \star \phi(y)$$

群同型写像とは？

$(G, \circ)$ から $(H, \star)$ への**群同型写像**とは，
$(G, \circ)$ から $(H, \star)$ への群準同型写像で，全単射であるもの

$(G, \circ)$ から $(H, \star)$ への群同型写像が存在するとき，
$(G, \circ)$ と $(H, \star)$ は**同型**であるという

対称群の表示：同型写像 (1)

3 次の対称群 $S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ に対して，2 つの表示が得られた

- $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$
- $H = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$

写像 $\phi\colon S_3 \to G$ として次を考える

$$\phi(e) = e, \quad \phi((1\ 2)) = a, \quad \phi((1\ 3)) = b,$$
$$\phi((2\ 3)) = bab, \quad \phi((1\ 2\ 3)) = ba, \quad \phi((1\ 3\ 2)) = ab$$

この ϕ は同型写像である．例えば

$$\phi((1\ 2)(1\ 3)) = \phi((1\ 3\ 2)) = ab = \phi((1\ 2))\phi((1\ 3))$$

対称群の表示：同型写像であることの確認 (1)

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$$

同型写像であることを確認するためには

関係式を満たすことが確認できればよい

写像 $\phi\colon S_3 \to G$ として次を考える

$$\phi(e) = e, \quad \phi((1\ 2)) = a, \quad \phi((1\ 3)) = b,$$
$$\phi((2\ 3)) = bab, \quad \phi((1\ 2\ 3)) = ba, \quad \phi((1\ 3\ 2)) = ab$$

このとき，

$$\begin{aligned}
a^2 &= \phi((1\ 2))\phi((1\ 2)) = \phi((1\ 2)(1\ 2)) = \phi(e) = e,\\
b^2 &= \phi((1\ 3))\phi((1\ 3)) = \phi((1\ 3)(1\ 3)) = \phi(e) = e,\\
ababab &= \phi((1\ 2))\phi((1\ 3))\phi((1\ 2))\phi((1\ 3))\phi((1\ 2))\phi((1\ 3))\\
&= \phi((1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3))\\
&= \phi((1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2)) = \phi(e) = e
\end{aligned}$$

ゆえに，ϕ は S_3 から G への群同型写像である

対称群の表示：同型写像 (2)

3 次の対称群 $S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ に対して，2 つの表示が得られた

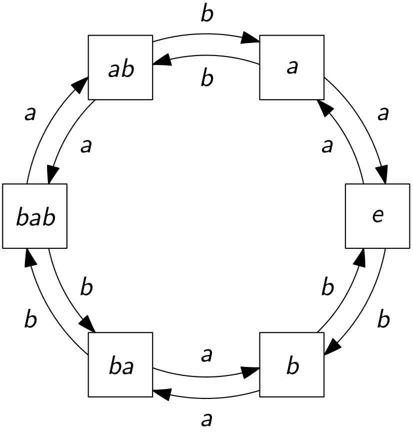
- $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$
- $H = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$

写像 $\psi\colon S_3 \to H$ として次を考える

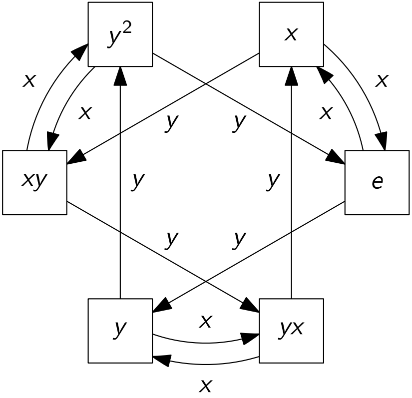
$$\begin{gathered}\psi(e) = e, \quad \psi((1\ 2)) = x, \quad \psi((1\ 3)) = yx, \\ \psi((2\ 3)) = xy, \quad \psi((1\ 2\ 3)) = y, \quad \psi((1\ 3\ 2)) = y^2\end{gathered}$$

この ψ は同型写像である．(証明は演習問題)

対称群の表示：ケーリー・グラフ



G のケーリー・グラフ



H のケーリー・グラフ

群準同型の性質：単位元

群 $(G, \circ)$ と群 $(H, \star)$，群準同型 $\phi\colon G \to H$

群準同型の性質 (1)

G の単位元 e_G，H の単位元 e_H に対して，

$$\phi(e_G) = e_H$$

証明：群準同型の定義より

$$\begin{aligned} \phi(e_G) &= \phi(e_G \circ e_G) = \phi(e_G) \star \phi(e_G) \\ \therefore \quad \phi(e_G) \star \phi(e_G)^{-1} &= \phi(e_G) \star \phi(e_G) \star \phi(e_G)^{-1} \\ \therefore \quad e_H &= \phi(e_G) \end{aligned}$$

$\square$

群準同型の性質：逆元

群 $(G, \circ)$ と群 $(H, \star)$，群準同型 $\phi\colon G \to H$

群準同型の性質 (2)

任意の $x \in G$ に対して

$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$$

証明：演習問題

目次

今日の目標

今日の目標

有限群に関する基礎的な用語が使えるようになる

- 群の定義，単位元，逆元
- 群の表示
- 群の同型性，準同型性

次回の予告

有限群の応用として，次を扱う

- 15 パズル
- タイリング

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次