

離散数理工学 第 4 回  
数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 11 月 1 日

最終更新：2016 年 11 月 2 日 14:13

## スケジュール 前半 (予定)

- |   |                      |         |
|---|----------------------|---------|
| 1 | 数え上げの基礎：二項係数と二項定理    | (10/4)  |
| ★ | 休講 (体育祭)             | (10/11) |
| 2 | 数え上げの基礎：漸化式の立て方      | (10/18) |
| 3 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) | (10/25) |
| 4 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) | (11/1)  |
| ★ | 休講 (出張)              | (11/8)  |
| 5 | 離散代数：対称群と置換群         | (11/15) |
| 6 | 離散代数：有限群             | (11/22) |
| 7 | 離散代数：有限群の応用          | (11/29) |

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |                           |         |
|----|---------------------------|---------|
| 8  | 離散確率論：確率の復習と確率不等式         | (12/6)  |
| ★  | 中間試験                      | (12/13) |
| 9  | 離散確率論：確率的離散システムの解析        | (12/20) |
| 10 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) | (1/10)  |
| 11 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) | (1/17)  |
| 12 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎)         | (1/24)  |
| 13 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)         | (1/31)  |
| ★  | 予備日                       | (2/7)   |
| ★  | 期末試験                      | (2/14?) |

注意：予定の変更もありうる

### 今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ より複雑な漸化式の解法
- ▶ カタラン数

## 目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ カタラン数：定義と導出
- ⑤ カタラン数：組合せ的解釈
- ⑥ 今日のまとめ

## 数列の母関数

## 母関数とは？

数列  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと ( $x$  は複素数)

## 仮定

この冪級数は収束する

- ▶ 特に、ある定数  $r > 0$  が存在して  $|x| < r$  のとき収束するとする
- ▶ つまり、 $|x| < r$  のとき、 $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は well-defined

収束するので、『微分積分学』、『解析学』、『複素関数論』の知識が使える

## 代表的な数列の母関数

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$	一般項 $a_n$	母関数 $A(x)$
$1, 1, 1, 1, \dots$	$1$	$\frac{1}{1-x}$
$1, 2, 4, 8, \dots$	$2^n$	$\frac{1}{1-2x}$
$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$	$\alpha^n$	$\frac{1}{1-\alpha x}$
$0, 1, 2, 3, \dots$	$n$	$\frac{x}{(1-x)^2}$

## 目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ カタラン数 : 定義と導出
- ⑤ カタラン数 : 組合せ的解釈
- ⑥ 今日のまとめ



$a_n =$  グラフ  $P_n$  における独立集合の総数 とする

### 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

- ▶ 特性方程式を用いた方法 (前回)
- ▶ 行列を用いた方法 (前回)
- ▶ 母関数を用いた方法 (今回)

## 母関数を用いた漸化式の解法

0  $a_0$  を便宜上定める

## 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

0  $a_0$  を便宜上定める

## 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$  とする

▶ このとき,  $a_2 = 3 = 2 + 1 = a_1 + a_0$

## 母関数を用いた漸化式の解法

0  $a_0$  を便宜上定める

## 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$  とする

- ▶ このとき,  $a_2 = 3 = 2 + 1 = a_1 + a_0$
- ▶ つまり, 上の漸化式は  $n \geq 2$  において成立

## 書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 2$  のとき

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  と書くことにする



## 母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$
$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

$$= x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + x^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

$$= x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + x^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$$

$$= xA(x) - x + x^2A(x)$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$A(x) - 1 - 2x = xA(x) - x + x^2A(x)$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - 2x &= xA(x) - x + x^2A(x) \\ \therefore (x^2 + x - 1)A(x) &= -x - 1 \end{aligned}$$



## 母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned}A(x) - 1 - 2x &= xA(x) - x + x^2A(x) \\ \therefore (x^2 + x - 1)A(x) &= -x - 1 \\ \therefore A(x) &= -\frac{x + 1}{x^2 + x - 1}\end{aligned}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned}A(x) - 1 - 2x &= xA(x) - x + x^2A(x) \\ \therefore (x^2 + x - 1)A(x) &= -x - 1 \\ \therefore A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1}\end{aligned}$$

$A(x)$  を  $x$  の有理関数として表現できた

## 母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた  $A(x)$  の級数展開を導く

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた  $A(x)$  の級数展開を導く

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1}$$

このとき、 $-\frac{x+1}{x^2+x-1}$  の部分分数分解が必要

- ▶ 「分母 = 0」を  $x$  について解くと、 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  となる
- ▶ したがって、ある定数  $a, b$  が存在して

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

- ▶ この  $a, b$  を定める (次のページ)

## 母関数を用いた漸化式の解法

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$
$$\therefore -(x+1) = a \left( x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) + b \left( x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\therefore -(x+1) = a \left( x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) + b \left( x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\therefore -x-1 = (a+b)x + \left( -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b \right)$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\therefore -(x+1) = a \left( x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) + b \left( x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\therefore -x-1 = (a+b)x + \left( -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b \right)$$

したがって、

$$-1 = a+b \quad \text{かつ}$$

$$-1 = -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b$$



## 母関数を用いた漸化式の解法

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\therefore -(x+1) = a \left( x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) + b \left( x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\therefore -x-1 = (a+b)x + \left( -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b \right)$$

したがって,

$$-1 = a+b \quad \text{かつ}$$

$$-1 = -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b$$

これを  $a, b$  に関して解くと

$$a = \frac{-5-\sqrt{5}}{10}, \quad b = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

したがって,

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$



## 母関数を用いた漸化式の解法

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
 &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}x}
 \end{aligned}$$



## 母関数を用いた漸化式の解法

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
 &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} \\
 &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n
 \end{aligned}$$

□

## 母関数を用いた漸化式の解法

したがって、

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
 &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}x} \\
 &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \right) x^n
 \end{aligned}$$

□

## 母関数を用いた漸化式の解法

したがって、

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
 &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} \\
 &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \right) x^n
 \end{aligned}$$

したがって、任意の  $n \geq 0$  に対して、

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$$

□

# 目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法**
- ④ カタラン数 : 定義と導出
- ⑤ カタラン数 : 組合せ的解釈
- ⑥ 今日のまとめ

## 例題 1

## 例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる



## 例題 1 : 直感を得る

## 例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶  $a_1 = 3$
- ▶  $a_2 = 4a_1 - 3^{2-1} = 4 \cdot 3 - 3^1 = 12 - 3 = 9$
- ▶  $a_3 = 4a_2 - 3^{3-1} = 4 \cdot 9 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
- ▶  $a_4 = 4a_3 - 3^{4-1} = 4 \cdot 27 - 3^3 = 108 - 27 = 81$
- ▶ ...

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 0

0  $a_0$  を便宜上定める

## 例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 0

0  $a_0$  を便宜上定める

## 例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$  とする

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 0

0  $a_0$  を便宜上定める

## 例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$  とする

▶ このとき,  $a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 0

0  $a_0$  を便宜上定める

## 例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$  とする

▶ このとき,  $a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$   
したがって, 考えている漸化式は次のように書き換えられる

## 例題 1 : 書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$a_n = 4a_{n-1} - 3^{n-1}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore a_n x^n &= 4a_{n-1} x^n - 3^{n-1} x^n \end{aligned}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore a_n x^n &= 4a_{n-1} x^n - 3^{n-1} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$



## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore a_n x^n &= 4a_{n-1} x^n - 3^{n-1} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$

母関数を  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  と書くことにする

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1\end{aligned}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1$$

$$\text{右辺} = \sum_{n \geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 3^n x^{n+1}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n \geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 3^n x^{n+1} \\ &= 4x \sum_{n \geq 0} a_n x^n - x \sum_{n \geq 0} (3x)^n \end{aligned}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n \geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 3^n x^{n+1} \\ &= 4x \sum_{n \geq 0} a_n x^n - x \sum_{n \geq 0} (3x)^n \\ &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \end{aligned}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$A(x) - 1 = 4xA(x) - \frac{x}{1-3x}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$A(x) - 1 = 4xA(x) - \frac{x}{1-3x}$$

$$\therefore (1-4x)A(x) = 1 - \frac{x}{1-3x}$$



## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$A(x) - 1 = 4xA(x) - \frac{x}{1-3x}$$

$$\therefore (1-4x)A(x) = 1 - \frac{x}{1-3x}$$

$$\therefore A(x) = \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned}
 A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\
 &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)}
 \end{aligned}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned}
 A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\
 &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\
 &= \frac{1-4x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-3x}
 \end{aligned}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned}
 A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\
 &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\
 &= \frac{1-4x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-3x}
 \end{aligned}$$

$A(x)$  を  $x$  の有理関数として表現できた

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた  $A(x)$  の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1 - 3x}$$



## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた  $A(x)$  の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$



## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた  $A(x)$  の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

したがって, 任意の  $n \geq 0$  に対して

$$a_n = 3^n$$



## 例題 2

## 例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる



## 例題 2 : 直感を得る

## 例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶  $a_0 = 1$
- ▶  $a_1 = 3a_0 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- ▶  $a_2 = 3a_1 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$
- ▶  $a_3 = 3a_2 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 19 + 2 \cdot 3 = 63$
- ▶  $a_4 = 3a_3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 63 + 2 \cdot 4 = 197$
- ▶ ...

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて, 級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore a_n x^n &= 3a_{n-1} x^n + 2n x^n \end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore a_n x^n &= 3a_{n-1} x^n + 2n x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore a_n x^n &= 3a_{n-1} x^n + 2n x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

母関数を  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  と書くことにする

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1\end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1$$

$$\text{右辺} = \sum_{n \geq 0} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} (2n + 2) x^{n+1}$$



## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{n \geq 0} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} (2n+2)x^{n+1} \\ &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\text{右辺} = 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + 2x \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + 2x \frac{1}{1-x} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned}
 \text{右辺} &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \\
 &= 3xA(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + 2x \frac{1}{1-x} \\
 &= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \\
 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$A(x) - 1 = 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned}A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned}A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}\end{aligned}$$



## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned}A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}\end{aligned}$$

$A(x)$  を  $x$  の有理関数として表現できた

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた  $A(x)$  の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた  $A(x)$  の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

部分分数分解を試みる, つまり

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

となる  $a, b, c$  が一意に存在するので, それを定める (次のページ)

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

∴

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$
$$\therefore 2x = a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned}\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2 \\ &= a(1-4x+3x^2) + b(x-3x^2) + c(1-2x+x^2)\end{aligned}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned}\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2 \\ &= a(1-4x+3x^2) + b(x-3x^2) + c(1-2x+x^2) \\ &= (3a-3b+c)x^2 + (-4a+b-2c)x + (a+c)\end{aligned}$$

## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2 \\ &= a(1-4x+3x^2) + b(x-3x^2) + c(1-2x+x^2) \\ &= (3a-3b+c)x^2 + (-4a+b-2c)x + (a+c) \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} 0 &= 3a - 3b + c && \text{かつ,} \\ 2 &= -4a + b - 2c && \text{かつ,} \\ 0 &= a + c \end{aligned}$$



## 例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2 \\ &= a(1-4x+3x^2) + b(x-3x^2) + c(1-2x+x^2) \\ &= (3a-3b+c)x^2 + (-4a+b-2c)x + (a+c) \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} 0 &= 3a - 3b + c && \text{かつ,} \\ 2 &= -4a + b - 2c && \text{かつ,} \\ 0 &= a + c \end{aligned}$$

この方程式を解くと、次が得られる

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = -1, \quad c = \frac{3}{2}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
 &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
 &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nx^n
 \end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
 &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} - n \right) x^n
 \end{aligned}$$

## 例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
 &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} - n \right) x^n
 \end{aligned}$$

したがって, 任意の  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^n - n - \frac{3}{2}$  □

# 目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ カタラン数：定義と導出**
- ⑤ カタラン数：組合せ的解釈
- ⑥ 今日のまとめ

## Eugène C. Catalan



カタラン  
(1814–1894)

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Catalan.html>



## カタラン数

## カタラン数とは？

次の漸化式で定められる数  $C_n$  を第  $n$  **カタラン数** と呼ぶ

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

- ▶  $C_1 = C_0 C_0 = 1 \cdot 1 = 1$
- ▶  $C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$
- ▶  $C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- ▶  $C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$

目標：第  $n$  カタラン数を表す式を母関数による方法で導く

## カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n x^n = \left( \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n x^n = \left( \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1})$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n x^n = \left( \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1})$$

したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n x^n = \left( \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1})$$

したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)$$

母関数を  $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$  と書くことにする

## カタラン数：母関数による解法 Step 2

2 各辺を  $C(x)$  によって表す

$$\text{左辺} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 = C(x) - 1$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\ &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \end{aligned}$$



## カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned}
 \text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\
 &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
 &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j}
 \end{aligned}$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned}
 \text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\
 &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
 &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\
 &= x \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j
 \end{aligned}$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j \\
&= x \left( \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j \right)
\end{aligned}$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j \\
&= x \left( \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j \right) = x C(x)^2
\end{aligned}$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 3

3 得られた式を  $C(x)$  に関して解く

$$C(x) - 1 = xC(x)^2$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 3

3 得られた式を  $C(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned}C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\ xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0\end{aligned}$$

## カタラン数：母関数による解法 Step 3

3 得られた式を  $C(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned}C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0 \\C(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}\end{aligned}$$

どちらが正しいのか？

## カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = C_0 = 1$  なので、

▶  $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$  だとすると、

▶  $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$  だとすると、



## カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = C_0 = 1$  なので、

▶  $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$  だとすると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty$$

となり、合わない

▶  $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$  だとすると、

## カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = C_0 = 1$  なので、

▶  $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$  だとすると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty$$

となり、合わない

▶  $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$  だとすると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 4x)}{2x(1 + \sqrt{1 - 4x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}} = 1$$

となり、合う

## カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = C_0 = 1$  なので、

▶  $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$  だとすると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty$$

となり、合わない

▶  $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$  だとすると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 4x)}{2x(1 + \sqrt{1 - 4x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}} = 1$$

となり、合う

したがって、 $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$  である

## 母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3 得られた  $C(x)$  の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3 得られた  $C(x)$  の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$
$$xC(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

## 母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3 得られた  $C(x)$  の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

$$xC(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

ここで、 $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$  なので、

$$xC(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$$

つまり、 $xC(x)$  は次の数列  $\{a_n\}$  の母関数

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ C_{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

まずは、 $xC(x)$  の級数展開を導く

## 母関数を用いた漸化式の解法

補題 (テイラー展開を使うことで証明できる (証明は省略))

任意の実数  $\alpha$  に対して,  $|z| < 1$  であるとき,

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

ただし,

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

すなわち,  $\alpha = 1/2$ ,  $z = -4x$  とすれば, 次が得られる

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

## 母関数を用いた漸化式の解法

$$\begin{aligned}
\therefore xC(x) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( 1 - \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n \right) x^n
\end{aligned}$$

したがって、

$$\text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して } C_{n-1} = -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n$$



## 整理

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n &= -\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-4)^n \\
&= -\frac{1}{2} \frac{-2(-2+4)(-2+8)\cdots(-2+4n-4)}{n!} \\
&= \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-6)}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(n-1)!} \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

## まとめ

以上の議論より、任意の  $n \geq 1$  に対して、

$$C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

つまり、次の公式が得られる

## カタラン数の公式

任意の  $n \geq 0$  に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

## カタラン数の上界と下界

## カタラン数の公式

任意の  $n \geq 0$  に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

## 二項係数：簡単な評価（復習）

任意の自然数  $a \geq 1$  と任意の自然数  $b \geq 1$  に対して、 $a \geq b$  であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

したがって、カタラン数に対する以下の上界と下界が得られる

$$\frac{2^n}{n+1} \leq C_n \leq \frac{(2e)^n}{n+1}$$

∴ カタラン数は  $n$  に関して指数関数的に増加する

# 目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ カタラン数：定義と導出
- ⑤ カタラン数：組合せ的解釈**
- ⑥ 今日のまとめ

## カタラン数の組合せ的解釈



リチャード・スタンレイ

- ▶ MIT 数学科の教授
- ▶ 組合せ論の研究者 (大家)
- ▶ カタラン数の組合せ的解釈を  
214 個収集した

ここでは2つだけ紹介

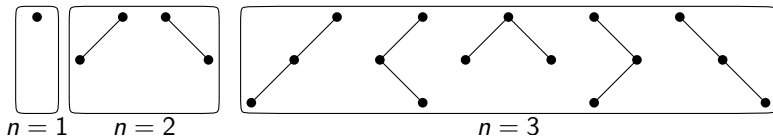
[http://en.wikipedia.org/wiki/Richard\\_P.\\_Stanley](http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_P._Stanley)

## カタラン数の組合せ的解釈：二分木

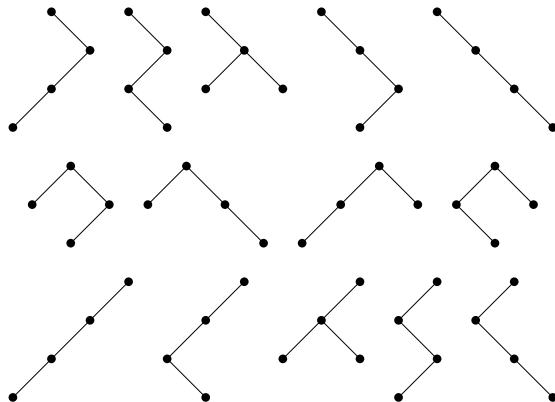
## 二分木とは？

頂点数  $n$  の二分木とは、次のように再帰的に定義されるグラフ

- ▶ 頂点数 0 の二分木は空グラフ (頂点を持たないグラフ)
- ▶ 頂点数 1 の二分木は根と呼ばれる 1 頂点から成るグラフ
- ▶ 頂点数  $n \geq 2$  の二分木は、根  $r$  と呼ばれる 1 頂点と、左部分木、右部分木と呼ばれる 2 つの二分木から成り、頂点数の総和は  $n$  であり、 $r$  と左部分木の根、 $r$  と右部分木の根を辺で結んだもの



## カタラン数の組合せ的解釈：二分木

 $n = 4$  のとき

## 目標

頂点数  $n$  の二分木の総数  $T_n$  の満たす漸化式を導く

## カタラン数の組合せ的解釈：二分木の総数が満たす漸化式

 $T_n$  が満たす漸化式

$$T_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} T_i T_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明： $n \geq 1$  のとき、

- ▶ 左部分木の頂点数 + 右部分木の頂点数 =  $n - 1$
- ▶ 左部分木の頂点数を  $i$  とすると、 $i \in \{0, \dots, n - 1\}$  で、右部分木の頂点数は  $n - i - 1$
- ▶ このとき、左部分木は  $T_i$  通り、右部分木は  $T_{n-i-1}$  通りの可能性 □

## 結論

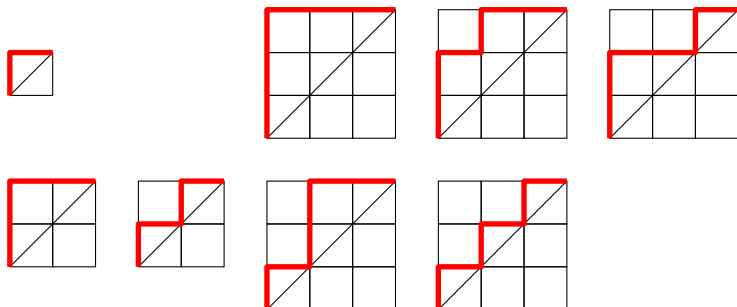
頂点数  $n$  の二分木の総数は第  $n$  カタラン数  $C_n$  と等しい



## カタラン数の組合せ的解釈：ディック道

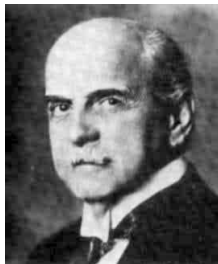
ディック道 (Dyck path) とは？

ディック道とは、 $(0,0)$  から  $(n,n)$  へ至る格子道で、直線  $y = x$  の下側を通らないもの



$D_n = (0,0)$  から  $(n,n)$  へ至るディック道の総数

## Walther von Dyck



ディック  
(1856–1934)

[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Von\\_Dyck.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Von_Dyck.html)

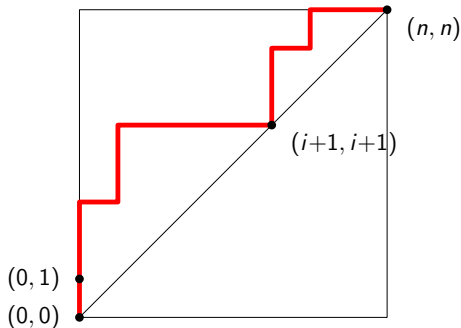
## カタラン数の組合せ的解釈：ディック道の総数が満たす漸化式

## ディック道の総数が満たす漸化式

$$D_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} D_i D_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明： $n \geq 1$  のとき

- ▶ 「はじめの一步」は必ず「上」
- ▶  $(0,0)$  の他に、はじめて直線  $y = x$  上に来るときを考える
- ▶ その点を  $(i+1, i+1)$  とする ( $i \in \{0, \dots, n-1\}$ )



## カタラン数の組合せ的解釈：ディック道の総数が満たす漸化式

証明 (続き) :

- ▶  $(i+1, i+1)$  に来る直前に、必ず  $(i, i+1)$  にいる
- ▶ つまり、考えているディック道は以下の形をしている

1  $(0, 0)$  から  $(0, 1)$  に至る

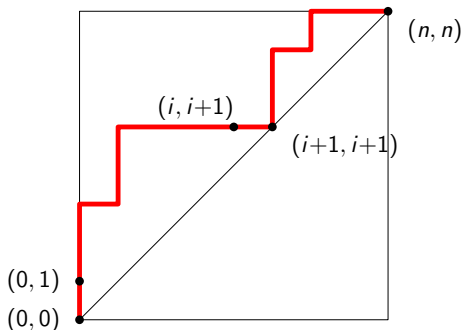
(← 1 通り)

2  $(0, 1)$  から  $(i, i+1)$  に至る

3  $(i, i+1)$  から  $(i+1, i+1)$  に至る

(← 1 通り)

4  $(i+1, i+1)$  から  $(n, n)$  に至る



## カタラン数の組合せ的解釈：ディック道の総数が満たす漸化式

証明 (続き) :

4  $(i+1, i+1)$  から  $(n, n)$  に至る  
この間に  $y = x$  より下に行かないので,

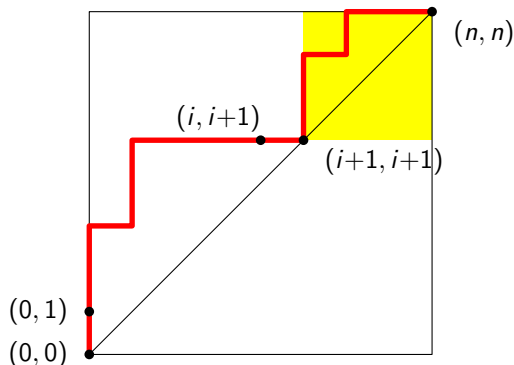
このような  
経路の総数

=

$(0, 0)$  から  $(n-i-1, n-i-1)$  に至る  
ディック道の総数

=

$D_{n-i-1}$

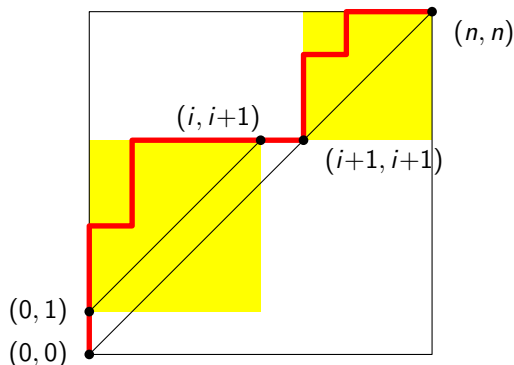


## カタラン数の組合せ的解釈：ディック道の総数が満たす漸化式

証明 (続き) :

2  $(0, 1)$  から  $(i, i+1)$  に至る  
この間に  $y = x$  上に来ないので,

$$\boxed{\text{このような経路の総数}} = \boxed{(0, 0) \text{ から } (i, i) \text{ に至るディック道の総数}} = \boxed{D_i}$$



## カタラン数の組合せ的解釈：ディック道の総数が満たす漸化式

## 証明 (続き) :

- ▶  $(i+1, i+1)$  に来る直前に、必ず  $(i, i+1)$  にいる
- ▶ つまり、考えているディック道は以下の形をしている
  - 1  $(0, 0)$  から  $(0, 1)$  に至る (← 1 通り)
  - 2  $(0, 1)$  から  $(i, i+1)$  に至る (←  $D_i$  通り)
  - 3  $(i, i+1)$  から  $(i+1, i+1)$  に至る (← 1 通り)
  - 4  $(i+1, i+1)$  から  $(n, n)$  に至る (←  $D_{n-i-1}$  通り)

したがって、
$$D_n = \sum_{i=0}^{n-1} D_i D_{n-i-1}$$

□

## 結論

$(0, 0)$  から  $(n, n)$  へ至るディック道の総数は第  $n$  カタラン数  $C_n$  に等しい

# 目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ カタラン数：定義と導出
- ⑤ カタラン数：組合せ的解釈
- ⑥ 今日のまとめ



## 今日の目標

## 今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ カタラン数

## 注意

今日扱ったのは、母関数に関する初歩

- ▶ 母関数にまつわる理論は膨大
- ▶ 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長

ここでは、『複素関数論』が重要な役割を果たす

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK

## 目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ カタラン数：定義と導出
- ⑤ カタラン数：組合せ的解釈
- ⑥ 今日のまとめ