

離散数理工学 第 3 回  
数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎)

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 10 月 25 日

最終更新：2016 年 10 月 25 日 10:59

## スケジュール 前半 (予定)

- |   |                      |         |
|---|----------------------|---------|
| 1 | 数え上げの基礎：二項係数と二項定理    | (10/4)  |
| ★ | 休講 (体育祭)             | (10/11) |
| 2 | 数え上げの基礎：漸化式の立て方      | (10/18) |
| 3 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) | (10/25) |
| 4 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) | (11/1)  |
| ★ | 休講 (出張)              | (11/8)  |
| 5 | 離散代数：対称群と置換群         | (11/15) |
| 6 | 離散代数：有限群             | (11/22) |
| 7 | 離散代数：有限群の応用          | (11/29) |

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |                           |         |
|----|---------------------------|---------|
| 8  | 離散確率論：確率の復習と確率不等式         | (12/6)  |
| ★  | 中間試験                      | (12/13) |
| 9  | 離散確率論：確率的離散システムの解析        | (12/20) |
| 10 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) | (1/10)  |
| 11 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) | (1/17)  |
| 12 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎)         | (1/24)  |
| 13 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)         | (1/31)  |
| ★  | 予備日                       | (2/7)   |
| ★  | 期末試験                      | (2/14?) |

注意：予定の変更もありうる

### 今日の目標

- 1 漸化式を解けるようになる
  - ▶ 線形漸化式の解法
  - ▶ 上界の導出法
- 2 数列の母関数が導出できる

## 目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

$a_n =$  グラフ  $P_n$  における独立集合の総数 とする

### 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

## 線形漸化式の解き方 (1)

1  $a_n$  を  $\lambda^n$  で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

↓

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

これを考えている漸化式の**特性方程式**と呼ぶ

## 線形漸化式の解き方 (1)

1  $a_n$  を  $\lambda^n$  で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

↓

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

すなわち,

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

これを考えている漸化式の**特性方程式**と呼ぶ



## 線形漸化式の解き方 (1)

## 2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

## 線形漸化式の解き方 (1)

## 2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

## 線形漸化式の解き方 (1)

## 2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

## 線形漸化式の解き方 (1)

## 2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

この2つの解を  $\lambda_1, \lambda_2$  と書くとする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

## 線形漸化式の解き方 (1)

## 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり,  $a_1 = 2$  と  $a_2 = 3$  であることを忘れれば,  
 $a_n = \lambda_1^n$  と  $a_n = \lambda_2^n$  はこの漸化式の解である

## 線形漸化式の解き方 (1)

## 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり、 $a_1 = 2$  と  $a_2 = 3$  であることを忘れれば、 $a_n = \lambda_1^n$  と  $a_n = \lambda_2^n$  はこの漸化式の解である
- ▶ このとき、線形結合  $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$  もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば、} \quad a_n &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \lambda_2^{n-1}) + (c_1 \lambda_1^{n-2} + c_2 \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 (\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2 (\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \end{aligned}$$

## 線形漸化式の解き方 (1)

## 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり、 $a_1 = 2$  と  $a_2 = 3$  であることを忘れれば、 $a_n = \lambda_1^n$  と  $a_n = \lambda_2^n$  はこの漸化式の解である
- ▶ このとき、線形結合  $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$  もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば、} \quad a_n &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \lambda_2^{n-1}) + (c_1 \lambda_1^{n-2} + c_2 \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 (\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2 (\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \end{aligned}$$

- ▶  $a_1 = 2$  と  $a_2 = 3$  を思い出すと、 $c_1, c_2$  が定まる

## 線形漸化式の解き方 (1)

3  $\lambda_1^n$  と  $\lambda_2^n$  の線形結合を作る

▶  $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$  とする



## 線形漸化式の解き方 (1)

3  $\lambda_1^n$  と  $\lambda_2^n$  の線形結合を作る

- ▶  $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$  とする
- ▶  $a_1 = 2, a_2 = 3$  なので,

$$2 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2,$$

$$3 = c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2$$

## 線形漸化式の解き方 (1)

3  $\lambda_1^n$  と  $\lambda_2^n$  の線形結合を作る

- ▶  $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$  とする
- ▶  $a_1 = 2, a_2 = 3$  なので,

$$2 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2,$$

$$3 = c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2$$

- ▶  $c_1, c_2$  を変数として, これを解くと

$$c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

## 線形漸化式の解き方 (1)

## 4 整理する

$$\blacktriangleright c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{2\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 3}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$$

$$\blacktriangleright c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-2\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 3}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$$

## 線形漸化式の解き方 (1)

## 4 整理する

$$\blacktriangleright c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{2\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 3}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$$

$$\blacktriangleright c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-2\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 3}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$$

したがって、任意の自然数  $n \geq 1$  に対して

$$a_n = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

となる

$a_n =$  グラフ  $P_n$  における独立集合の総数 とする

### 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを別の方法を用いて解いてみる

## 線形漸化式の解き方 (2)

## 1 行列を用いて書き換える

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

↓

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 3 \text{ のとき})$$

## 線形漸化式の解き方 (2) : 一般論

次のように線形漸化式を書けたとする

$$x_1 = c, \quad x_n = Ax_{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

$A$  は正方行列,  $x_1, x_2, x_3, \dots$  と  $c$  はベクトル

▶ このとき,

$$x_n = A^{n-1}x_1 = A^{n-1}c$$

▶ したがって,  $A^{n-1}$  が計算できればよい

## 線形漸化式の解き方 (2)

## 2 行列の累乗を計算する

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とする}$$

- ▶  $A$  の固有値と固有ベクトルを計算する
- ▶  $A$  の特性方程式  $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1 = 0$$

- ▶ これを解くと,  $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- ▶ これが  $A$  の固有値で,  $\lambda_1, \lambda_2$  と書くことにする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



## 線形漸化式の解き方 (2)

$\lambda_1$  に対する  $A$  の固有ベクトルを  $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とすると

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって,  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$  は  $\lambda_1$  に対する  $A$  の固有ベクトル

## 線形漸化式の解き方 (2)

$\lambda_2$  に対する  $A$  の固有ベクトルを  $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とすると

$$\begin{aligned} Av_2 &= \lambda_2 v_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_2 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$  は  $\lambda_2$  に対する  $A$  の固有ベクトル

## 線形漸化式の解き方 (2)

これによって対角化： $U = (v_1 \ v_2)$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  とすると

$$AU = U\Lambda, \quad \text{すなわち, } A = U\Lambda U^{-1}$$

$$\blacktriangleright A^n = (U\Lambda U^{-1})^n = U\Lambda^n U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$\blacktriangleright U = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ なので, } U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5+\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix}$$

## 線形漸化式の解き方 (2)

したがって

$$\begin{aligned}
 A^n &= \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5+\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{(5-\sqrt{5})\lambda_1^n + (5+\sqrt{5})\lambda_2^n}{10} & \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^n + \sqrt{5}\lambda_2^n}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^n + \sqrt{5}\lambda_2^n}{5} & \frac{(5+\sqrt{5})\lambda_1^n + (5-\sqrt{5})\lambda_2^n}{10} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 線形漸化式の解き方 (2)

## 3 まとめる

 $n \geq 3$  のとき,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(5-\sqrt{5})\lambda_1^{n-2} + (5+\sqrt{5})\lambda_2^{n-2}}{10} & \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^{n-2} + \sqrt{5}\lambda_2^{n-2}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^{n-2} + \sqrt{5}\lambda_2^{n-2}}{5} & \frac{(5+\sqrt{5})\lambda_1^{n-2} + (5-\sqrt{5})\lambda_2^{n-2}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{15-7\sqrt{5}}{10} \lambda_1^{n-2} + \frac{15+7\sqrt{5}}{10} \lambda_2^{n-2} \\ \frac{5-2\sqrt{5}}{5} \lambda_1^{n-2} + \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \lambda_1^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \lambda_2^n \\ \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \lambda_1^{n-1} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## 線形漸化式の解き方 (2)

したがって、 $n \geq 3$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \lambda_1^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \lambda_2^n \\ &= \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

となる ( $n = 1, 2$  のときも、この式は正しい)



次のように定義

- ▶  $b_n =$  グラフ  $G_n$  における独立集合の総数
- ▶  $c_n =$  グラフ  $H_n$  における独立集合の総数

### 漸化式

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$
$$c_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

## 線形漸化式の解き方 (2)

## 1 行列を用いて書き換える

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

↓

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

後は同様に、計算する



## 線形漸化式の解き方 (2)

計算すると、次が得られる (はずである) : 自然数  $n \geq 1$  に対して

$$b_n = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{2})^n + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{2})^n$$
$$c_n = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{2})^n + \frac{2 + \sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^n$$

# 目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

## 単純な再帰アルゴリズム

## アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

## 出力される a の数に対する漸化式

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここでは、簡単な上界を求めてみる  
(計算量の解析において、欲しいものは上界 (で十分なこと) が多い)

## 線形漸化式から上界を導く

**1** 定数項を取り除く

- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1$$



## 線形漸化式から上界を導く

## 1 定数項を取り除く

- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$



## 線形漸化式から上界を導く

## 1 定数項を取り除く

- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ▶ ここで,  $f'_n = f_n + 1$  と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

## 線形漸化式から上界を導く

## 1 定数項を取り除く

- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ▶ ここで,  $f'_n = f_n + 1$  と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ 帰結:  $f_n$  と  $f'_n$  のオーダーは同じ

## 線形漸化式から上界を導く

## 1 定数項を取り除く

- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ▶ ここで,  $f'_n = f_n + 1$  と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ 帰結:  $f_n$  と  $f'_n$  のオーダーは同じ
- ▶ 注意: ここから  $f'_n$  を厳密に求めて,  $f_n$  を求めてもよいが, ここではそうしない



## 線形漸化式から上界を導く

## 2 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

▶ 特性方程式： $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$

## 線形漸化式から上界を導く

## 2 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ 特性方程式： $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$
- ▶ この方程式はただ1つ正の解を持ち、それは

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である

ただ1つ正の解を持つことは、  
例えば「デカルトの符号規則」から分かる

## 線形漸化式から上界を導く

## 3 数学的帰納法で不等式を証明

ここで、次を証明する

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して、 $f'_n \leq 2\lambda^n$ 証明 :  $n = 1$  のとき

- ▶  $f'_1 = 2$
- ▶  $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって、 $f'_1 < 2\lambda^1$  となる

## 線形漸化式から上界を導く

## 3 数学的帰納法で不等式を証明

ここで、次を証明する

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して、 $f'_n \leq 2\lambda^n$ 証明 :  $n = 1$  のとき

- ▶  $f'_1 = 2$
- ▶  $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって、 $f'_1 < 2\lambda^1$  となる

 $n = 2$  のとき

- ▶  $f'_2 = 2$
- ▶  $2\lambda^2 > 2\lambda = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって、 $f'_2 < 2\lambda^2$  となる

## 線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数  $k \geq 2$  が  $f'_k \leq 2\lambda^k$  と  $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$  を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$f'_{k+1} = f'_k + f'_{k-1} \quad (f'_k \text{ の定義})$$

## 線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数  $k \geq 2$  が  $f'_k \leq 2\lambda^k$  と  $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$  を満たすと仮定

## 証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

## 線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数  $k \geq 2$  が  $f'_k \leq 2\lambda^k$  と  $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$  を満たすと仮定

## 証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \end{aligned}$$

## 線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数  $k \geq 2$  が  $f'_k \leq 2\lambda^k$  と  $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$  を満たすと仮定

## 証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \end{aligned}$$



## 線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数  $k \geq 2$  が  $f'_k \leq 2\lambda^k$  と  $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$  を満たすと仮定

## 証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\ &= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理}) \end{aligned}$$

## 線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数  $k \geq 2$  が  $f'_k \leq 2\lambda^k$  と  $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$  を満たすと仮定

## 証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\ &= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理}) \end{aligned}$$

## 帰結

$$f_n = O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

## オーダー記法：復習

## O 記法の定義

非負の値を取る数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  と  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  に対して,

$$a_n = O(b_n)$$

であるとは,  
ある自然数  $n_0$  と正の実数  $C$  が存在して,  
任意の自然数  $n \geq n_0$  に対して

$$a_n \leq Cb_n$$

が成り立つこと

$a_n = O(b_n)$  であることの直感的な意味

数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  の増加率は数列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  の増加率以下である

## ユークリッドのアルゴリズムの計算量

## 漸化式

$$g_n \begin{cases} = 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

まずは  $g_n$  がどのように増加するか知る必要があるので、それを探る

- ▶ 「 $\leq$ 」を「 $=$ 」に置き換える
- ▶  $n = 2^k$  の場合だけを考える ( $n = 2^k$  のとき,  $\lfloor n/2 \rfloor = 2^{k-1}$ )

注:  $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$

## ユークリッドのアルゴリズムの計算量：探る

$g'_k = g_{2^k}$  と置き、「 $\leq$ 」を「 $=$ 」に置き換えると、次の漸化式が得られる

$$g'_k = \begin{cases} 3 & k = 0 \text{ のとき} \\ 2 + g'_{k-1} & k \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

- ▶ これは等差数列
  - ▶ 任意の自然数  $k \geq 0$  に対して、 $g'_k = 2k + 3$
- つまり、 $g_n$  はだいたい  $2 \log_2 n$

## 証明すること

## 今から証明すること

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して,  $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

## 帰結

$$g_n = O(\log n)$$

証明 :  $n = 1$  のとき

- ▶ 漸化式より,  $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$
- ▶  $3 + 2 \log_2 n = 3 + 2 \log_2 1 = 3 + 0 = 3$
- ▶ したがって, 左辺  $\leq$  右辺

## 証明すること

## 今から証明すること

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して,  $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き : 自然数  $k$  に対して,  
任意の自然数  $l \leq k$  に対して  $g_l \leq 3 + 2 \log_2 l$  が成り立つと仮定

## 証明すべきこと

$$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$$

$$g_{k+1} \leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \quad (g_n \text{ の定義})$$

## 証明すること

## 今から証明すること

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して,  $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き : 自然数  $k$  に対して,  
任意の自然数  $l \leq k$  に対して  $g_l \leq 3 + 2 \log_2 l$  が成り立つと仮定

## 証明すべきこと

$$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$



## 証明すること

## 今から証明すること

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して,  $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き : 自然数  $k$  に対して,  
任意の自然数  $l \leq k$  に対して  $g_l \leq 3 + 2 \log_2 l$  が成り立つと仮定

## 証明すべきこと

$$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 ((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \end{aligned}$$

## 証明すること

## 今から証明すること

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して,  $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き : 自然数  $k$  に対して,  
任意の自然数  $l \leq k$  に対して  $g_l \leq 3 + 2 \log_2 l$  が成り立つと仮定

## 証明すべきこと

$$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 ((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\ &= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理}) \end{aligned}$$

## 証明すること

## 今から証明すること

任意の自然数  $n \geq 1$  に対して,  $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き : 自然数  $k$  に対して,  
任意の自然数  $l \leq k$  に対して  $g_l \leq 3 + 2 \log_2 l$  が成り立つと仮定

## 証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$

$$\begin{aligned}
 g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 ((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\
 &= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理}) \\
 &= 3 + 2 \log_2(k+1) && (\text{整理})
 \end{aligned}$$



## 目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

## 数列の母関数

## 母関数とは？

数列  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと ( $x$  は複素数)

デジタル信号処理で「 $z$ 変換」と呼んでいるものと同じ

## 仮定

この冪級数は収束する

▶ 特に、ある定数  $r > 0$  が存在して  $|x| < r$  のとき収束するとする

▶ つまり、 $|x| < r$  のとき、 $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は well-defined

収束するので、『微分積分学』、『解析学』、『複素関数論』の知識が使える

## 例 1

数列  $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 1$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

## 例 1

数列  $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 1$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

## 例 1

数列  $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 1$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列  $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 2^n$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$



## 例 1

数列  $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 1$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列  $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 2^n$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

## 例 1

数列  $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 1$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列  $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 2^n$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

## 例 1

数列  $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して、 $a_n = 1$  とすると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列  $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して、 $a_n = 2^n$  とすると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

一般に、 $a_n = \alpha^n$  で定められる数列の母関数は  $\frac{1}{1-\alpha x}$

## 例 2

数列  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = n$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n =$$

## 例 2

数列  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = n$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n$$

## 例 2

数列  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して、 $a_n = n$  とすると、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n\end{aligned}$$

## 例 2

数列  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して、 $a_n = n$  とすると、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

## 例 2

数列  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して、 $a_n = n$  とすると、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$



## 例 3

数列  $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して、 $a_n = 3n + 1$  とすると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n$$

## 例 3

数列  $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 3n + 1$  とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

## 例 3

数列  $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 3n + 1$  とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

## 例 3

数列  $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 3n + 1$  とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

## 例 3

数列  $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$  の母関数は？

任意の自然数  $n \geq 0$  に対して,  $a_n = 3n + 1$  とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x+1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

## 目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

## 今日の目標

## 今日の目標

- 1 漸化式を解けるようになる
  - ▶ 線形漸化式の解法
  - ▶ 上界の導出法
- 2 数列の母関数が導出できる

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK



## 目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ