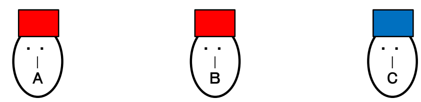
ある帽子ゲームとその変種について

岡本 吉央（電気通信大学）

帽子ゲーム Ebert '98

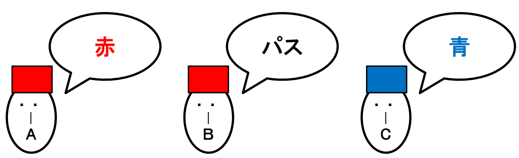
- n 人のプレイヤー
- 一様ランダム独立に赤か青の帽子を被せられる
- 自分の帽子は見えない，他人の帽子は見える



Peter Winkler "Mathematical Puzzles" ('04) p. 120 でも紹介

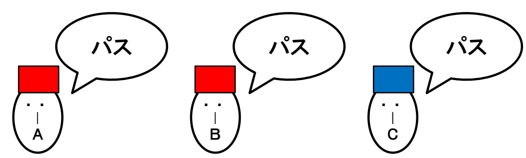
帽子ゲーム Ebert '98

- 全員が一斉に次のどれかを言う
  - 「赤」，「青」，「パス」



帽子ゲーム Ebert '98

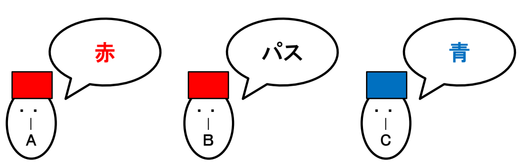
- プレイヤーの敗北条件：以下のいずれか
  - 誰かが自分の帽子と違う色を言う
  - 全員が「パス」を言う



プレイヤーの負け

帽子ゲーム Ebert '98

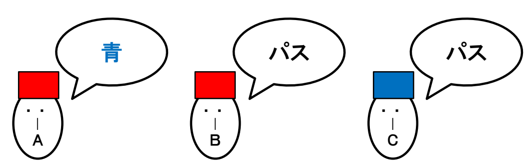
- プレイヤーの敗北条件：以下のいずれか
  - 誰かが自分の帽子と違う色を言う
  - 全員が「パス」を言う



プレイヤーの勝ち

帽子ゲーム Ebert '98

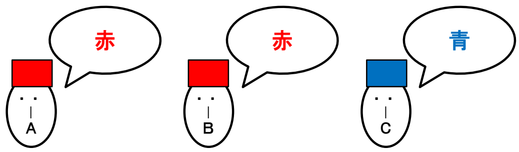
- プレイヤーの敗北条件：以下のいずれか
  - 誰かが自分の帽子と違う色を言う
  - 全員が「パス」を言う



プレイヤーの負け

帽子ゲーム Ebert '98

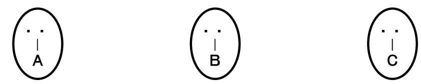
- プレイヤーの敗北条件：以下のいずれか
  - 誰かが自分の帽子と違う色を言う
  - 全員が「パス」を言う



プレイヤーの勝ち

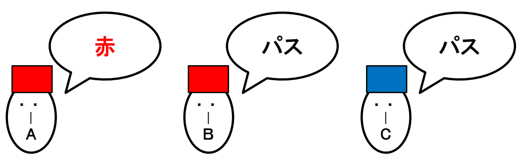
帽子ゲーム Ebert '98

- プレイヤーの目標
  - 勝利確率をできるだけ大きくするような戦略を前もって考えて，それを実行する
  - 達成できる最大確率はいくつか？
  - ランダムネス：帽子の被せられ方



簡単な戦略：盲目白紙委任

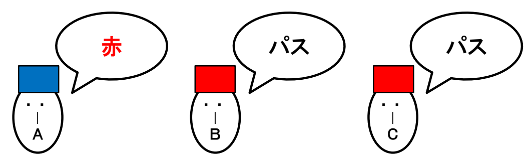
- 決まった1人 (A) が必ず「赤」と言う
- 他の人は必ず「パス」と言う



プレイヤーの勝ち

簡単な戦略：盲目白紙委任

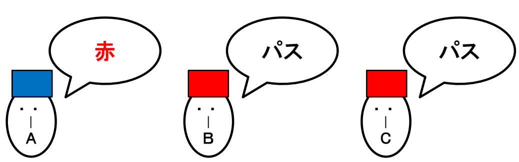
- 決まった1人 (A) が必ず「赤」と言う
- 他の人は必ず「パス」と言う



プレイヤーの負け

簡単な戦略：盲目白紙委任

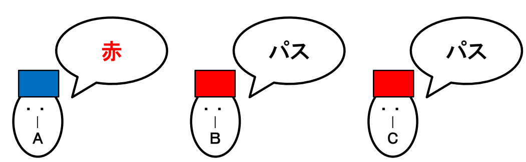
- プレイヤーの勝利確率は？
  - ＝ Aに赤が被せられる確率
  - ＝ 1/2



プレイヤーの負け

疑問

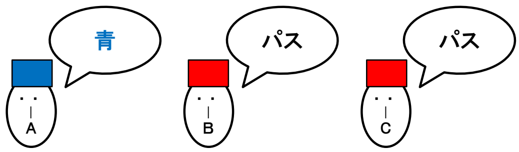
- プレイヤーの勝利確率を1/2より大きくする戦略はあるのか？



プレイヤーの負け

賢い戦略：3人の場合

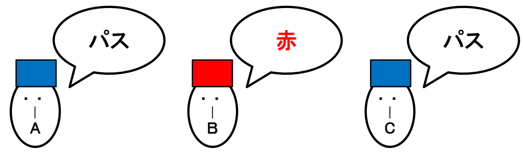
- 他の2人の帽子がともに「赤」 ⇒ 自分は「青」と言う
- 他の2人の帽子がともに「青」 ⇒ 自分は「赤」と言う
- 他の2人の帽子が異なる　⇒ 自分は「パス」と言う



プレイヤーの勝ち

賢い戦略：3人の場合

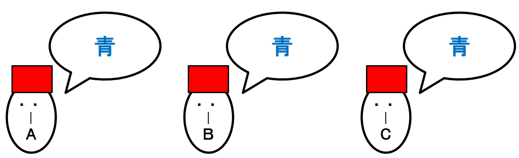
- 他の2人の帽子がともに「赤」 ⇒ 自分は「青」と言う
- 他の2人の帽子がともに「青」 ⇒ 自分は「赤」と言う
- 他の2人の帽子が異なる　⇒ 自分は「パス」と言う



プレイヤーの勝ち

賢い戦略：3人の場合

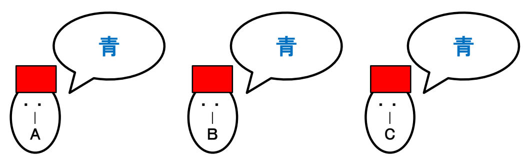
- 他の2人の帽子がともに「赤」 ⇒ 自分は「青」と言う
- 他の2人の帽子がともに「青」 ⇒ 自分は「赤」と言う
- 他の2人の帽子が異なる　⇒ 自分は「パス」と言う



プレイヤーの負け

賢い戦略：3人の場合

- プレイヤーの勝利確率は？
  - ＝ 全員の帽子の色が同じではない確率
  - ＝ 3/4



プレイヤーの負け

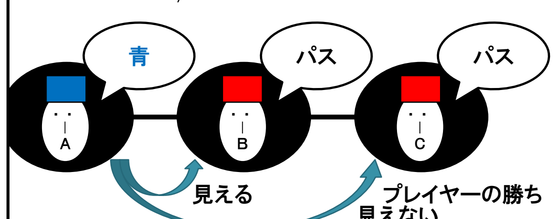
Ebert ('98) が証明したこと (抜粋)

- n = 3 のとき，プレイヤーの最大勝利確率は 3/4
- n → ∞ のとき，プレイヤーの最大勝利確率 → 1

n	2	3	4	5	6	7	8	9
最大確率	1/2	3/4	3/4	9/16	5/8	7/8	7/8	225/256

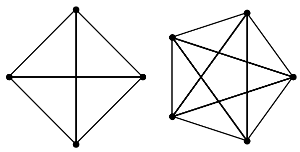
グラフ版 (Krzywkowski '10)

- 他人の帽子がすべて見えるわけではない
- 見える帽子が「グラフ」で表現されている
- 他のルール/プレイヤーの目的は同じ



元の帽子ゲームは完全グラフ上

- 他のすべてのプレイヤーが見える状況
  ＝ すべての頂点間に辺があるグラフ (完全グラフ)



K_4　　K_5

- K_n = 頂点数 n の完全グラフ

グラフと最大勝利確率

- グラフ G に対して

> h(G) = G 上の帽子ゲームにおける
> プレイヤーの最大勝利確率

- 先ほどの表の内容 (の一部) の言い換え：

$h(K_2) = 1/2$,　$h(K_3) = 3/4$,　$h(K_7) = 7/8$, …

Feige '10 の予想

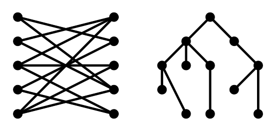
予想 (Feige '10) (の弱い形)

> GがK_3を含まない　⇔　h(G) = 1/2

注
- 「 h(G) ≧ 1/2 」は すべてのグラフGに対して成立 (盲目白紙委任戦略による)
- 「 h(G) ≦ 2/3 」は K_3を含まないすべてのGで成立 (Feige '10)

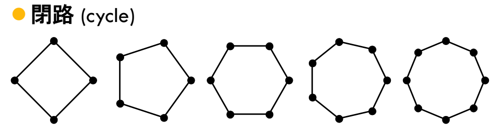
K_3 を含まないグラフの例

- 二部グラフ



木 (tree)

- 閉路 (cycle)



C_4　C_5　C_6　C_7　C_8

Feige '10 の予想：既知結果

予想 (Feige '10) (の弱い形)

> GがK_3を含まない　⇔　h(G) = 1/2

正しいことが証明されている G のクラス

- 木　(Krzywkowski '10)
- C_4　(Krzywkowski '10)
- 二部グラフ　(Feige '10)
- 閉路　(Krzywkowski '11+)

Feige '10 の予想：既知結果

予想 (Feige '10) (の弱い形)

> GがK_3を含まない　⇔　h(G) = 1/2

正しい…クラス

8ペー…の論…

エレガント

C_5 に帰着, C_5 は計算機援用

- 木　(Krzywkowski '10)
- C_4　…kowski '10)
- 二部グラ…　(Feige '10)
- 閉路　(Krzywkowski '11+)

ここからの主題

- Feige ('10) のエレガントな結果の紹介

Feige ('10) の考え方

- 2つの規則の導入
  - グラフを変換するための規則
  - 変換によって，最大勝利確率は下がらない

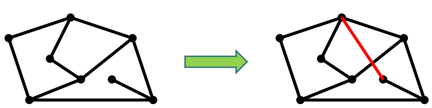
$G \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \cdots \rightarrow G_k$

$h(G) \leqq h(G_1) \leqq h(G_2) \leqq \cdots \leqq h(G_k)$

規則1

- G：グラフ
- G'：Gに辺を加えたもの

このとき，h(G) ≦ h(G')



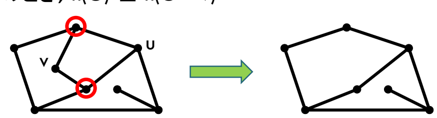
G　　　　G'

証明はむずかしくない

規則2

- G：グラフ，u,v：Gの2頂点
- vの隣接頂点はどれもuの隣接頂点

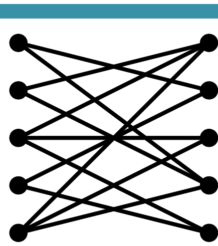
このとき，h(G) ≦ h(G − v)



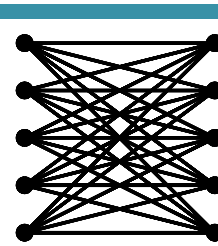
G　　　　G − v

証明は後ほど

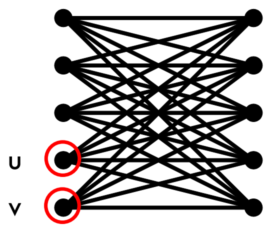
適用例：二部グラフ



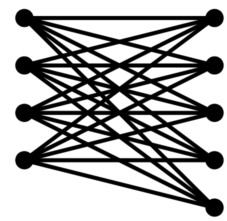
適用例：二部グラフ



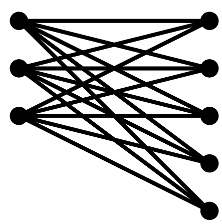
適用例:二部グラフ



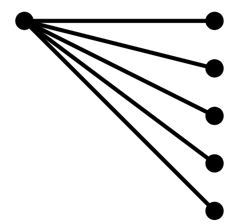
適用例:二部グラフ



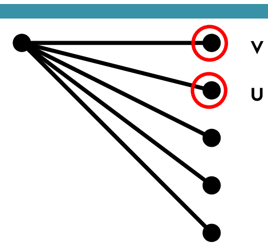
適用例:二部グラフ



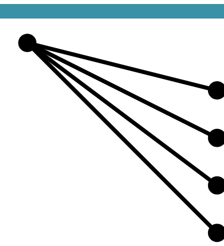
適用例:二部グラフ



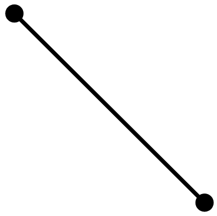
適用例:二部グラフ



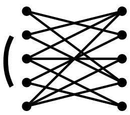
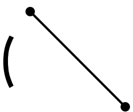
適用例:二部グラフ



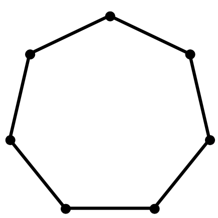
適用例：二部グラフ



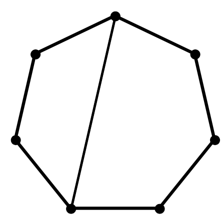
適用例：二部グラフ

h() ≦ h() = $\frac{1}{2}$

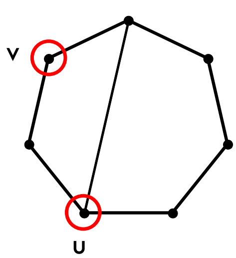
適用例：奇閉路



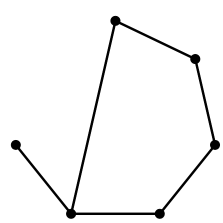
適用例：奇閉路



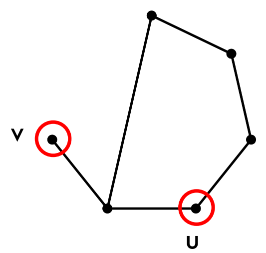
適用例：奇閉路



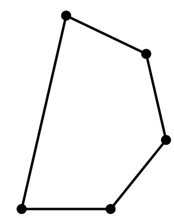
適用例：奇閉路



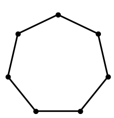
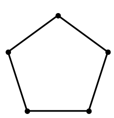
適用例：奇閉路



適用例：奇閉路



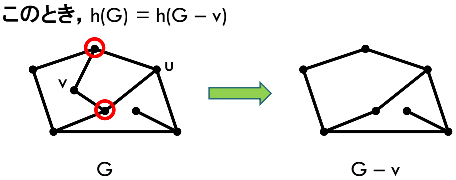
適用例：奇閉路

h() ≦ h()

この話の残り：規則2の正当性の証明

- G：グラフ，u,v：Gの2頂点
- vの隣接頂点はどれもuの隣接頂点

このとき，h(G) = h(G – v)



証明 (1)

- S：Gにおける最適戦略（固定）

Sの勝利確率 h(G)
　= Pr(GにおいてSで勝利 ｜ u,vの色が同じ)/ 2 +
　　Pr(GにおいてSで勝利 ｜ u,vの色が違う)/ 2

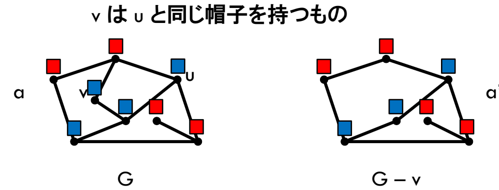
よって，次のどちらかが成り立つ (両方成り立つかもしれない)

- Pr(GにおいてSで勝利 ｜ u,vの色が同じ) ≧ h(G)
- Pr(GにおいてSで勝利 ｜ u,vの色が違う) ≧ h(G)

こちらが成り立つと仮定 (逆の場合も同様に証明可)

証明 (2)

- α' = G – v に対する帽子の割り当て（固定）
- α = G に対する帽子の割り当てで，
  v 以外のプレイヤーは α' と同じ帽子を持ち
  v は u と同じ帽子を持つもの



証明 (3)

G − v における戦略 S' で次を満たすものが欲しい

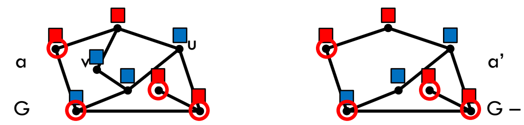
- G において a に対して S で勝つ ⇒
  G − v において a' に対して S' で勝つ

そのような S' が見つかれば，次が言える

- h(G) ≤ Pr(GにおいてSで勝利 | u,vの色が同じ)
  ≤ Pr(G − v においてS'で勝利) ≤ h(G − v)

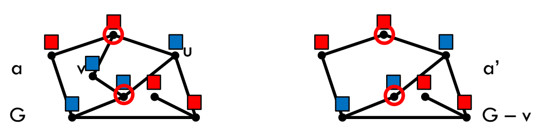
証明 (4)

- G − v における戦略 S' を S から次のように構成
  - G における v の隣接頂点と u 以外のプレイヤーは
    - S に従って行動する（これは可能！）



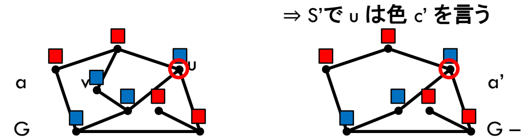
証明 (5)

- G − v における戦略 S' を S から次のように構成
  - G における v の隣接頂点は
    - u の色を見る（これは可能！）
    - vがu と同じ色を持つと見なして，S に従って行動



証明 (6)

- G − v における戦略 S' を S から次のように構成
  - u は v が S でどのように行動するか知っているので
    - Sで u は色 c を言う ⇒ S'で u は色 c を言う
    - Sで u と v がパスする ⇒ S'で u はパスする
    - Sで u がパスし，v が色 c' を言う
      ⇒ S'で u は色 c' を言う



Feige '10 の予想

予想 (Feige '10) (の弱い形)

GがK_3を含まない ⇔ h(G) = 1/2

注

- 「 h(G) ≧ 1/2 」は すべてのグラフGに対して成立
  (盲目白紙委任戦略による)
- 「 h(G) ≦ 2/3 」は K_3を含まないすべてのGで成立
  (Feige '10)