離散数理工学 第 13 回
離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 1 月 31 日

最終更新：2017 年 1 月 30 日　15:09

スケジュール 前半

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/4)
- ⋆ 休講 (体育祭) (10/11)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/18)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/25)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/1)
- ⋆ 休講 (出張) (11/8)
5. 離散代数：対称群と置換群 (11/15)
6. 離散代数：有限群 (11/22)
7. 離散代数：有限群の応用 (11/29)

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/6)
- ⋆ 中間試験 (12/13)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/20)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/10)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/17)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/24)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/31)
- ⋆ 予備日 (行う) (2/7)
- ⋆ 期末試験 (2/14)

注意：予定の変更もありうる

期末試験

- 日時，場所
  - 2 月 14 日 (火)：1 限 @西 9–115 (遅刻しないように)
- 出題範囲
  - 第 8 回から第 13 回 (今回) まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題は演習問題として提示されたものと同一である
    (複数の演習問題が組み合わされて 1 題とされる可能性もある)
    (「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

今日の目標

今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる
- 「ギャンブラーの破産」において，破産確率を計算できる
- 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において，
  到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は
「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの

マルコフ連鎖：例

次の状況を考える
- ある街の天気は「晴れ (F)」,「曇り (C)」,「雨 (R)」のいずれか
- 天気は毎日，確率的に変わる
  - 晴れの日の翌日の天気が晴れである確率 $= 1/2$
  - 晴れの日の翌日の天気が曇りである確率 $= 1/3$
  - 晴れの日の翌日の天気が雨である確率 $= 1/6$
  - 曇りの日の翌日の天気が晴れである確率 $= 1/3$
  - 曇りの日の翌日の天気が曇りである確率 $= 1/3$
  - 曇りの日の翌日の天気が雨である確率 $= 1/3$
  - 雨の日の翌日の天気が晴れである確率 $= 1/4$
  - 雨の日の翌日の天気が曇りである確率 $= 1/2$
  - 雨の日の翌日の天気が雨である確率 $= 1/4$

ポイント

次の日の天気 (に関する確率) は，前の日の天気だけから決まる

マルコフ連鎖：例 — 推移行列

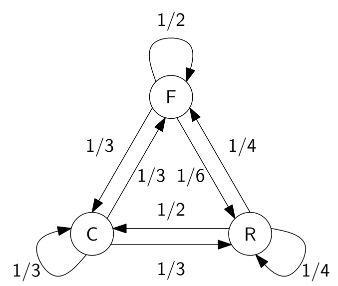
見にくいので，行列で表現する

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ F \\ C \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F & C & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

「行」から「列」へ推移する

マルコフ連鎖：例 — 状態遷移図

見にくいので，状態遷移図で表現する



「始点」から「終点」へ推移する

目次

ギャンブラーの破産：設定

設定

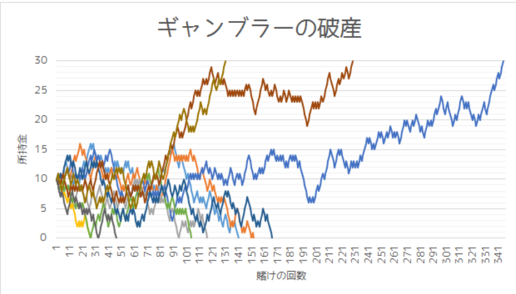
- 1 人のギャンブラー，所持金 n 万円
- 賭けを行うごとに，
  - 1/2 の確率で，所持金が 1 万円増加
  - 1/2 の確率で，所持金が 1 万円減少
- 所持金が $3n$ 万円か 0 万円になったら，終了

問題

1. 最終的に，0 万円になって終了する確率は？ (破産確率)
2. 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？

ギャンブラーの破産：とりあえず，シミュレーション

$n = 10$ の場合

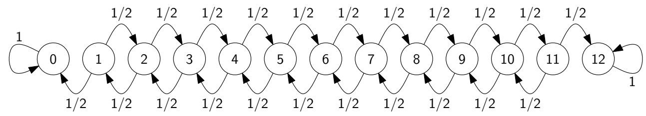


10 回の試行中，破産は 7 回

ギャンブラーの破産：マルコフ連鎖としてのモデル化

- 状態空間は $\{0, 1, \ldots, n, \ldots, 3n\}$
- $X_t = t$ 回目の賭けをした後の所持金 (単位：万円) (確率変数)

状態遷移図：$n = 4$ のとき



ギャンブラーの破産：興味の対象

問題

1. 最終的に，0 万円になって終了する確率は？
2. 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？

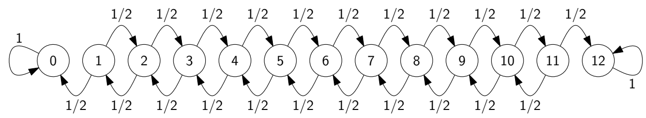
興味の対象

1. $p_n = \Pr(\exists\, t \geq 0 \colon X_t = 0 \mid X_0 = n)$ (確率)
2. $T_n = \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式

$p_k =$ 所持金が k 万円であるとき，0 万円で終了する確率

$$p_k = \Pr(\exists\, t \geq 0 \colon X_t = 0 \mid X_0 = k)$$



- このとき，次の漸化式が得られる

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{2} p_{k+1} \qquad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{2} p_{k+1} \qquad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

- つまり，$1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

- $q_k = p_{k+1} - p_k$ と置くと

$$\begin{aligned} q_0 &= p_1 - p_0 = p_1 - 1, \\ q_k &= q_{k-1} \qquad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

- つまり，$p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので，$\cdots$ (次のページへ続く)

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

- つまり，$p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0, \\ p_2 &= p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0, \\ &\vdots \\ p_k &= p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0, \\ &\vdots \\ 0 = p_{3n} &= 1 + 3nq_0 \end{aligned}$$

- したがって，$q_0 = -\dfrac{1}{3n}$
- したがって，$p_k = 1 - \dfrac{k}{3n}$，特に，$p_n = 1 - \dfrac{n}{3n} = \dfrac{2}{3}$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式 (1)

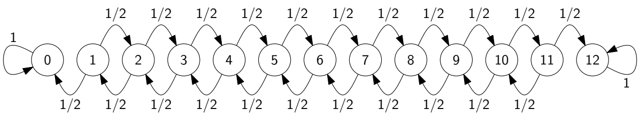
興味の対象

$T_n = \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

- 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

- このとき，$T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$ が成り立つ



- また，直感的には，$1 \le k \le 3n-1$ のとき，次が成り立つ？

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2}T_{n,k-1} + \frac{1}{2}T_{n,k+1}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式 (2)

$$\begin{aligned}
T_{n,k} &\\
&= \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]\\
&= \sum_{h=0}^{3n} \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k)\\
&= \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0{=}k, X_1{=}k{+}1] \Pr(X_1{=}k{+}1 \mid X_0{=}k) +\\
&\quad \mathrm{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0{=}k, X_1{=}k{-}1] \Pr(X_1{=}k{-}1 \mid X_0{=}k)\\
&= (1 + T_{n,k+1}) \cdot \frac{1}{2} + (1 + T_{n,k-1}) \cdot \frac{1}{2}\\
&= 1 + \frac{1}{2}T_{n,k+1} + \frac{1}{2}T_{n,k-1}
\end{aligned}$$

演習問題

任意の自然数値確率変数 X, Y と事象 A に対して，$\Pr(A) \ne 0$ のとき

$$\mathrm{E}[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{E}[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式を解く (1)

解くべき漸化式

$$T_{n,k} = \begin{cases} 0 & (k \in \{0, 3n\} \text{ のとき})\\ 1 + \frac{1}{2}T_{n,k+1} + \frac{1}{2}T_{n,k-1} & (1 \le k \le 3n-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

最終的に知りたいのは，$T_{n,n}$

- $1 \le k \le 3n-1$ のとき，

$$T_{n,k+1} - T_{n,k} = T_{n,k} - T_{n,k-1} - 2$$

- $U_k = T_{n,k+1} - T_{n,k}$ と置くと，

$$1 \le k \le 3n-1 \text{ のとき，} U_k = U_{k-1} - 2$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式を解く (2)

$$\begin{aligned}
T_{n,1} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,\\
T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1})\\
&= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2,\\
T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2})\\
&= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6,\\
&\vdots\\
T_{n,k} &= T_{n,0} + \sum_{i=0}^{k-1}(T_{n,i+1} - T_{n,i}) = kU_0 - k(k-1),\\
&\vdots\\
0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1)
\end{aligned}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式を解く (3)

$$\begin{aligned}
T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) \qquad (k \in \{1, 2, \ldots, 3n\}),\\
0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1)
\end{aligned}$$

- したがって，$U_0 = 3n - 1$
- したがって，$k \in \{1, 2, \ldots, 3n\}$ のとき，

$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

- $T_{n,0} = 0$ なので，$k \in \{0, 1, 2, \ldots, 3n\}$ のとき，

$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

つまり，$T_n = T_{n,n} = n(3n-n) = 2n^2$

ギャンブラーの破産：設定

設定

- 1 人のギャンブラー，所持金 n 万円
- 賭けを行うごとに，
  - 1/2 の確率で，所持金が 1 万円増加
  - 1/2 の確率で，所持金が 1 万円減少
- 所持金が $3n$ 万円か 0 万円になったら，終了

問題と解答

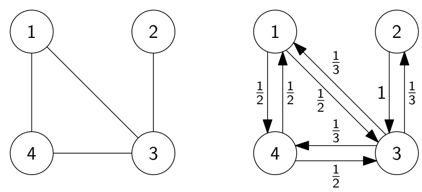
1. 最終的に，0 万円になって終了する確率は？ (破産確率)
   $\rightsquigarrow \frac{2}{3}$
2. 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？
   $\rightsquigarrow 2n^2$

目次

有限グラフ上の単純ランダムウォーク：設定

有限無向グラフ $G = (V, E)$：V は G の頂点集合，E は G の辺集合

- 時刻 $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して，次のように駒を動かす
  - $t = 0$ のとき，駒はある決められた頂点 $u \in V$ に置かれている
  - $t = k$ のとき，駒が頂点 $v \in V$ に置かれているとすると，
    $t = k + 1$ のとき，駒は v の隣接頂点へ等確率で動かされる
- 時刻 t において駒の置かれる頂点を X_t とすると，
  $\langle X_t \mid t \in \mathbb{N}\rangle$ は確率過程



- この確率過程を G 上の単純ランダムウォークと呼ぶ

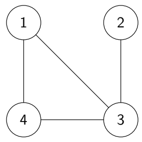
有限グラフ上の単純ランダムウォーク：興味の対象

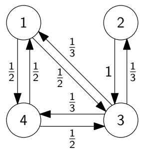
有限無向グラフ $G = (V, E)$

到達時刻 とは？

G 上の単純ランダムウォークにおいて，
頂点 $u \in V$ から頂点 $v \in V$ への到達時刻とは，

$$\tau_{u,v} = \min\{t \geq 0 \mid X_t = v, X_0 = u\}$$

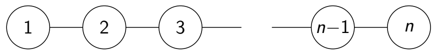




- これの期待値を到達時刻と呼ぶこともある
- 「$t \geq 0$」ではなく「$t \geq 1$」とする場合もある

到達時刻：道の場合 (1)

次のグラフを考える (頂点数 n の道)



左端の頂点を 1，右端の頂点を n として，$\mathrm{E}[\tau_{1,n}]$ を計算する

- グラフの形状から次が分かる

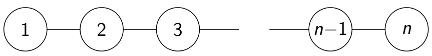
$$\tau_{1,n} = \tau_{1,2} + \tau_{2,3} + \cdots + \tau_{n-1,n}$$

- したがって，期待値の線形性より

$$\mathrm{E}[\tau_{1,n}] = \mathrm{E}[\tau_{1,2}] + \mathrm{E}[\tau_{2,3}] + \cdots + \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}]$$

- つまり，任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対する $\mathrm{E}[\tau_{i,i+1}]$ が分かればよい

到達時刻：道の場合 (2) — 漸化式の導出



- まず，$\mathrm{E}[\tau_{1,2}] = 1$
- 次に，$i \in \{2, \ldots, n-1\}$ のとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\tau_{i,i+1}] &= 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + \mathrm{E}[\tau_{i-1,i+1}]) \cdot \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}(\mathrm{E}[\tau_{i-1,i}] + \mathrm{E}[\tau_{i,i+1}]) \\
\therefore \quad \mathrm{E}[\tau_{i,i+1}] &= 2 + \mathrm{E}[\tau_{i-1,i}]
\end{aligned}$$

到達時刻：道の場合 (3) — 結論

- したがって，$a_i = \mathrm{E}[\tau_{i,i+1}]$ と置くと

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \text{ のとき}), \\ 2 + a_{i-1} & (i \in \{2, \ldots, n-1\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

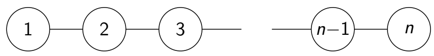
- これを解くと，任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，$a_i = 2i - 1$

証明したこと

任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，$\mathrm{E}[\tau_{i,i+1}] = 2i - 1$

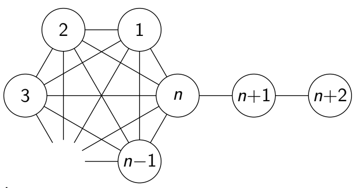
以上の考察をまとめると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\tau_{1,n}] &= \mathrm{E}[\tau_{1,2}] + \mathrm{E}[\tau_{2,3}] + \cdots + \mathrm{E}[\tau_{n-1,n}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(2i - 1) = (n-1)^2
\end{aligned}$$



到達時刻：完全グラフ + 道の場合

次のグラフを考える (頂点数 n の完全グラフに長さ 2 の道を追加)



$\mathrm{E}[\tau_{1,n+2}]$ を計算する

- グラフの形状から次が分かる

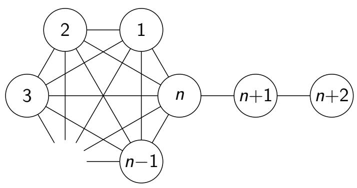
$$\tau_{1,n+2} = \tau_{1,n} + \tau_{n,n+1} + \tau_{n+1,n+2}$$

- したがって，期待値の線形性から

$$\mathrm{E}[\tau_{1,n+2}] = \mathrm{E}[\tau_{1,n}] + \mathrm{E}[\tau_{n,n+1}] + \mathrm{E}[\tau_{n+1,n+2}]$$

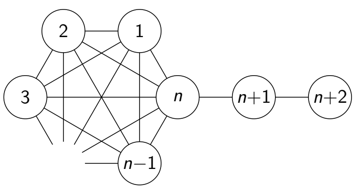
- つまり，$\mathrm{E}[\tau_{1,n}], \mathrm{E}[\tau_{n,n+1}], \mathrm{E}[\tau_{n+1,n+2}]$ が分かればよい

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (2)



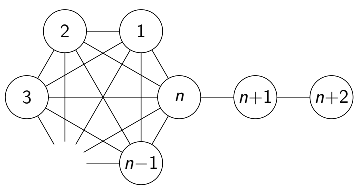
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\tau_{1,n}] &= \frac{1}{n-1} \cdot 1 + \frac{n-2}{n-1}(1 + \mathrm{E}[\tau_{1,n}]) \\
(n-1)\mathrm{E}[\tau_{1,n}] &= n - 1 + (n-2)\mathrm{E}[\tau_{1,n}] \\
\therefore \quad \mathrm{E}[\tau_{1,n}] &= n - 1
\end{aligned}$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (3)



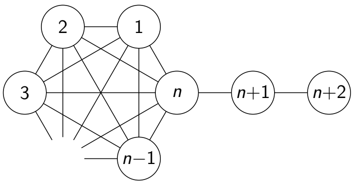
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\tau_{n,n+1}] &= \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{n-1}{n}(1 + \mathrm{E}[\tau_{1,n}] + \mathrm{E}[\tau_{n,n+1}]) \\
n\mathrm{E}[\tau_{n,n+1}] &= n + (n-1)\mathrm{E}[\tau_{1,n}] + (n-1)\mathrm{E}[\tau_{n,n+1}] \\
&= n + (n-1)^2 + (n-1)\mathrm{E}[\tau_{n,n+1}] \\
\therefore \quad \mathrm{E}[\tau_{n,n+1}] &= n + (n-1)^2 = n^2 - n + 1
\end{aligned}$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (4)



$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\tau_{n+1,n+2}] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + \mathrm{E}[\tau_{n,n+1}] + \mathrm{E}[\tau_{n+1,n+2}]) \\
2\mathrm{E}[\tau_{n+1,n+2}] &= 2 + \mathrm{E}[\tau_{n,n+1}] + \mathrm{E}[\tau_{n+1,n+2}] \\
&= 2 + (n^2 - n + 1) + \mathrm{E}[\tau_{n+1,n+2}] \\
\therefore \quad \mathrm{E}[\tau_{n+1,n+2}] &= 2 + (n^2 - n + 1) = n^2 - n + 3
\end{aligned}$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (5)

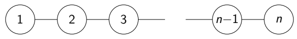


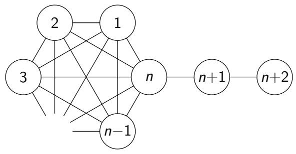
したがって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\tau_{1,n+2}] &= \mathrm{E}[\tau_{1,n}] + \mathrm{E}[\tau_{n,n+1}] + \mathrm{E}[\tau_{n+1,n+2}] \\
&= (n-1) + (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) \\
&= 2n^2 - n + 3
\end{aligned}
$$

到達時刻の比較

- 頂点数 $n+2$ の道：
  到達時刻の期待値 $= (n+1)^2$
- 頂点数 n の完全グラフ + 長さ 2 の道：
  到達時刻の期待値 $= 2n^2 - n + 3$





教訓：辺を多くすると，到達時刻の期待値が増えることがある

目次

今日の目標

今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- 「ギャンブラーの破産」において，破産確率を計算できる
- 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において，
  到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は
「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK