離散数理工学 第 11 回
離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 1 月 17 日

最終更新：2017 年 1 月 16 日　13:08

スケジュール 前半

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/4)
- ⋆ 休講 (体育祭) (10/11)

2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/18)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/25)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/1)
- ⋆ 休講 (出張) (11/8)

5. 離散代数：対称群と置換群 (11/15)
6. 離散代数：有限群 (11/22)
7. 離散代数：有限群の応用 (11/29)

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/6)
- ⋆ 中間試験 (12/13)

9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/20)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/10)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/17)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/24)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/31)
- ⋆ 予備日 (行う) (2/7)
- ⋆ 期末試験 (2/14?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

典型的な乱択アルゴリズムの設計と解析ができるようになる

- 確率の推定 (中央値トリック)

目次

1. 確率の推定：単純なアルゴリズム
2. 確率の推定：中央値トリック
3. 今日のまとめ

不公平な硬貨

設定

- 硬貨が 1 つある
- 投げたとき，表が出る確率はいつも変わらない
- その確率が分からない
- 目標：表が出る確率を知りたい
- 可能な操作：硬貨を投げる (ことのみ)

不公平な硬貨

設定

- 考えている硬貨について

$$\Pr(\text{表}) = p$$

ただし，$0 \leq p \leq 1$

- 目標：p を知りたい

応用例：モンテカルロ法

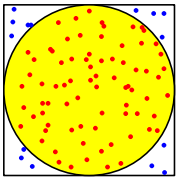
モンテカルロ法：(実際には用いられない) 例

円周率の計算のために次を行う

1. $[-1, 1]^2$ 内の点 (x, y) を一様分布に従って発生させる
2. $x^2 + y^2 \leq 1$ ならば，1 を出力，そうでなければ 0 を出力

このとき，この方法が 1 を出力する確率 $= \pi/4$

つまり，$p = \pi/4$ とした不公平な硬貨を考えていることになる



モンテカルロ法は，次の「単純なアルゴリズム」を実行する

単純なアルゴリズム

単純なアルゴリズム

硬貨を何度も投げてみる

- n 回投げるとする (独立な試行)
- 確率変数 X_i を次で定義 ($i \in \{1, \ldots, n\}$)

$$X_i = \begin{cases} 0 & (i \text{ 回目に投げたとき裏が出る}) \\ 1 & (i \text{ 回目に投げたとき表が出る}) \end{cases}$$

- 次の量を出力

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

期待値の解析

- 出力の期待値は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p) \\ &= p \end{aligned}$$

期待値は正しい「推測」になっている

問題点

必ず「p」を出力するわけではない $\rightsquigarrow$ 誤差が出る

n を大きくすれば，誤差は小さくなりそう

誤差の解析 (1)

以後，$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とする

- 真の値 p から出力 $\frac{X}{n}$ がどれだけずれるか？
- そのずれが ε 未満である確率を知りたい
- その確率は次のように書ける

$$\Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$$

- 計算

$$\begin{aligned} \Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) &= 1 - \Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right), \\ \Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right|\right]}{\varepsilon} \quad (\text{マルコフの不等式}) \end{aligned}$$

しかし，$\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right|\right]$ はどう計算したらいいか分からない

誤差の解析 (2)

$$\Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = \Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right|^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right|^2\right]}{\varepsilon^2}$$

$\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right|^2\right]$ を計算してみる

誤差の解析 (3)

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right|^2\right] = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X}{n}\right)^2 - 2p\frac{X}{n} + p^2\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{E}[X^2] - \frac{2p}{n}\mathrm{E}[X] + p^2$$

ここで，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] = pn \\ \mathrm{E}[X^2] &= \mathrm{E}[(X_1 + \cdots + X_n)^2] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i^2] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,(i \neq j)}^{n} \mathrm{E}[X_i X_j] \end{aligned}$$

誤差の解析 (4)

任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$\mathrm{E}[X_i^2] = (1-p) \cdot 0^2 + p \cdot 1^2 = p$$

したがって，

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i^2] = pn$$

任意の異なる $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，X_i と X_j は独立なので，

$$\mathrm{E}[X_i X_j] = \mathrm{E}[X_i]\mathrm{E}[X_j] = p \cdot p = p^2$$

したがって，

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,(i \neq j)}^{n} \mathrm{E}[X_i X_j] = p^2 n(n-1)$$

誤差の解析 (5)

ここまで，まとめると

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right|^2\right] &= \frac{1}{n^2}\mathrm{E}[X^2] - \frac{2p}{n}\mathrm{E}[X] + p^2 \\ &= \frac{1}{n^2}(pn + p^2 n(n-1)) - \frac{2p}{n}pn + p^2 \\ &= \frac{p}{n} + \frac{p^2(n-1)}{n} - p^2 \\ &= \frac{p - p^2}{n} = \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

誤差の解析 (6)

すなわち，

$$\Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right|^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{p(1-p)}{n}$$

- この不等式はチェビシェフの不等式と呼ばれる (ものの特殊な場合)
- この右辺を δ 以下にするには，$n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{p(1-p)}{\delta}$ とすればよい

結論

誤差が ε 以上になる確率を δ 以下とするためには，

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{p(1-p)}{\delta}$$

とすればよい

疑問

単純なアルゴリズム

硬貨を何度も投げてみる

- n 回投げるとする (独立な試行)
- 確率変数 X_i を次で定義 ($i \in \{1, \ldots, n\}$) (標示確率変数)

$$X_i = \begin{cases} 1 & (i \text{ 回目に投げたとき表が出る}) \\ 0 & (i \text{ 回目に投げたとき裏が出る}) \end{cases}$$

- 次の量を出力

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

疑問

この「単純なアルゴリズム」よりもよいアルゴリズムは無いのか？

目次

1. 確率の推定：単純なアルゴリズム
2. 確率の推定：中央値トリック
3. 今日のまとめ

中央値トリック (median trick)

中央値トリック

- n 回投げるとする (独立な試行)
- $n = (2k-1)t$ とする (k, t は自然数)
- 確率変数 X_i を次で定義 ($i \in \{1, \ldots, n\}$)

$$X_i = \begin{cases} 0 & (i \text{ 回目に投げたとき裏が出る}) \\ 1 & (i \text{ 回目に投げたとき表が出る}) \end{cases}$$

- 確率変数 Y_j を次で定義 ($j \in \{1, \ldots, 2k-1\}$)

$$Y_j = \frac{X_{(j-1)t+1} + \cdots + X_{(j-1)t+t}}{t}$$

- 次の量を出力

$$Y = \mathrm{med}\{Y_1, \ldots, Y_{2k-1}\}$$

med は中央値：$\mathrm{med}\{5, 1, 6, 2, 4\} = 4$

中央値トリック：誤差の解析 (1)

- 次が成り立つために n が満たす条件を見つけたい

$$\Pr(|Y - p| \geq \varepsilon) \leq \delta$$

- 今までの議論から，任意の $j \in \{1, \ldots, 2k-1\}$ に対して

$$\Pr(|Y_j - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{p(1-p)}{t}$$

- $t \geq \dfrac{8p(1-p)}{\varepsilon^2}$ とすると，$\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{8} \dfrac{\varepsilon^2}{p(1-p)}$ なので，

$$\Pr(|Y_j - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{8}$$

中央値トリック：誤差の解析 (2)

- このとき，合併上界から

$$\Pr(k \text{ 個の } j \text{ に対して}, |Y_j - p| \geq \varepsilon) < \binom{2k-1}{k} \left(\frac{1}{8}\right)^k$$

- 二項係数に対する上界を用いて，右辺を整理すると

$$\binom{2k-1}{k} \left(\frac{1}{8}\right)^k \leq \left(\frac{e(2k-1)}{k}\right)^k \left(\frac{1}{8}\right)^k < \left(\frac{2e}{8}\right)^k < \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

二項係数：簡単な評価 (第 1 回講義より)

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

中央値トリック：誤差の解析 (3)

- したがって (演習問題 12.3 参照)，

$$\begin{aligned} \Pr(|Y - p| \geq \varepsilon) &\leq \Pr(k \text{ 個の } j \text{ に対して}, |Y_j - p| \geq \varepsilon) \\ &< \left(\frac{3}{4}\right)^k \end{aligned}$$

- $k \geq \log_{3/4} \delta$ とすると

$$\Pr(|Y - p| \geq \varepsilon) < \left(\frac{3}{4}\right)^k \leq \delta$$

中央値トリック：誤差の解析 (まとめ)

中央値トリック：誤差の解析 (まとめ)

- $t \geq \dfrac{8p(1-p)}{\varepsilon^2}$，$k \geq \log_{3/4} \delta$ とすると
  誤差が ε 以上になる確率を δ 以下にできる
- このとき，硬貨を投げる回数 n は

$$n = (2k-1)t \geq \Omega\left(\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \log \frac{1}{\delta}\right)$$

補足：単純なアルゴリズムにて，硬貨を投げる回数 n は

$$n \geq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \frac{1}{\delta}$$

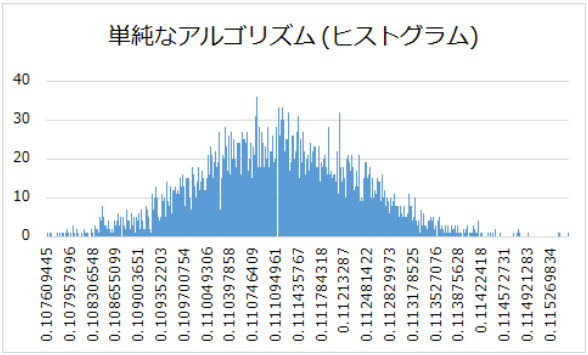
つまり，中央値トリックにより，硬貨を投げる回数が減った

実験してみた

- パラメータ
  - $p = 0.111111$
  - $2k - 1 = 9$
  - $t = 7901$
  - $n = (2k-1)t = 71109$
- Ruby 2.1.4 で実装
- 5000 回動かして，推定した p の度数分布 (ヒストグラム) を見てみた
- 横軸が推定した p の値，縦軸が度数 (頻度)

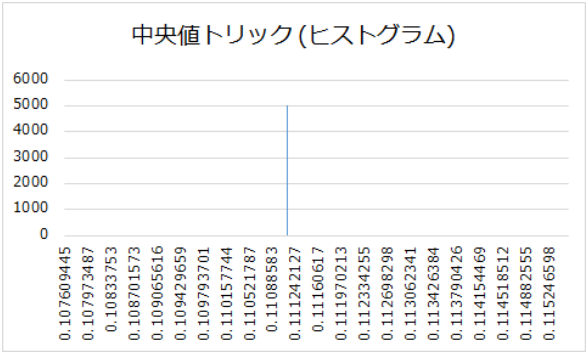
注意：このパラメータ設定はとても恣意的なので，
他のパラメータ設定で追試をしてみるとよい

実験してみた：単純なアルゴリズム



平均 0.1111089，標準偏差 0.0011736

実験してみた：中央値トリック



平均 0.1111111，標準偏差 1.22541×10^{-14} (つまり，0.0000000)

中央値トリック：注意

注意

- 単純なアルゴリズムの出力 X に対して，$\mathrm{E}[X] = 0$ が成り立つ
- 中央値トリックの出力 Y に対して，$\mathrm{E}[Y] = 0$ が成り立つとは限らない

X は不偏推定量であるが，Y はそうではない

どういうことか？

- n を大きくすると，X は p に近づいていく
- n を大きくすると，Y は p の近似値に近づいていく

目次

1. 確率の推定：単純なアルゴリズム
2. 確率の推定：中央値トリック
3. 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

典型的な乱択アルゴリズムの設計と解析ができるようになる

- 確率の推定 (中央値トリック)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK