

離散数理工学 第4回
数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016年11月1日

最終更新：2016年11月2日 14:13

スケジュール 後半 (予定)

- 8 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/6)
- ★ 中間試験 (12/13)
- 9 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/20)
- 10 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/10)
- 11 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/17)
- 12 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/24)
- 13 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/31)
- ★ 予備日 (2/7)
- ★ 期末試験 (2/14?)

注意：予定の変更もありうる

目次

- 1 母関数 (復習)
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 より複雑な漸化式の解法
- 4 カタラン数：定義と導出
- 5 カタラン数：組合せ的解釈
- 6 今日のまとめ

母関数 (復習)

代表的な数列の母関数

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$	一般項 a_n	母関数 $A(x)$
1, 1, 1, 1, ...	1	$\frac{1}{1-x}$
1, 2, 4, 8, ...	2^n	$\frac{1}{1-2x}$
1, α , α^2 , α^3 , ...	α^n	$\frac{1}{1-\alpha x}$
0, 1, 2, 3, ...	n	$\frac{x}{(1-x)^2}$

スケジュール 前半 (予定)

- 1 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/4)
- ★ 休講 (体育祭) (10/11)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/18)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/25)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/1)
- ★ 休講 (出張) (11/8)
- 5 離散代数：対称群と置換群 (11/15)
- 6 離散代数：有限群 (11/22)
- 7 離散代数：有限群の応用 (11/29)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ より複雑な漸化式の解法
- ▶ カタラン数

数列の母関数

母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

仮定

この冪級数は収束する

- ▶ 特に、ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- ▶ つまり、 $|x| < r$ のとき、 $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので、『微分積分学』、『解析学』、『複素関数論』の知識が使える

線形漸化式の厳密解法

目次

- 1 母関数 (復習)
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 より複雑な漸化式の解法
- 4 カタラン数：定義と導出
- 5 カタラン数：組合せ的解釈
- 6 今日のまとめ

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数 とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

- ▶ 特性方程式を用いた方法 (前回)
- ▶ 行列を用いた方法 (前回)
- ▶ 母関数を用いた方法 (今回)

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - 2x &= xA(x) - x + x^2 A(x) \\ \therefore (x^2 + x - 1)A(x) &= -x - 1 \\ \therefore A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

母関数を用いた漸化式の解法

$$\begin{aligned} -\frac{x+1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ \therefore -(x+1) &= a\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \therefore -x-1 &= (a+b)x + \left(-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b\right) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} -1 &= a+b \quad \text{かつ} \\ -1 &= -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b \end{aligned}$$

これを a, b に関して解くと

$$a = \frac{-5-\sqrt{5}}{10}, \quad b = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$$

母関数を用いた漸化式の解法

0 a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- ▶ このとき, $a_2 = 3 = 2 + 1 = a_1 + a_0$
- ▶ つまり, 上の漸化式は $n \geq 2$ において成立

書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= xA(x) - x + x^2 A(x) \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1}$$

このとき, $-\frac{x+1}{x^2+x-1}$ の部分分数分解が必要

- ▶ 「分母 = 0」を x について解くと, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる
- ▶ したがって, ある定数 a, b が存在して

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

- ▶ この a, b を定める (次のページ)

母関数を用いた漸化式の解法

したがって、

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right) x^n \end{aligned}$$

したがって, 任意の $n \geq 0$ に対して、

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \quad \square$$

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ カタラン数：定義と導出
- ⑤ カタラン数：組合せ的解釈
- ⑥ 今日のまとめ

例題 1：直感を得る

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ $a_1 = 3$
- ▶ $a_2 = 4a_1 - 3^{2-1} = 4 \cdot 3 - 3^1 = 12 - 3 = 9$
- ▶ $a_3 = 4a_2 - 3^{3-1} = 4 \cdot 9 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
- ▶ $a_4 = 4a_3 - 3^{4-1} = 4 \cdot 27 - 3^3 = 108 - 27 = 81$
- ▶ ...

例題 1：母関数を用いた解法 Step 1

① 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore a_n x^n &= 4a_{n-1} x^n - 3^{n-1} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 1：母関数を用いた解法 Step 3

③ 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\ &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\ &= \frac{1-4x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 1：母関数を用いた解法 Step 0

① a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

▶ このとき、 $a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$ したがって、考えている漸化式は次のように書き換えられる

例題 1：書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 2

② 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n \geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 3^n x^{n+1} \\ &= 4x \sum_{n \geq 0} a_n x^n - x \sum_{n \geq 0} (3x)^n \\ &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \end{aligned}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 4

④ 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって、

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

したがって、任意の $n \geq 0$ に対して

$$a_n = 3^n \quad \square$$

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ $a_0 = 1$
- ▶ $a_1 = 3a_0 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- ▶ $a_2 = 3a_1 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$
- ▶ $a_3 = 3a_2 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 19 + 2 \cdot 3 = 63$
- ▶ $a_4 = 3a_3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 63 + 2 \cdot 4 = 197$
- ▶ ...

例題 2：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore a_n x^n &= 3a_{n-1} x^n + 2nx^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2nx^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2nx^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n \geq 0} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} (2n+2)x^{n+1} \\ &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} nx^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} nx^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + 2x \frac{1}{1-x} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

部分分数分解を試みる、つまり

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

となる a, b, c が一意に存在するので、それを定める (次のページ)

例題 2：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 1：母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2 \\ &= a(1-4x+3x^2) + b(x-3x^2) + c(1-2x+x^2) \\ &= (3a-3b+c)x^2 + (-4a+b-2c)x + (a+c) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} 0 &= 3a - 3b + c & \text{かつ,} \\ 2 &= -4a + b - 2c & \text{かつ,} \\ 0 &= a + c \end{aligned}$$

この方程式を解くと、次が得られる

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = -1, \quad c = \frac{3}{2}$$

したがって、

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} - n \right) x^n \end{aligned}$$

したがって、任意の $n \geq 0$ に対して、 $a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^n - n - \frac{3}{2}$ □

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ **カタラン数 : 定義と導出**
- ⑤ カタラン数 : 組合せ的解釈
- ⑥ 今日のまとめ



カタラン
(1814-1894)

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Catalan.html>

カタラン数とは？

次の漸化式で定められる数 C_n を第 n **カタラン数** と呼ぶ

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例 :

- ▶ $C_1 = C_0 C_0 = 1 \cdot 1 = 1$
- ▶ $C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$
- ▶ $C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- ▶ $C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$

目標 : 第 n カタラン数を表す式を母関数による方法で導く

① 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\ C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1}) \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)$$

母関数を $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ と書くことにする

② 各辺を $C(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 = C(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right) \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\ &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\ &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\ &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j \\ &= x \left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j \right) = x C(x)^2 \end{aligned}$$

③ 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} C(x) - 1 &= x C(x)^2 \\ x C(x)^2 - C(x) + 1 &= 0 \\ C(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \end{aligned}$$

どちらが正しいのか？

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = C_0 = 1$ なので、

$$\blacktriangleright C(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ だとすると,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

となり、合わない

$$\blacktriangleright C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ だとすると,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-4x)}{2x(1 + \sqrt{1-4x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1-4x}} = 1$$

となり、合う

したがって、 $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ である

補題 (テイラー展開を使うことで証明できる (証明は省略))

任意の実数 α に対して、 $|z| < 1$ であるとき、

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

ただし、

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

すなわち、 $\alpha = 1/2$, $z = -4x$ とすれば、次が得られる

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n &= -\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-4)^n \\ &= \frac{1-2(-2+4)(-2+8)\cdots(-2+4n-4)}{2 \cdot n!} \\ &= \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-6)}{2 \cdot n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(n-1)!} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{(n-1)!} \\ &= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

カタラン数の公式

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

二項係数：簡単な評価 (復習)

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

したがって、カタラン数に対する以下の上界と下界が得られる

$$\frac{2^n}{n+1} \leq C_n \leq \frac{(2e)^n}{n+1}$$

\therefore カタラン数は n に関して指数関数的に増加する

3 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$xC(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

ここで、 $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ なので、

$$xC(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$$

つまり、 $xC(x)$ は次の数列 $\{a_n\}$ の母関数

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=0 \text{ のとき}) \\ C_{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

まずは、 $xC(x)$ の級数展開を導く

$$\begin{aligned} \therefore xC(x) &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n \right) x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して } C_{n-1} = -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n$$

以上の議論より、任意の $n \geq 1$ に対して、

$$C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

つまり、次の公式が得られる

カタラン数の公式

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ カタラン数：定義と導出
- ⑤ カタラン数：組合せ的解释
- ⑥ 今日のまとめ



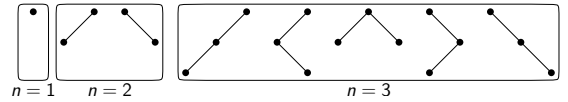
リチャード・スタンレイ
 ▶ MIT 数学科の教授
 ▶ 組合せ論の研究者 (大家)
 ▶ カタラン数の組合せ論的解釈を 214 個収集した
 ここでは 2 つだけ紹介

http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_P._Stanley

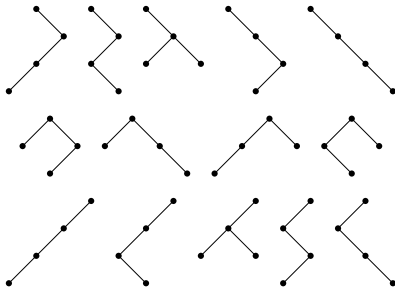
二分木とは？

頂点数 n の二分木とは、次のように再帰的に定義されるグラフ

- ▶ 頂点数 0 の二分木は空グラフ (頂点を持たないグラフ)
- ▶ 頂点数 1 の二分木は根と呼ばれる 1 頂点から成るグラフ
- ▶ 頂点数 $n \geq 2$ の二分木は、根 r と呼ばれる 1 頂点と、左部分木、右部分木と呼ばれる 2 つの二分木から成り、頂点数の総和は n であり、 r と左部分木の根、 r と右部分木の根を辺で結んだもの



$n = 4$ のとき



目標

頂点数 n の二分木の総数 T_n の満たす漸化式を導く

T_n が満たす漸化式

$$T_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} T_i T_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明： $n \geq 1$ のとき、

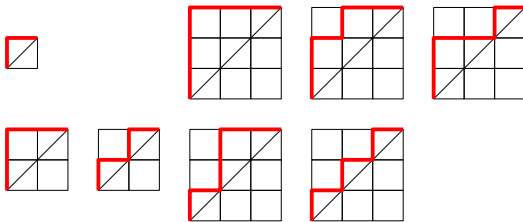
- ▶ 左部分木の頂点数 + 右部分木の頂点数 = $n - 1$
- ▶ 左部分木の頂点数を i とすると、 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ で、右部分木の頂点数は $n - i - 1$
- ▶ このとき、左部分木は T_i 通り、右部分木は T_{n-i-1} 通りの可能性 □

結論

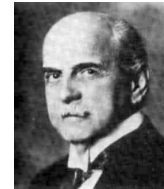
頂点数 n の二分木の総数は第 n カタラン数 C_n と等しい

ディック道 (Dyck path) とは？

ディック道とは、 $(0, 0)$ から (n, n) へ至る格子道で、直線 $y = x$ の下側を通らないもの



$D_n = (0, 0)$ から (n, n) へ至るディック道の総数



ディック (1856–1934)

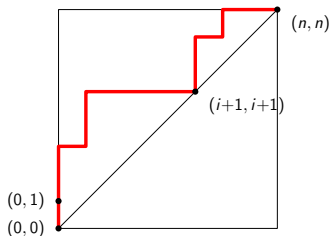
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Von_Dyck.html

ディック道の総数が満たす漸化式

$$D_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} D_i D_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

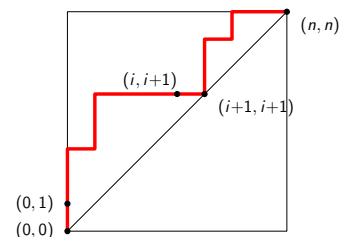
証明： $n \geq 1$ のとき

- ▶ 「はじめの一步」は必ず「上」
- ▶ $(0, 0)$ の他に、はじめて直線 $y = x$ 上に来るときを考える
- ▶ その点を $(i + 1, i + 1)$ とする ($i \in \{0, \dots, n-1\}$)



証明 (続き)：

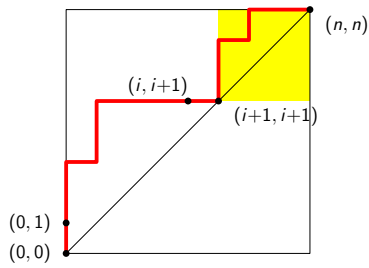
- ▶ $(i + 1, i + 1)$ に来る直前に、必ず $(i, i + 1)$ にいる
- ▶ つまり、考えているディック道は以下の形をしている
 - 1 $(0, 0)$ から $(0, 1)$ に至る (← 1 通り)
 - 2 $(0, 1)$ から $(i, i + 1)$ に至る
 - 3 $(i, i + 1)$ から $(i + 1, i + 1)$ に至る (← 1 通り)
 - 4 $(i + 1, i + 1)$ から (n, n) に至る



証明 (続き) :

④ $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る
この間に $y = x$ より下に行かないので、

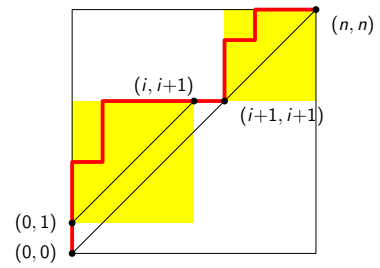
$$\text{このような経路の総数} = \text{(0,0) から (n-i-1, n-i-1) に至るディック道の総数} = D_{n-i-1}$$



証明 (続き) :

② $(0, 1)$ から $(i, i+1)$ に至る
この間に $y = x$ 上に来ないので、

$$\text{このような経路の総数} = \text{(0,0) から (i, i) に至るディック道の総数} = D_i$$



証明 (続き) :

- ▶ $(i+1, i+1)$ に来る直前に、必ず $(i, i+1)$ にいる
- ▶ つまり、考えているディック道は以下の形をしている

- ① $(0, 0)$ から $(0, 1)$ に至る ($\leftarrow 1$ 通り)
- ② $(0, 1)$ から $(i, i+1)$ に至る ($\leftarrow D_i$ 通り)
- ③ $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る ($\leftarrow 1$ 通り)
- ④ $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る ($\leftarrow D_{n-i-1}$ 通り)

したがって、 $D_n = \sum_{i=0}^{n-1} D_i D_{n-i-1}$ □

結論

$(0, 0)$ から (n, n) へ至るディック道の総数は第 n カタラン数 C_n に等しい

目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ カタラン数：定義と導出
- ⑤ カタラン数：組合せ的解釈
- ⑥ 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ カタラン数

注意

今日扱ったのは、母関数に関する初歩

- ▶ 母関数にまつわる理論は膨大
- ▶ 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長

そこでは、『複素関数論』が重要な役割を果たす

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりではやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時、小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK