9:00–10:30．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1 あるクラスには n 人の男の子がいて，彼らはそれぞれ独立に，確率 p でチョコレートを 0 個受け取り，確率 $1-p$ でチョコレートを 2 個受け取る．ただし，$0 < p \leq 1$ である．以下の問いに答えよ．

1. n 人の男の子が受け取ったチョコレートの総数を表す確率変数を X とする．期待値 $\mathrm{E}[X]$ が何であるか，答えよ．

2. 定数 $c > 1$ に対して，$\mathrm{E}[c^X]$ が何であるか，答えよ．

3. 次の不等式を証明せよ．

$$\Pr(X \geq 4pn) \leq \left(\frac{p + (1-p)c^2}{c^{4p}} \right)^n .$$

問題 2 次の疑似コードで記述される乱択アルゴリズムは，停止するとき，入力の配列 A の最小値を返す．(この事実は以下の議論で使用してもよい．) 入力において，A の要素数は必ず 1 以上であると仮定する．

```
def f(A) # A: array of distinct numbers
  p = a number in A chosen uniformly
      at random
  return p if length(A) == 1
  x = f(A-{p})
  print "G"
  if p < x then x = f(A)
  return x
end
```

1. 配列 A を入力としたときに画面に書かれる G の数を X_A で表し，$X_n = \max\{X_A \mid |A| = n\}$ とする．このとき，$\mathrm{E}[X_1] = 0$ であることを証明せよ．

2. $n \geq 2$ であるとき，

$$\mathrm{E}[X_n] \leq \mathrm{E}[X_{n-1}] + 1 + \frac{1}{n}\mathrm{E}[X_n]$$

が成り立つことを証明せよ．

3. 次の漸化式を満たす数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ を考える．

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_n &= t_{n-1} + 1 + \frac{1}{n}t_n \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

このとき，任意の $n \geq 1$ に対して $\mathrm{E}[X_n] \leq t_n$ が成り立つことを証明せよ．

4. 数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ の一般項を求めよ．

問題 3 商品を買うと n 種類の景品の中の 1 つが当たる．その確率は商品の間で同一かつ独立であり，$\frac{1}{n}$ である．全種類の景品を集め切るまで商品を購入し続けるとする．

このとき，任意の定数 $c > 0$ に対して，商品購入回数が $n \ln n + cn$ を上回る確率が e^{-c} 以下になることを証明せよ．

問題 4 次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$ を考える．

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array} .$$

以下の問いに答えよ．

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け．

2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか，すべて答えよ．

3. このマルコフ連鎖において，極限 $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t$ が存在するかどうか答えよ．存在する場合，その極限が何であるか，答えよ．

以上