離散数理工学 (7) **2016 年 11 月 29 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2016 年 12 月 6 日 講義終了時

復習問題 7.1 任意の有限群 G を考える．この演習問題の目標は G と同型な置換群が存在することを証明することである．以下の流れに沿って，証明してみよ．

1. 任意の $g \in G$ に対して，写像 $f_g \colon G \to G$ を次のように定義する．すなわち，任意の $x \in G$ に対して，$f_g(x) = gx$ とする．このとき，f_g は G 上の置換であることを証明せよ．
2. 集合 $K = \{f_g \mid g \in G\}$ を考える．K が G 上の置換群であることを証明せよ．
3. 写像 $\phi \colon G \to K$ を次のように定義する．すなわち，任意の $g \in G$ に対して，$\phi(g) = f_g$ とする．このとき，ϕ が群準同型写像であることを証明せよ．
4. 上の写像 ϕ が全単射であることを証明せよ．

復習問題 7.2 15 パズルとは，4×4 の盤面に，1 から 15 の書かれた正方形のコマが 1 つずつ置かれ，1 か所の空きを利用してコマを動かし，目的の配置を作成するパズルである．サム・ロイド (Sam Lloyd) は下の図にある左の配置から右の配置が作成できるか，尋ねた．

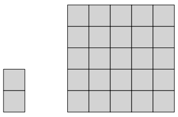
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

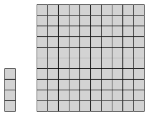
サム・ロイドの問題に対する正しい解答は「作成できない」である．なぜ作成できないのか，証明せよ．

復習問題 7.3 1×2 の長方形 (回転させてもよい) によって 5×5 の正方形を敷き詰められないことを，以下の流れに沿って証明せよ．



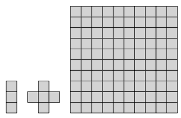
1. 群 $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e\rangle$ と置換群 $H = \langle (1\ 2), (1\ 3)\rangle$ に対して，次で定義される群準同型写像 $\phi \colon G \to H$ を考える．
$$\phi(x) = (1\ 2), \quad \phi(y) = (1\ 3).$$
この ϕ が本当に群準同型写像であることを確認せよ．
2. 以上の設定の下で，$\phi(x^5y^5x^{-5}y^{-5})$ が恒等置換ではないことを証明せよ．
3. 以上の考察を用いて，1×2 の長方形 (回転させてもよい) によって 5×5 の正方形を敷き詰められないことを証明せよ．

復習問題 7.4 1×4 の長方形 (回転させてもよい) によって 10×10 の正方形を敷き詰められないことを，以下の流れに沿って証明せよ．



1. 次の群
$$G = \langle x, y \mid x^4yx^{-4}y^{-1} = xy^4x^{-1}y^{-4} = e\rangle.$$
と置換群 $H = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 5)\rangle$ に対して，次で定義される群準同型写像 $\phi \colon G \to H$ を考える．
$$\phi(x) = (1\ 2\ 3\ 4), \quad \phi(y) = (1\ 2\ 3\ 5).$$
この ϕ が本当に群準同型写像であることを確認せよ．
2. 以上の設定の下で，$\phi(x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10})$ が恒等置換ではないことを証明せよ．
3. 以上の考察を用いて，1×4 の長方形 (回転させてもよい) によって 10×10 の正方形を敷き詰められないことを証明せよ．

復習問題 7.5 1×3 の長方形 (回転させてもよい) と十字型のペントミノによって 10×10 の正方形を敷き詰められないことを，以下の流れに沿って証明せよ．



1. 次の群
$$G = \left\langle x, y \;\middle|\; \begin{array}{l} xy^3x^{-1}y^{-3} = x^3yx^{-3}y^{-1} = \\ xyxyx^{-1}yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1} = e \end{array} \right\rangle$$
と置換群 $H = \langle (1\ 2\ 3), (3\ 4\ 5)\rangle$ に対して，次で定義される群準同型写像 $\phi \colon G \to H$ を考える．
$$\phi(x) = (1\ 2\ 3), \quad \phi(y) = (3\ 4\ 5).$$
この ϕ が本当に群準同型写像であることを確認せよ．

2. 以上の設定の下で，$\phi(x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10})$ が恒等置換ではないことを証明せよ．

3. 以上の考察を用いて，1×3 の長方形 (回転させてもよい) と十字型のペントミノによって 10×10 の正方形を敷き詰められないことを証明せよ．

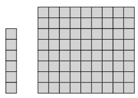
追加問題 7.6 問題 7.2 にある 15 パズルを考える．下の図にある左の配置から右の配置が作成できるか，できないか，理由を付けて答えよ．

5	3	1	2
4	10	9	8
7	6		15
14	13	12	11

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

追加問題 7.7 1×6 の長方形 (回転させてもよい) によって 9×8 の長方形を敷き詰められないことを，以下の流れに沿って証明せよ．



1. 次の群

$$G = \langle x, y \mid x^6yx^{-6}y^{-1} = xy^6x^{-1}y^{-6} = e\rangle.$$

と置換群 $H = \langle(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), (1\ 3\ 5\ 2\ 4\ 6)\rangle$ に対して，次で定義される群準同型写像 $\phi\colon G \to H$ を考える．

$$\phi(x) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), \quad \phi(y) = (1\ 3\ 5\ 2\ 4\ 6).$$

この ϕ が本当に群準同型写像であることを確認せよ．

2. 以上の設定の下で，$\phi(x^9y^8x^{-9}y^{-8})$ が恒等置換ではないことを証明せよ．

3. 以上の考察を用いて，1×6 の長方形 (回転させてもよい) によって 9×8 の長方形を敷き詰められないことを証明せよ．

4. 以上の設定の下で，$\phi(x^8y^9x^{-8}y^{-9})$ が恒等置換であることを証明せよ．(補足：つまり，$\phi(x^8y^9x^{-8}y^{-9})$ が恒等置換であるからといって，敷き詰められるとは言えないことが分かる．)

5. 以上の考察を用いて，任意の自然数 $m \geq 1$ と $n \geq 1$ に対して，1×6 の長方形 (回転させてもよい) によって $(6m+3) \times (6n+2)$ の長方形を敷き詰められないことを証明せよ．