演習問題
岡本 吉央

提出締切： 2016 年 11 月 1 日 講義終了時

復習問題 3.1 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ．

復習問題 3.2 次の漸化式を考える．

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，

$$f_n = O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.3 次の漸化式を考える．

$$g_n \begin{cases} = 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，

$$f_n = O(\log n)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.4 次の数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数 $A(x)$ が何であるか，x の有理関数として答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$.
2. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$.
3. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$.
4. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$.

補足問題 3.5 次の漸化式を考える．

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 b_n と数列 $\{c_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 c_n を閉じた形で与えよ．

追加問題 3.6 次の漸化式を考える．

$$t_n = \begin{cases} 5 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 24 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4t_{n-1} + 4t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 t_n を閉じた形で与えよ．ヒント：$t_n = \frac{4-3\sqrt{2}}{8}(2-2\sqrt{2})^n + \frac{4+3\sqrt{2}}{8}(2+2\sqrt{2})^n$.

追加問題 3.7 次の漸化式を考える．

$$q_n \begin{cases} = 1 & (n = 0, 1 \text{ のとき}) \\ \leq q_{\lfloor n/3 \rfloor} + q_{\lfloor n/6 \rfloor} + 1 & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，$q_n = O(n)$ が成り立つことを証明せよ．ヒント：帰納法の仮定に注意せよ．

追加問題 3.8 次の数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数 $A(x)$ が何であるか，x の有理関数として答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n^2$.
2. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$a_n = \begin{cases} \binom{100}{n} & (n \leq 100 \text{ のとき}), \\ 0 & (n > 100 \text{ のとき}). \end{cases}$$