

離散数学 第 13 回
証明法 (4) : 数学的帰納法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 2 月 8 日

最終更新 : 2017 年 2 月 7 日 10:58

スケジュール 前半

- | | | |
|---|--|----------|
| 1 | 集合と論理 (1) : 命題論理 | (10月3日) |
| * | 体育の日 | (10月10日) |
| 2 | 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 | (10月17日) |
| 3 | 集合と論理 (3) : 述語論理 | (10月24日) |
| 4 | 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 | (10月31日) |
| * | 休講 | (11月7日) |
| 5 | 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 | (11月14日) |
| 6 | 証明法 (3) : 集合に関する証明 | (11月21日) |
| * | 調布祭片付け | (11月28日) |
| 7 | 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 | (12月5日) |
| ● | 中間試験 | (12月12日) |

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|----------------------|----------|
| 8 | 写像 (1) : 像と逆像 | (12月19日) |
| 9 | 写像 (2) : 全射と単射 | (1月16日) |
| 10 | 関係 (1) : 関係 | (1月23日) |
| 11 | 関係 (2) : 同値関係 | (1月30日) |
| 12 | 関係 (3) : 順序関係 | (2月6日) |
| 13 | 証明法 (4) : 数学的帰納法 | (2月8日) |
| 14 | 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 | (2月13日) |
| | ● 期末試験 | (2月20日) |

注意：予定の変更もありうる

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 数学的帰納法で証明ができるようになる
- ▶ 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ

例題 1

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$
- ▶ $n = 2$ のとき : $8^n - 3^n = 64 - 9 = 55 = 5 \times 11$
- ▶ $n = 3$ のとき : $8^n - 3^n = 512 - 27 = 485 = 5 \times 97$
- ▶ ...

注 : これはただの確認であり, 証明ではない

例題 1 : 数学的帰納法による証明

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

数学的帰納法による証明 : 方針

- 1 $n = 1$ のときに正しいことを証明する
- 2 任意の正の整数 $k \geq 1$ に対して,
 $n = k$ のときに正しいならば, $n = k + 1$ のときに正しいことを証明する

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (1)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 : まず $n = 1$ のときに正しいことを証明する.

- ▶ $n = 1$ のとき, $8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$.
- ▶ 5 は 5 で割り切れるので, このとき正しい.

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える.

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する.

(注 : 帰納法の仮定と呼ばれる)

- ▶ 証明すべきことは, $8^{k+1} - 3^{k+1}$ が 5 で割り切れることである.

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える.

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する.

(注 : 帰納法の仮定と呼ばれる)

- ▶ 証明すべきことは, $8^{k+1} - 3^{k+1}$ が 5 で割り切れることである.
- ▶ 帰納法の仮定より,
ある正の整数 m が存在して, $8^k - 3^k = 5m$ となる.

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続 2) : このとき,

$$8^{k+1} - 3^{k+1}$$

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続 2) : このとき,

$$8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k$$

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続 2) : このとき,

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k) \end{aligned}$$

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続 2) : このとき,

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k) \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m \quad (\text{帰納法の仮定から}) \end{aligned}$$

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続 2) : このとき,

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k) \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m \quad (\text{帰納法の仮定から}) \\ &= 5 \cdot (8^k + 3m). \end{aligned}$$

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続 2) : このとき,

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k) \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m \quad (\text{帰納法の仮定から}) \\ &= 5 \cdot (8^k + 3m). \end{aligned}$$

$8^k + 3m$ は正の整数なので, $8^{k+1} - 3^{k+1}$ は 5 で割り切れる. □

数学的帰納法とは？

数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数 n に対して、 $P(n)$ 」という形の命題の証明

- 1 $P(1)$ を証明 (基底段階)
- 2 「任意の正の整数 k に対して『 $P(k)$ ならば $P(k+1)$ 』」を証明 (帰納段階)

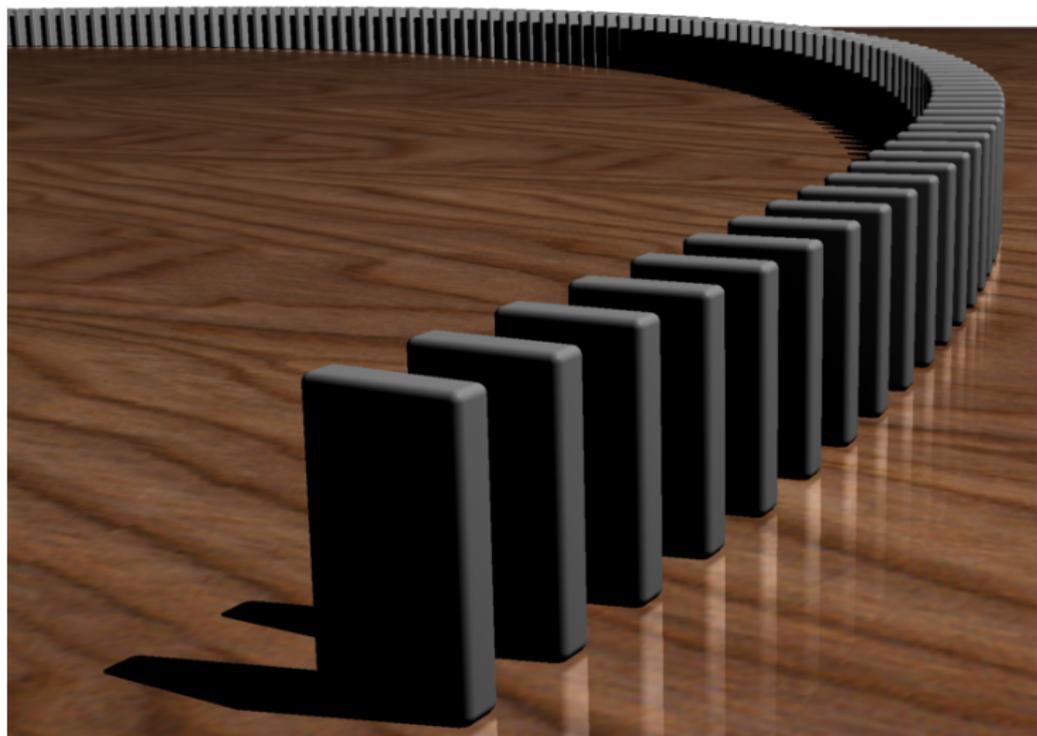
帰納段階での証明の書き方

- 1 「任意の正の整数 k を考える」と書く
- 2 「 $P(k)$ であると仮定する」と書く
- 3 $P(k)$ を用いて、 $P(k+1)$ が正しいことを導く (証明する)

例題 1 では、

$$P(n) = \text{「}8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる」}$$

数学的帰納法のイメージ



<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dominoeffect.png>

数学的帰納法：論理に関する補足 (1)

数学的帰納法はなぜ正しいのか？

数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数 n に対して、 $P(n)$ 」という形の命題の証明

- 1 $P(1)$ を証明 (基底段階)
- 2 「任意の正の整数 k に対して『 $P(k)$ ならば $P(k+1)$ 』」を証明 (帰納段階)

つまり、正の整数を全部集めた集合を \mathbb{Z}_+ として、
証明したいことは

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ (P(n))$$

数学的帰納法：論理に関する補足 (2)

数学的帰納法はなぜ正しいのか？

数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数 n に対して、 $P(n)$ 」という形の命題の証明

- 1 $P(1)$ を証明 (基底段階)
- 2 「任意の正の整数 k に対して『 $P(k)$ ならば $P(k+1)$ 』」を証明 (帰納段階)

数学的帰納法による証明が主張していることは

$$\underbrace{P(1)}_1 \wedge \underbrace{(\forall k \in \mathbb{Z}_+ (P(k) \rightarrow P(k+1)))}_2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+ (P(n))$$

数学的帰納法：論理に関する補足 (3)

数学的帰納法はなぜ正しいのか？

- ▶ 分かりにくいので、 \mathbb{Z}_+ を $\{1, 2, 3\}$ に置きかえた場合を考える

$$P(1) \wedge (\forall k \in \{1, 2, 3\} (P(k) \rightarrow P(k+1))) \Rightarrow \forall n \in \{1, 2, 3\} (P(n))$$

- ▶ 書き換えると,

$$\begin{aligned} & P(1) \wedge (P(1) \rightarrow P(2)) \wedge (P(2) \rightarrow P(3)) \wedge (P(3) \rightarrow P(4)) \\ \Rightarrow & P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \end{aligned}$$

これを推論で証明してみる

数学的帰納法：論理に関する補足 (4)

証明すること

任意の命題 $P(1), P(2), P(3), P(4)$ に対して

$$(P(1) \wedge (P(1) \rightarrow P(2)) \wedge (P(2) \rightarrow P(3)) \wedge (P(3) \rightarrow P(4))) \\ \Rightarrow (P(1) \wedge P(2) \wedge P(3))$$

証明： $P(1), P(1) \rightarrow P(2), P(2) \rightarrow P(3), P(3) \rightarrow P(4)$ を仮定する

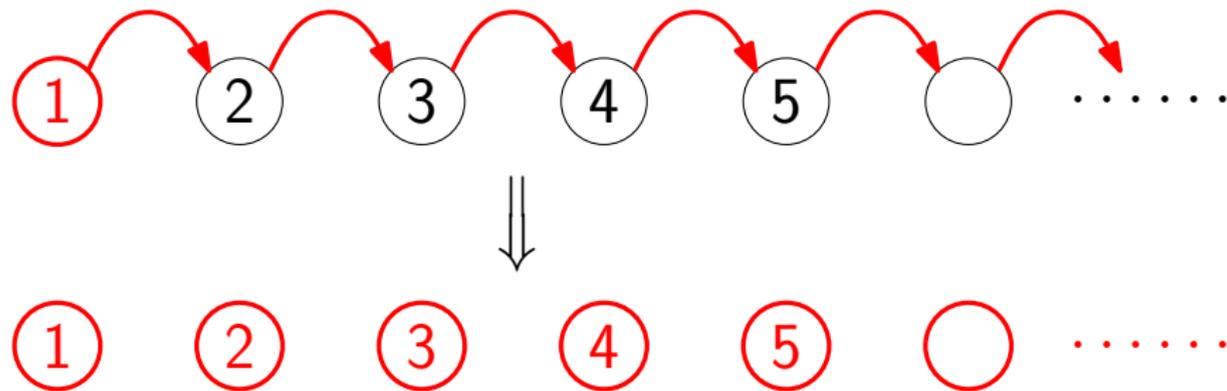
- ▶ $P(1)$ と $P(1) \rightarrow P(2)$ より, $P(2)$ は成り立つ。
- ▶ $P(2)$ が成り立つので, それと $P(2) \rightarrow P(3)$ より, $P(3)$ が成り立つ。
- ▶ したがって, $P(1), P(2), P(3)$ はすべて成り立つ。 □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス) (推論の類型：第6回講義)

任意の命題変数 P, Q に対して

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

数学的帰納法：論理に関する補足 — イメージ



例題 2

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $2n = 2 \leq 2 = 2^n$
- ▶ $n = 2$ のとき : $2n = 4 \leq 4 = 2^n$
- ▶ $n = 3$ のとき : $2n = 6 \leq 8 = 2^n$
- ▶ $n = 4$ のとき : $2n = 8 \leq 16 = 2^n$
- ▶ ...

注 : これはただの確認であり, 証明ではない

例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず, $n = 1$ のときに正しいことを証明する.

例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず, $n = 1$ のときに正しいことを証明する.▶ 左辺 = $2n = 2$.

例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず, $n = 1$ のときに正しいことを証明する.

- ▶ 左辺 = $2n = 2$.
- ▶ 右辺 = $2^n = 2$.

例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず, $n = 1$ のときに正しいことを証明する.

- ▶ 左辺 = $2n = 2$.
- ▶ 右辺 = $2^n = 2$.
- ▶ したがって, $2n \leq 2^n$ であり, 正しい.

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える.

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である.
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える.

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である.
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える.

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である.
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$
 $\leq 2^k + 2$ (帰納法の仮定から)

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える.

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である.
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$
 $\leq 2^k + 2$ (帰納法の仮定から)
 $\leq 2^k + 2^k$ ($k \geq 1$ であるから)

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える.

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である.
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$
 $\leq 2^k + 2$ (帰納法の仮定から)
 $\leq 2^k + 2^k$ ($k \geq 1$ であるから)
 $= 2 \cdot 2^k$

例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える.

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である.
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$
 $\leq 2^k + 2$ (帰納法の仮定から)
 $\leq 2^k + 2^k$ ($k \geq 1$ であるから)
 $= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$



例題 3 : 数学的帰納法の変種

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

確認

- ▶ $n = 3$ のとき : $6n = 18 < 27 = 3^n$
- ▶ $n = 4$ のとき : $6n = 24 < 81 = 3^n$
- ▶ $n = 5$ のとき : $6n = 30 < 243 = 3^n$
- ▶ ...

例題 3 : 数学的帰納法の変種

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

確認

- ▶ $n = 3$ のとき : $6n = 18 < 27 = 3^n$
- ▶ $n = 4$ のとき : $6n = 24 < 81 = 3^n$
- ▶ $n = 5$ のとき : $6n = 30 < 243 = 3^n$
- ▶ ...

注意 : 証明の方法

数学的帰納法を $n = 1$ から始めず, $n = 3$ から始める

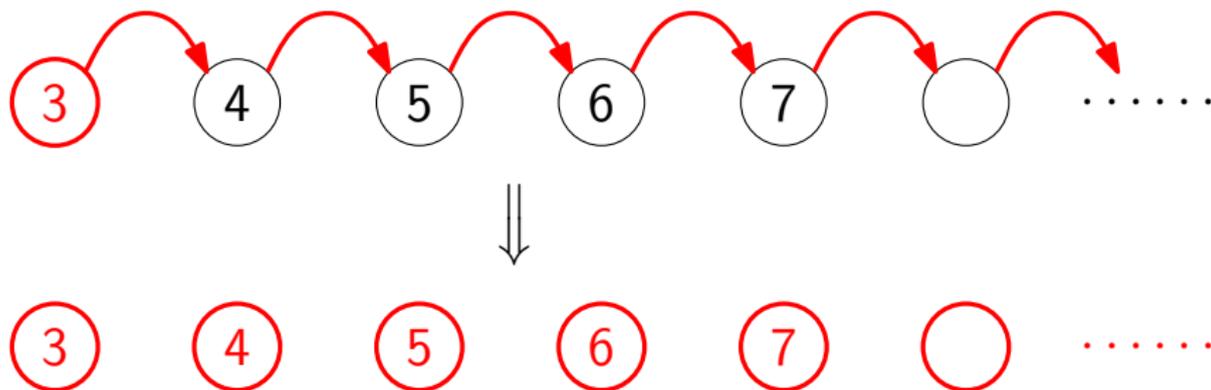
例題 3 : 数学的帰納法のイメージ

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.



例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず, $n = 3$ のときに正しいことを証明する.

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず, $n = 3$ のときに正しいことを証明する.

▶ 左辺 = $6n = 18$.

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず, $n = 3$ のときに正しいことを証明する.

- ▶ 左辺 = $6n = 18$.
- ▶ 右辺 = $3^n = 27$.

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず, $n = 3$ のときに正しいことを証明する.

- ▶ 左辺 = $6n = 18$.
- ▶ 右辺 = $3^n = 27$.
- ▶ したがって, $n = 3$ のとき $6n < 3^n$ となり, 正しい.

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数 k を考える.

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $6(k+1) < 3^{k+1}$ である.

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数 k を考える.

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $6(k+1) < 3^{k+1}$ である.
- ▶ $6(k+1) = 6k + 6$

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数 k を考える.

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $6(k+1) < 3^{k+1}$ である.
- ▶ $6(k+1) = 6k + 6$
 $< 3^k + 3 + 3$ (帰納法の仮定から)

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数 k を考える.

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $6(k+1) < 3^{k+1}$ である.
- ▶ $6(k+1) = 6k + 6$

$$\begin{aligned}
 &< 3^k + 3 + 3 && \text{(帰納法の仮定から)} \\
 &< 3^k + 3^k + 3^k && \text{(} k \geq 3 \text{ であるから)}
 \end{aligned}$$

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数 k を考える.

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $6(k+1) < 3^{k+1}$ である.
- ▶ $6(k+1) = 6k + 6$
 $< 3^k + 3 + 3$ (帰納法の仮定から)
 $< 3^k + 3^k + 3^k$ ($k \geq 3$ であるから)
 $= 3^{k+1}$.



目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21,

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

 $n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21,

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 151

$$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 151

$$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ 「...」 はあいまい

クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 151

$$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ 「...」 はあいまい

格言

情報科学の本質の1つは「『無意識』を意識すること」

階乗

階乗とは？ (常識に基づく定義)

正の整数 n に対して、 n の階乗とは

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

のこと

この定義の問題点

- ▶ 「…」はあいまい

あいまいさのないように定義するには？

階乗：再帰的定義

階乗とは？ (再帰的定義)

正の整数 n に対して、 n の階乗とは

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n - 1)! & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

のこと

実際の計算

- ▶ $n = 1$ のとき : $1! = 1$
- ▶ $n = 2$ のとき : $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- ▶ $n = 3$ のとき : $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- ▶ $n = 4$ のとき : $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- ▶ ...

例題 4 : 再帰的定義

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $a_1 = 1$
- ▶ $n = 2$ のとき : $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
- ▶ $n = 3$ のとき : $a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$
- ▶ ...

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (基底段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (基底段階): まず, $n = 1$ のときを証明する.

- ▶ 左辺 = $a_1 = 1$.
- ▶ 右辺 = $2 \cdot 1 - 1 = 1$.
- ▶ したがって, $n = 1$ のとき $a_n = 2n - 1$ となる.

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数 k を考える.

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $a_{k+1} = 2(k+1) - 1$.

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数 k を考える.

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $a_{k+1} = 2(k+1) - 1$.
- ▶ $a_{k+1} = a_k + 2$

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数 k を考える.

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $a_{k+1} = 2(k+1) - 1$.
- ▶ $a_{k+1} = a_k + 2$
 $= (2k - 1) + 2$ (帰納法の仮定から)

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階): 次に任意の正の整数 k を考える.

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $a_{k+1} = 2(k+1) - 1$.
- ▶ $a_{k+1} = a_k + 2$
 $= (2k - 1) + 2$ (帰納法の仮定から)
 $= 2(k+1) - 1$.



再帰的定義の例：フィボナッチ数

フィボナッチ数とは？

任意の正の整数 n に対して、第 n 番フィボナッチ数 F_n を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $F_1 = 1$
- ▶ $n = 2$ のとき : $F_2 = 1$
- ▶ $n = 3$ のとき : $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$
- ▶ $n = 4$ のとき : $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$
- ▶ $n = 5$ のとき : $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$
- ▶ ...

フィボナッチ数の性質

例題 5 (カッシーニの恒等式)

第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき, 任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (基底段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき、任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(基底段階) $n = 1$ の場合を証明する.

- ▶ 左辺 = $F_2^2 - F_3F_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$.
- ▶ 右辺 = $(-1)^1 = -1$.
- ▶ したがって、 $n = 1$ のとき $F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$ は成り立つ

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に、1 以上の任意の正の整数 k を考える。

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ である。

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

例題 5（カッシーニの恒等式）

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：（帰納段階）次に、1 以上の任意の正の整数 k を考える。

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ である。
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

例題 5（カッシーニの恒等式）

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：（帰納段階）次に、1 以上の任意の正の整数 k を考える。

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ である。
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ （フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から）

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

例題 5（カッシーニの恒等式）

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：（帰納段階）次に、1 以上の任意の正の整数 k を考える。

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ である。
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$

$$= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1} \quad (\text{フィボナッチ数の定義と } k+3 > 2 \text{ から})$$

$$= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 \quad (\text{展開して整理})$$

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

例題 5（カッシーニの恒等式）

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：（帰納段階）次に、1 以上の任意の正の整数 k を考える。

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ である。
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ （フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から）
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ （展開して整理）
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ （帰納法の仮定から）

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

例題 5（カッシーニの恒等式）

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：（帰納段階）次に、1 以上の任意の正の整数 k を考える。

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ である。
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ （フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から）
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ （展開して整理）
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ （帰納法の仮定から）
 - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$ （因数分解して整理）

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

例題 5（カッシーニの恒等式）

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：（帰納段階）次に、1 以上の任意の正の整数 k を考える。

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ である。
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ （フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から）
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ （展開して整理）
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ （帰納法の仮定から）
 - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$ （因数分解して整理）
 - $= (-1)^{k+1}$ 。（フィボナッチ数の定義と $k+2 > 2$ から）

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

例題 5（カッシーニの恒等式）

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：（帰納段階）次に、1 以上の任意の正の整数 k を考える。

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ である。
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ （フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から）
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ （展開して整理）
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ （帰納法の仮定から）
 - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$ （因数分解して整理）
 - $= (-1)^{k+1}$ 。（フィボナッチ数の定義と $k+2 > 2$ から）

□

フィボナッチ数の公式

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明の注意点

- ▶ F_n は F_{n-1}, F_{n-2} を使って定義される
- ▶ よって、(1つ前だけ仮定する) 普通の帰納法では証明できない
- ▶ よって、もっと強い証明の仕方が必要となる
- ▶ 基底段階も $n=1$ のときと $n=2$ のときの2つが必要となる

数学的帰納法の強いバージョン

数学的帰納法の強いバージョン (累積帰納法とも呼ばれる)

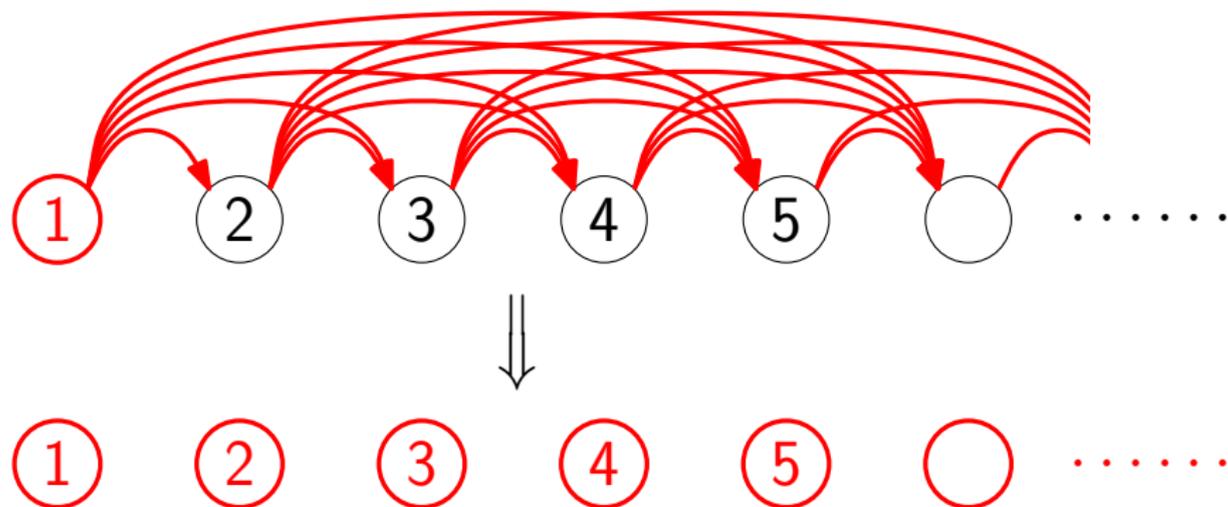
[基底段階]

- ▶ $P(1)$ を証明する

[帰納段階] 任意の正の整数 k を考える

- ▶ 1 以上 k 以下の任意の正の整数 k' に対して $P(k')$ を仮定する
 - ▶ $P(k+1)$ を証明する
-
- ▶ 前のバージョンでは帰納段階で「 $P(k)$ 」のみを仮定した
 - ▶ フィボナッチ数に関する証明では基底段階が $P(1)$ と $P(2)$ になる

数学的帰納法の強いバージョン：イメージ



フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（基底段階 1）

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：まず、 $n = 1$ のときを証明する。

- ▶ 左辺 = $F_1 = 1$.
- ▶ 右辺 = $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- ▶ したがって、 $n = 1$ のときは正しい。

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（基底段階 2）

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：次に、 $n=2$ のときを証明する。

- ▶ 左辺 = $F_2 = 1$.
- ▶ 右辺 = $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right)$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- ▶ したがって、 $n=2$ のときは正しい。

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 1）

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明： k を 2 以上の任意の整数とする。

- ▶ 1 以上 k 以下の任意の整数 k' に対して，

$$F_{k'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k'} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k'} \right) \text{ と仮定する.}$$

- ▶ 証明すべきことは， $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$ である。

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$F_{k+1}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \quad (\text{フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2)$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\ &&& \text{(帰納法の仮定)} \end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
 &&& \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) \\
 &&& \text{(式の整理)}
 \end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) && \text{(式の整理)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) && \text{(式の整理)}
 \end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) && \text{(式の整理)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) && \text{(式の整理)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) && \text{(式の整理)}
 \end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) && \text{(式の整理)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) && \text{(式の整理)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) && \text{(式の整理)}
 \end{aligned}$$

したがって、 $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$ となる。 \square

どうしてこのような数学的帰納法になるのか？

疑問

どうして

- ▶ 累積帰納法を使うのか？
- ▶ $n = 1, 2$ の場合を基底段階にしないといけないのか？

証明を行う際の下書きを考えれば分かる

格言

数学的帰納法で証明するとき、下書きは帰納段階から始める

フィボナッチ数の公式：証明の下書き (1)

帰納段階で証明する目標

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
 & && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：証明の下書き (1)

帰納段階で証明する目標

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
 & && \text{(帰納法の仮定)}
 \end{aligned}$$

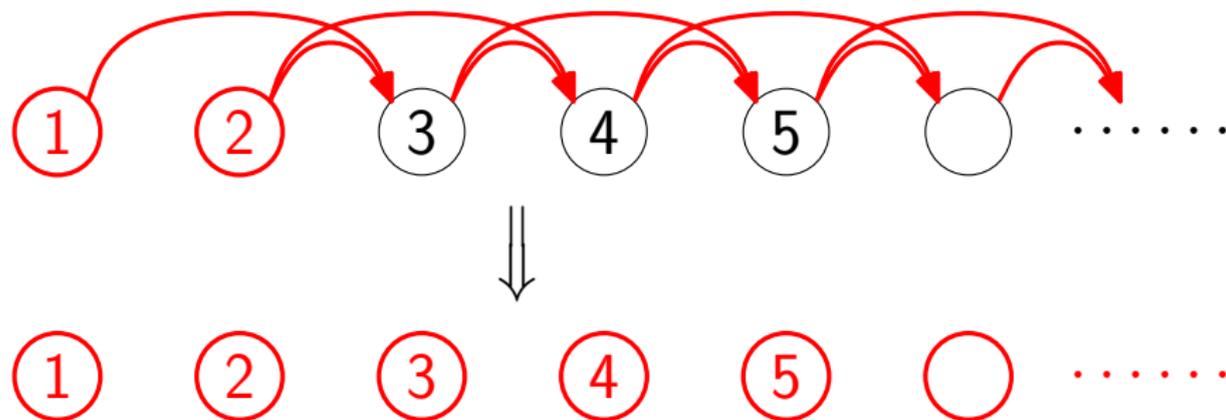
= ...

つまり、 $n = k + 1$ の場合の証明では、次の2つを仮定しないと行けない

- ▶ $n = k$ の場合
- ▶ $n = k - 1$ の場合

ここから、普通の数学的帰納法では足りないことが分かる

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法のイメージ



フィボナッチ数の公式：証明の下書き (2)

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
 & && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：証明の下書き (2)

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
 & && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

仮に、 $n = k + 1 = 2$ の場合を考えると、次の2つを仮定することになる

- ▶ $n = k = 1$ の場合
- ▶ $n = k - 1 = 0$ の場合

フィボナッチ数の公式：証明の下書き (2)

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
 & && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

仮に、 $n = k + 1 = 2$ の場合を考えると、次の2つを仮定することになる

- ▶ $n = k = 1$ の場合
- ▶ $n = k - 1 = 0$ の場合

しかし、 $n = 0$ の場合は考えないので、 $n = k + 1 = 2$ にはできない

- ▶ つまり、帰納段階は $n = k + 1 \geq 3$ の場合であり、
- ▶ $n = k + 1 = 2$ のときは基底段階にしないといけない

フィボナッチ数の公式：証明の下書き (2)

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
 & && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

仮に、 $n = k + 1 = 2$ の場合を考えると、次の2つを仮定することになる

- ▶ $n = k = 1$ の場合
- ▶ $n = k - 1 = 0$ の場合

しかし、 $n = 0$ の場合は考えないので、 $n = k + 1 = 2$ にはできない

- ▶ つまり、帰納段階は $n = k + 1 \geq 3$ の場合であり、
- ▶ $n = k + 1 = 2$ のときは基底段階にしないといけない

下書きから分かった行うべき数学的帰納法

- ▶ 基底段階： $n = 1, 2$ の場合
- ▶ 帰納段階： $k \geq 2$ として、累積帰納法

目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 数学的帰納法で証明ができるようになる
- ▶ 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ