

離散数学 第 10 回
関係 (1) : 関係

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 1 月 23 日

最終更新 : 2017 年 1 月 20 日 11:31

スケジュール 前半

- | | | |
|---|--|----------|
| 1 | 集合と論理 (1) : 命題論理 | (10月3日) |
| * | 体育の日 | (10月10日) |
| 2 | 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 | (10月17日) |
| 3 | 集合と論理 (3) : 述語論理 | (10月24日) |
| 4 | 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 | (10月31日) |
| * | 休講 | (11月7日) |
| 5 | 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 | (11月14日) |
| 6 | 証明法 (3) : 集合に関する証明 | (11月21日) |
| * | 調布祭片付け | (11月28日) |
| 7 | 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 | (12月5日) |
| ● | 中間試験 | (12月12日) |

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|----------------------|----------|
| 8 | 写像 (1) : 像と逆像 | (12月19日) |
| 9 | 写像 (2) : 全射と単射 | (1月16日) |
| 10 | 関係 (1) : 関係 | (1月23日) |
| 11 | 関係 (2) : 同値関係 | (1月30日) |
| 12 | 関係 (3) : 順序関係 | (2月6日) |
| 13 | 証明法 (4) : 数学的帰納法 | (2月8日) |
| 14 | 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 | (2月13日) |
| | ● 期末試験 | (2月20日?) |

注意：予定の変更もありうる

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 関係を理解する
- ▶ 関係の性質を理解し, それらを持つかどうか判定できる
 - ▶ 反射性, 完全性, 対称性, 反対称性, 推移性
- ▶ 特殊な関係を理解し, それらの例を挙げられる
 - ▶ 順序 (半順序), 全順序, 同値関係

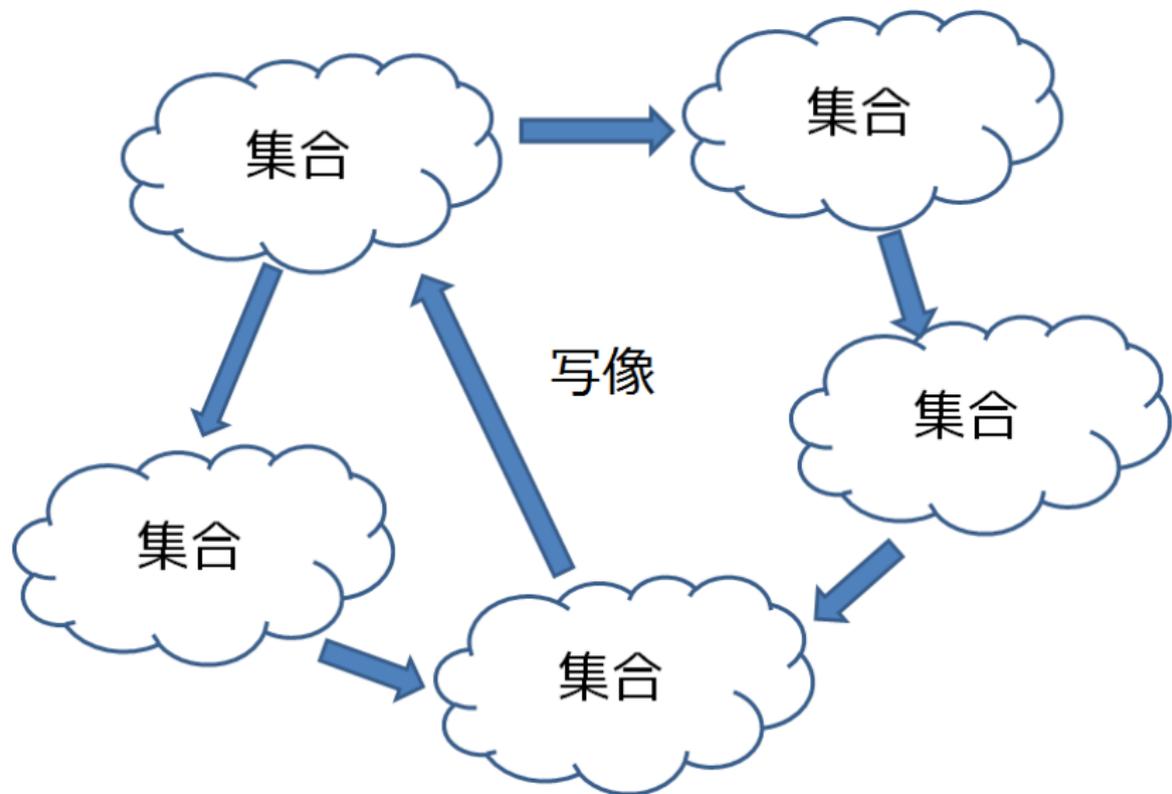
集合

集合

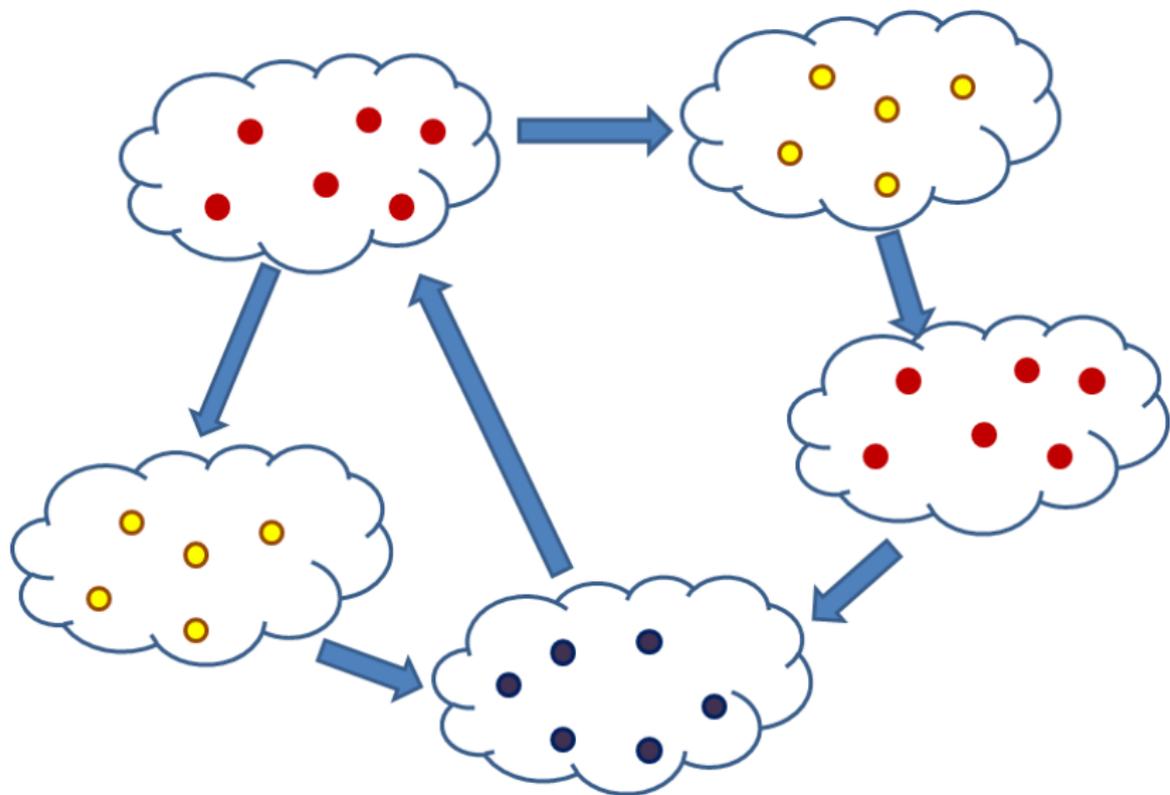
集合

集合

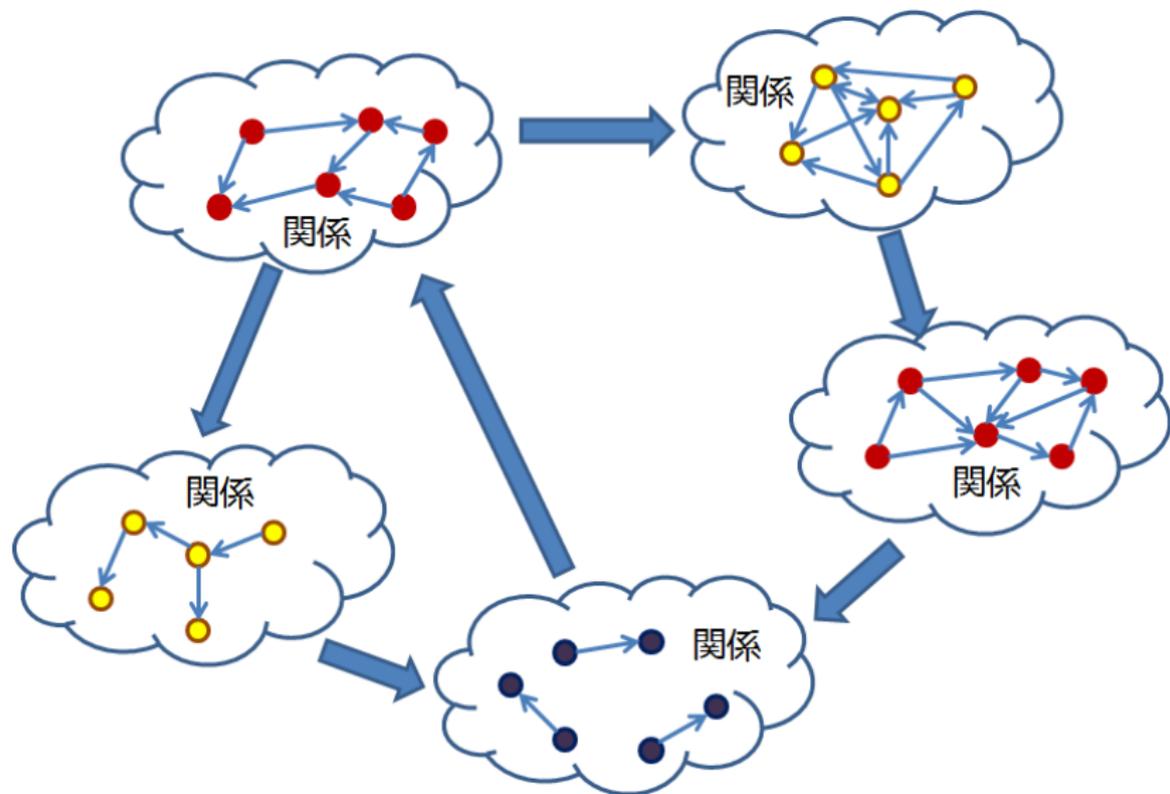
集合



ここまでのまとめ と ここからの話



ここまでのまとめとここからの話



目次

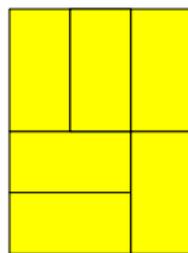
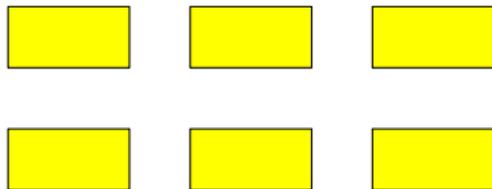
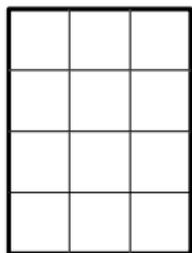
- ① 関係：集合の「構造」を見るための道具
- ② 関係
- ③ 関係の性質
- ④ 順序と同値関係
- ⑤ 今日のまとめ

タイル張り

問題

4×3 の長方形の中に 2×1 の長方形を 6 個敷き詰める方法は全部で何通りあるか？

2×1 の長方形は回転させてもよい

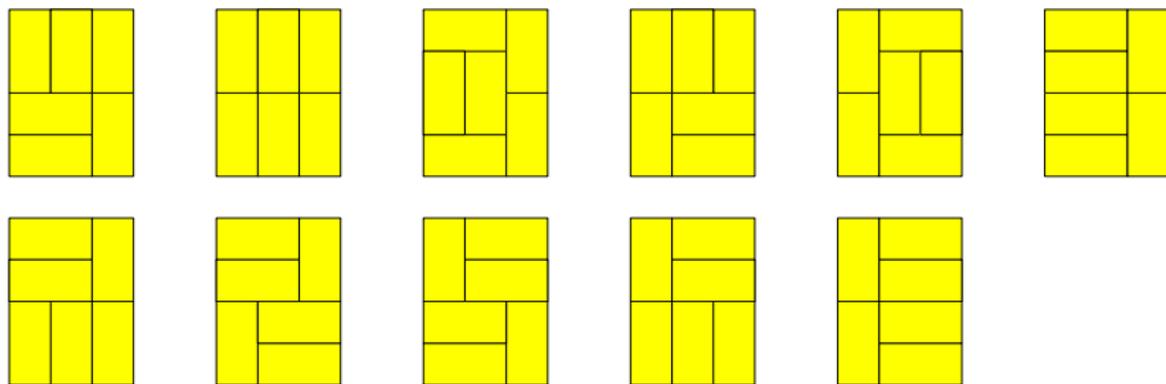


タイル張り

問題

4×3 の長方形の中に 2×1 の長方形を 6 個敷き詰める方法は全部で何通りあるか？

答え：11 個

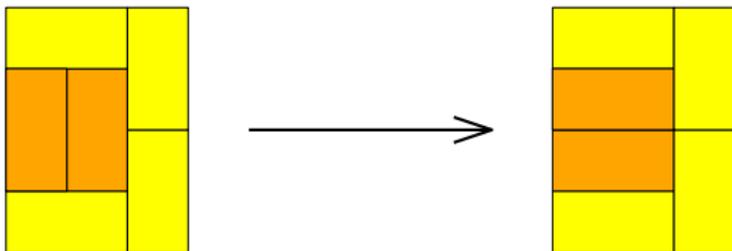


疑問

どうやって見つける？ \rightsquigarrow 頑張ってみつける？

タイル張り：局所変更

- ▶ タイル張りにおいて、 2×1 の長方形2個によって 2×2 の正方形が作られている部分があるとする
- ▶ その2つの長方形の向きを変えると、別のタイル張りが得られる

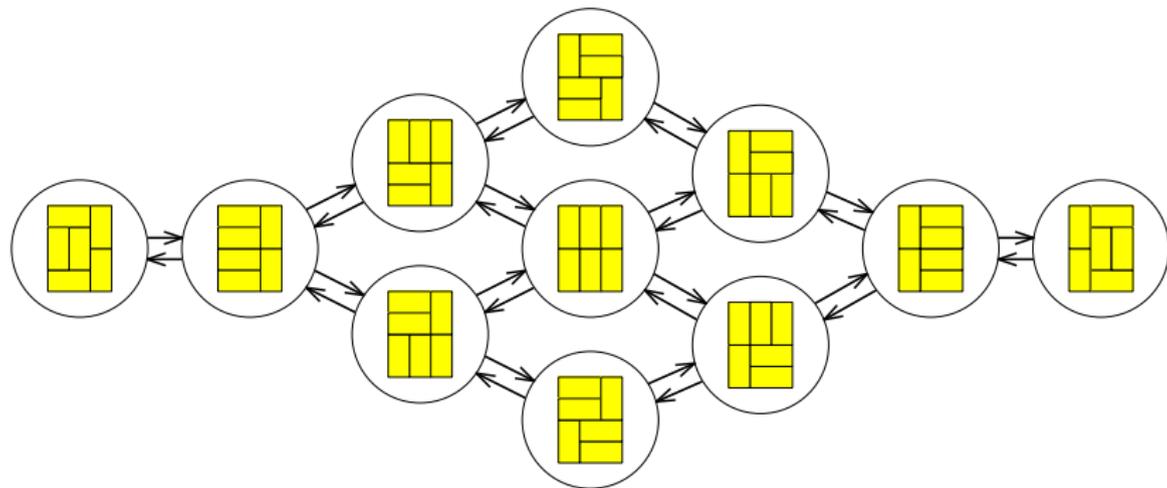


2つのタイル張りは、
この局所変更によって移りあう、という 関係 を持っている

タイル張り：局所変更

知られていること (証明はしない)

この局所変更を繰り返していくと，全てのタイル張りが得られる

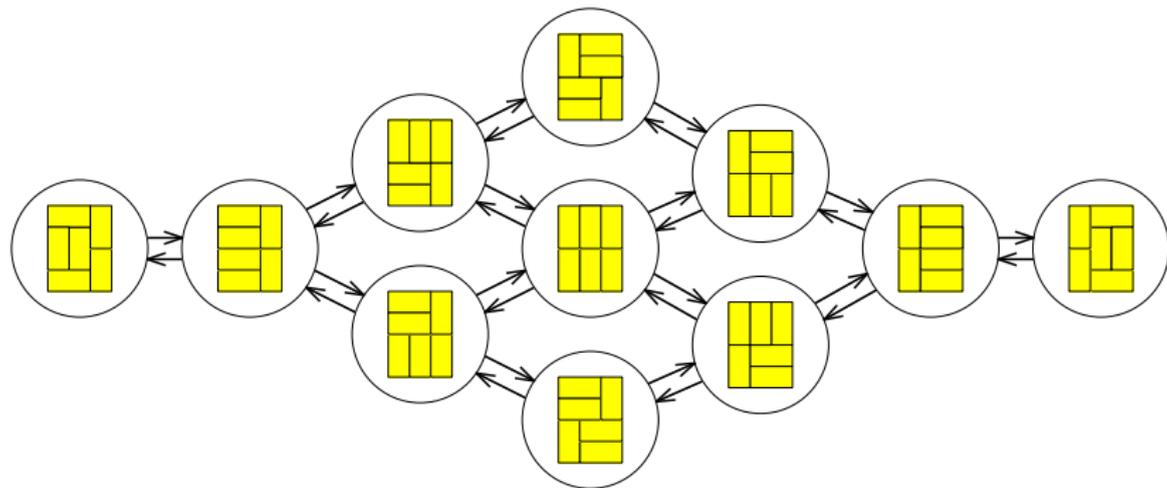


つまり，可能な局所変更をすべて考えれば，
11通りのタイル張りが得られ，他にはないことも分かる

タイル張り：局所変更

知られていること (証明はしない)

この局所変更を繰り返していくと，全てのタイル張りが得られる



格言

集合の構造を調べて，集合の性質を深く理解する

目次

- ① 関係：集合の「構造」を見るための道具
- ② 関係
- ③ 関係の性質
- ④ 順序と同値関係
- ⑤ 今日のまとめ

関係とは？

集合 A

関係とは？ (常識に基づく定義)

 A 上の**関係**は次のように定められるもの

- ▶ 関係を表す記号「 R 」がある (例えば, \leq や $=$ や \subseteq)
- ▶ 任意の $x, y \in A$ に対して
「 $x R y$ 」が成り立つか成り立たないか, のどちらか

注: $x R y$ が成り立っても, $y R x$ が成り立つとは限らない

例 1

例 1

- ▶ $A = \{1, 2, 3, 6\}$
- ▶ 任意の $x, y \in A$ に対して
 $x | y$ であることを x は y の約数である
 と定義する

集合 A 上の「 $|$ 」という関係

▶ $1 1$	○	▶ $2 1$	×	▶ $3 1$	×	▶ $6 1$	×
▶ $1 2$	○	▶ $2 2$	○	▶ $3 2$	×	▶ $6 2$	×
▶ $1 3$	○	▶ $2 3$	×	▶ $3 3$	○	▶ $6 3$	×
▶ $1 6$	○	▶ $2 6$	○	▶ $3 6$	○	▶ $6 6$	○

補足：整数の整除関係

\mathbb{Z}_+ = 1以上の整数をすべて集めた集合

整数の整除関係

整数 $x, y \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

- ▶ ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して

$$y = xp$$

と書けるとき, x は y の約数であるという

関係の表現法 (1) : 写像

写像としての関係の表現

A 上の関係 R を写像 $A^2 \rightarrow \{ \circ, \times \}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \circ & (x R y \text{ のとき}) \\ \times & (x R y \text{ ではないとき}) \end{cases}$$

で表現する

例 1 の場合

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| ▶ $(1, 1) \mapsto \circ$ | ▶ $(2, 1) \mapsto \times$ | ▶ $(3, 1) \mapsto \times$ | ▶ $(6, 1) \mapsto \times$ |
| ▶ $(1, 2) \mapsto \circ$ | ▶ $(2, 2) \mapsto \circ$ | ▶ $(3, 2) \mapsto \times$ | ▶ $(6, 2) \mapsto \times$ |
| ▶ $(1, 3) \mapsto \circ$ | ▶ $(2, 3) \mapsto \times$ | ▶ $(3, 3) \mapsto \circ$ | ▶ $(6, 3) \mapsto \times$ |
| ▶ $(1, 6) \mapsto \circ$ | ▶ $(2, 6) \mapsto \circ$ | ▶ $(3, 6) \mapsto \circ$ | ▶ $(6, 6) \mapsto \circ$ |

関係の表現法 (2) : 直積の部分集合

集合としての関係の表現

A 上の関係 R を直積の部分集合

$$\{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in A \text{ かつ } x R y\} \subseteq A^2$$

で表現する

例 1 の場合

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)\}$$

関係の表現法 (3) : 行列

行列としての関係の表現

A 上の関係 R を行列 $M \in \{0, 1\}^{A \times A}$ で

$$M_{x,y} = \begin{cases} 1 & (x R y \text{ のとき}) \\ 0 & (x R y \text{ ではないとき}) \end{cases}$$

と定義されるもので表現する (「関係行列」と呼ばれることがある)

例 1 の場合

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 6 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

関係の表現法 (4) : グラフ

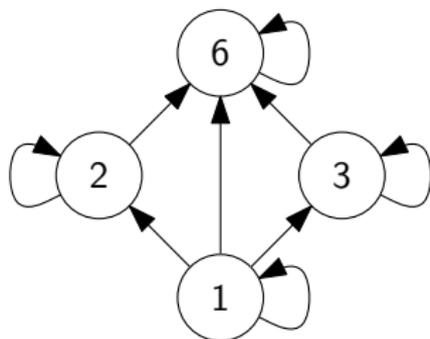
グラフとしての関係の表現

A 上の関係 R を

- ▶ 頂点集合を A として,
- ▶ $x R y$ であるとき, そのときに限り $x \rightarrow y$ という矢印を引く

グラフで表現する

例 1 の場合

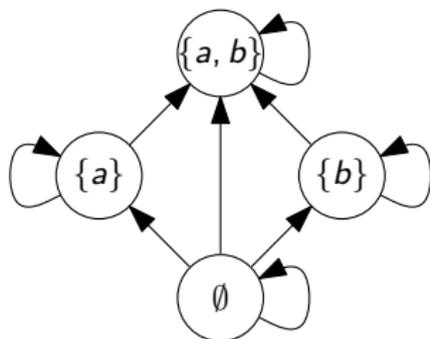


例 2

例 2

- ▶ $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- ▶ 任意の $X, Y \in A$ に対して
 $X \subseteq Y$ であることを X は Y の部分集合であると定義する

集合 A 上の「 \subseteq 」という関係

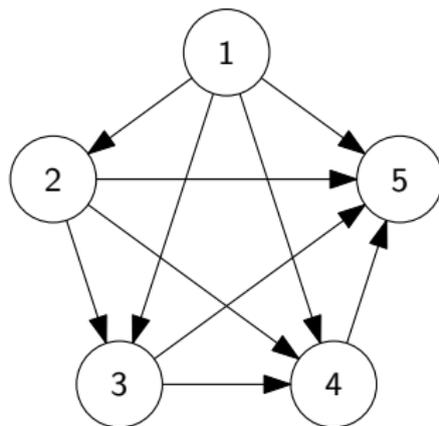


例 3

例 3

- ▶ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ 任意の $x, y \in A$ に対して
 $x < y$ であることを x は y より小さい
と定義する

集合 A 上の「 $<$ 」という関係

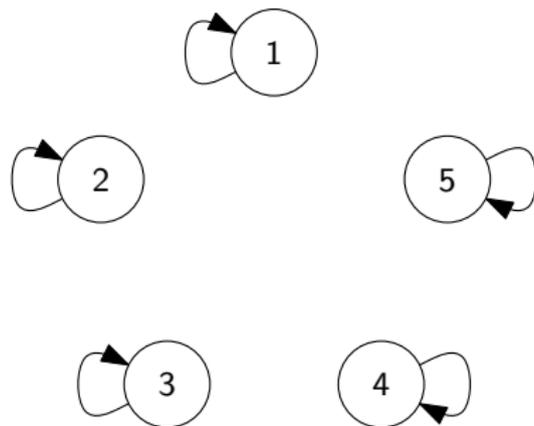


例 4

例 4

- ▶ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ 任意の $x, y \in A$ に対して
 $x = y$ であることを x は y と等しい
と定義する

集合 A 上の「 $=$ 」という関係

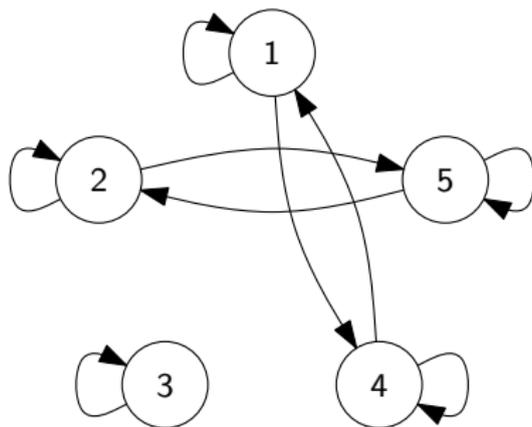


例 5

例 5

- ▶ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ 任意の $x, y \in A$ に対して
$$x \equiv_3 y \text{ であることを } x \equiv y \pmod{3}$$
と定義する

集合 A 上の「 \equiv_3 」という関係



補足：合同な整数

合同な整数

0 以上の整数 m, n と 1 以上の整数 p を考える

- ▶ $m - n$ が p で割り切れるとき、すなわち、ある整数 q が存在して

$$m - n = pq$$

と書けるとき、 $m \equiv n \pmod{p}$ と表記する

- ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ であるとき
「 m と n は p を法として合同である」という

例：

- ▶ 5 と 11 は 3 を法として合同である
 - ▶ $\because 5 - 11 = -6 = 3 \cdot (-2)$
- ▶ 15869 と 6832 は 1291 を法として合同である
 - ▶ $\because 15869 - 6832 = 9037 = 1291 \cdot 7$

目次

- ① 関係：集合の「構造」を見るための道具
- ② 関係
- ③ 関係の性質**
- ④ 順序と同値関係
- ⑤ 今日のまとめ

関係の性質

関係を考えると何がよいのか？

- ▶ 関係を使って、集合の持つ構造を捉えることができる
- ▶ 2つの集合の上のある関係が同じ性質を持つと、関係を使って、集合どうしを比較できるようになる

⇒ 関係の性質を考えたい

関係の性質

関係を考えると何がよいのか？

- ▶ 関係を使って、集合の持つ構造を捉えることができる
- ▶ 2つの集合の上のある関係が同じ性質を持つと、関係を使って、集合どうしを比較できるようになる

⇒ 関係の性質を考えたい

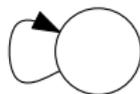
よく出てくる性質

- ▶ 反射性
- ▶ 完全性
- ▶ 対称性
- ▶ 反対称性
- ▶ 推移性

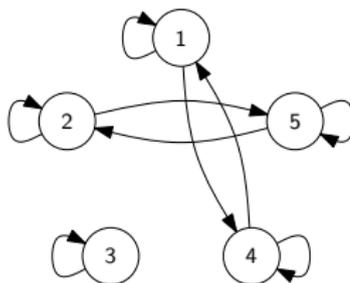
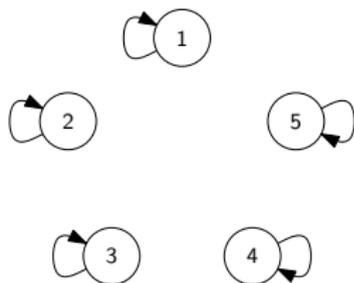
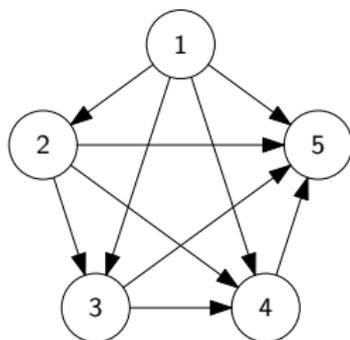
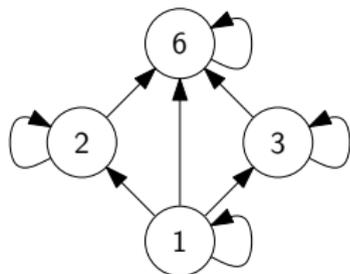
反射性

集合 A と A 上の関係 R

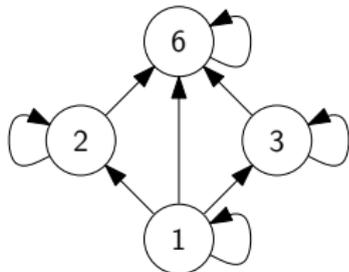
反射性とは？

 R が**反射性**を持つとは、次を満たすこと任意の $x \in A$ に対して $x R x$ 

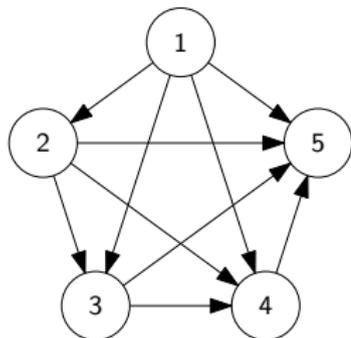
反射性を持つのはどれ？



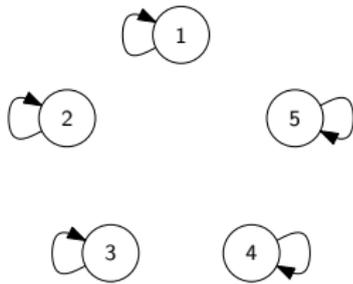
反射性を持つのはどれ？



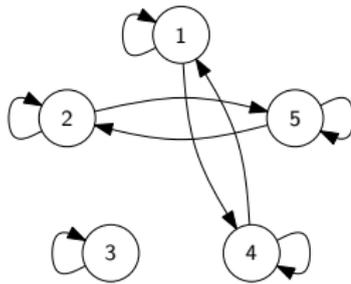
持つ



持たない



持つ

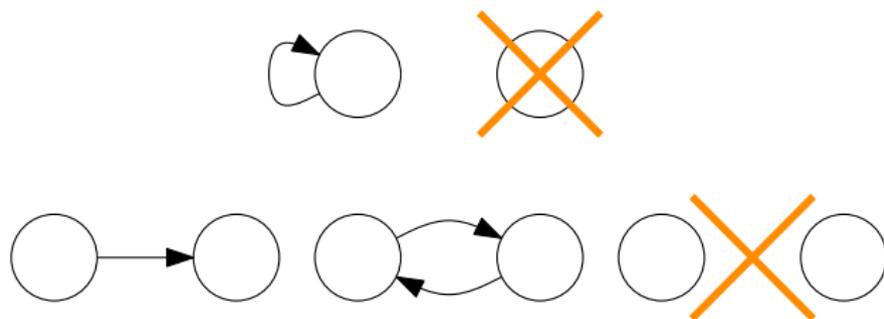


持つ

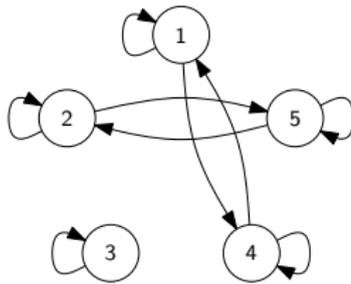
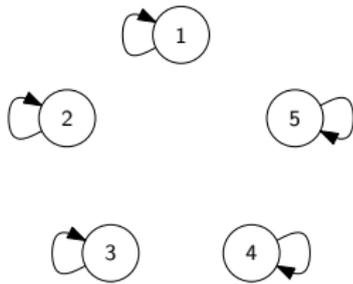
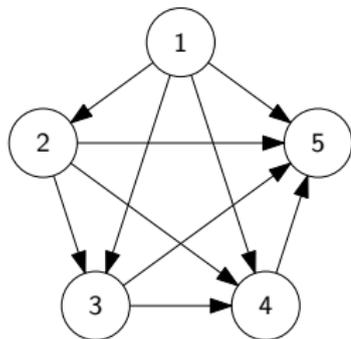
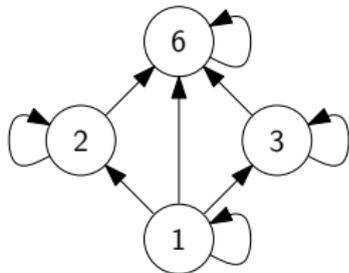
完全性

集合 A と A 上の関係 R

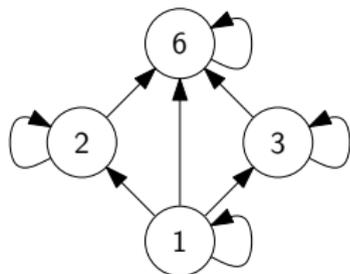
完全性とは？

 R が**完全性**を持つとは、次を満たすこと任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ または $y R x$ 

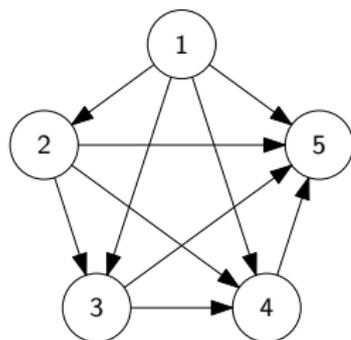
完全性を持つのはどれ？



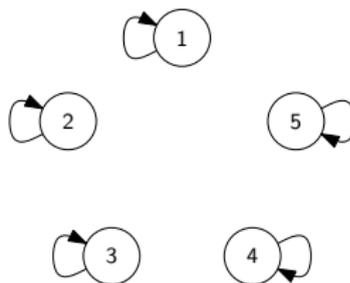
完全性を持つのはどれ？



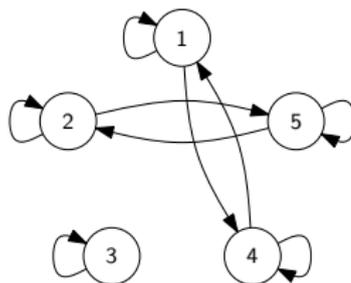
持たない



持たない



持たない

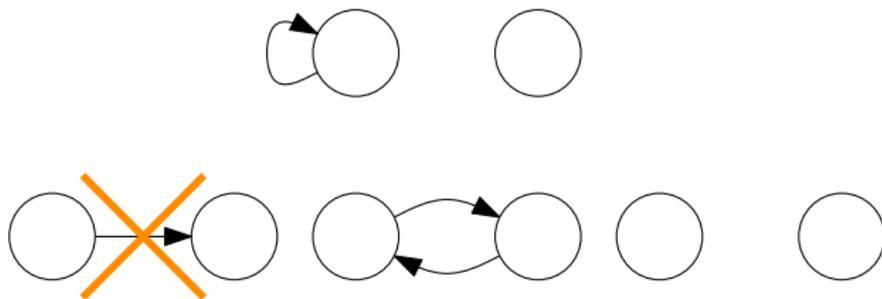


持たない

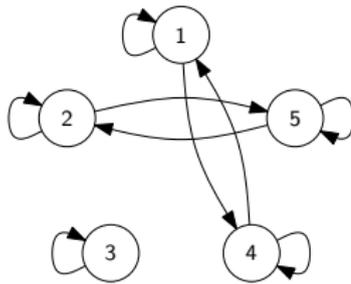
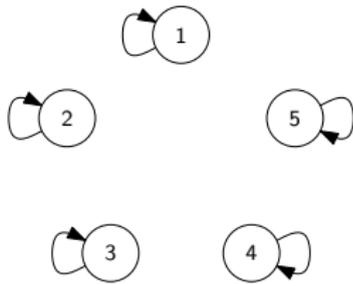
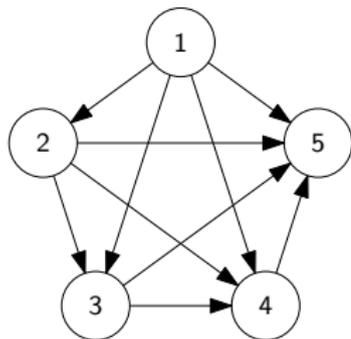
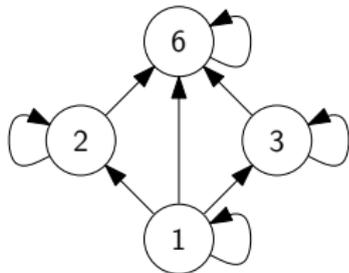
対称性

集合 A と A 上の関係 R

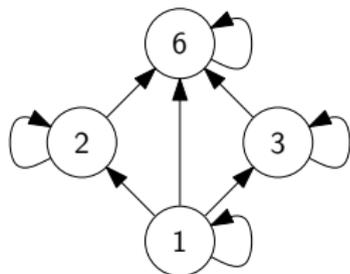
対称性とは？

 R が**対称性**を持つとは、次を満たすこと任意の $x, y \in A$ に対して $x R y$ ならば $y R x$ 

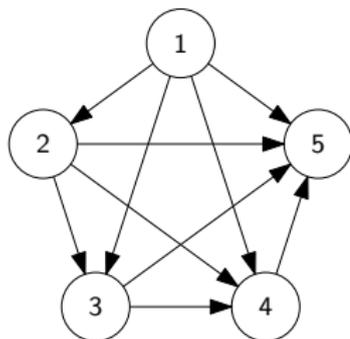
対称性を持つのはどれ？



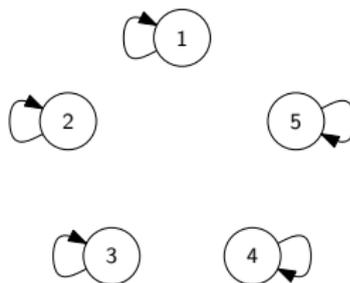
対称性を持つのはどれ？



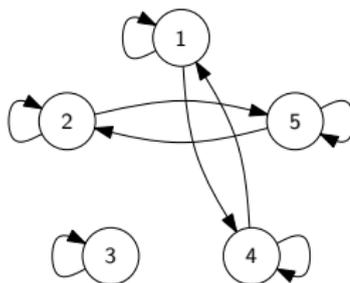
持たない



持たない



持つ

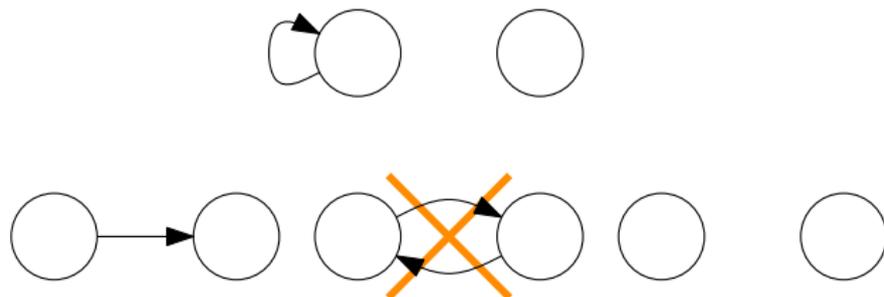


持つ

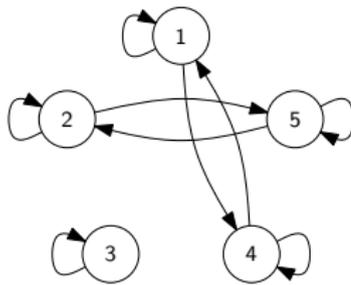
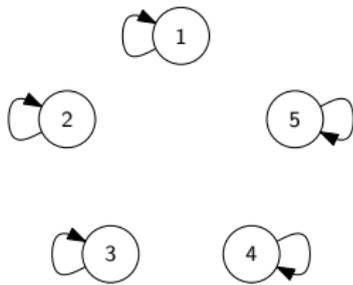
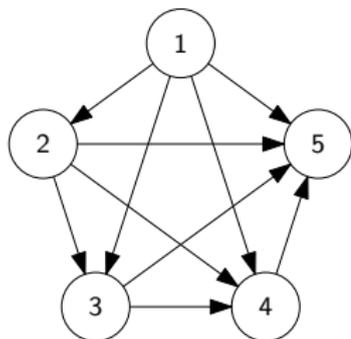
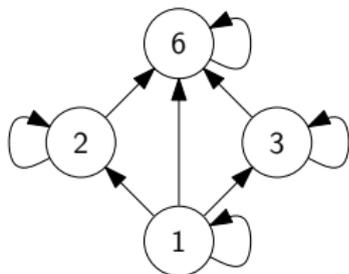
反対称性

集合 A と A 上の関係 R

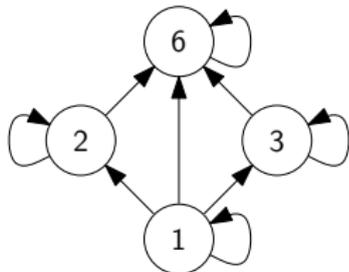
反対称性とは？

 R が**反対称性**を持つとは、次を満たすこと任意の $x, y \in A$ に対して xRy かつ yRx ならば $x = y$ 

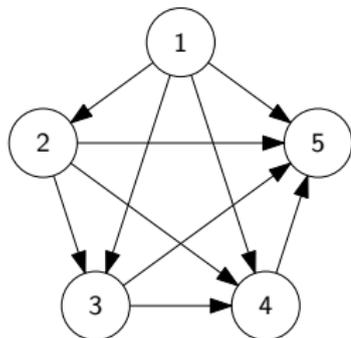
反対称性を持つのはどれ？



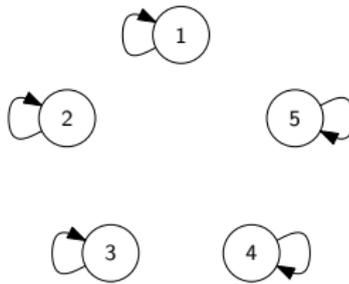
反対称性を持つのはどれ？



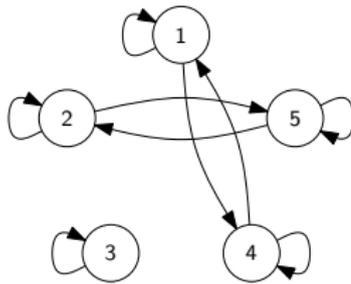
持つ



持つ



持つ

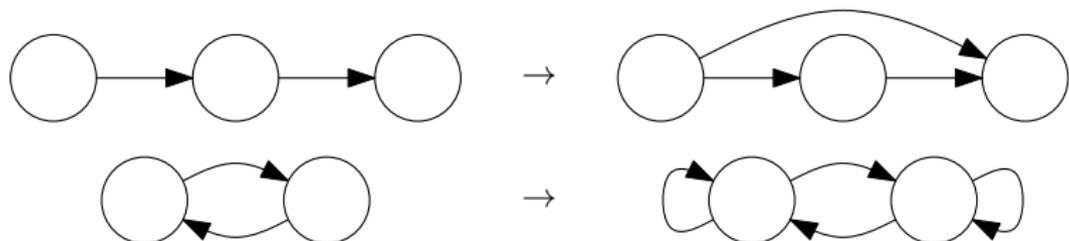


持たない

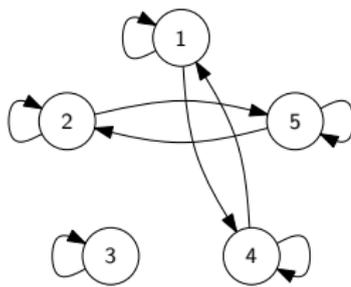
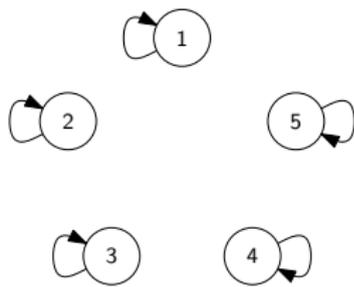
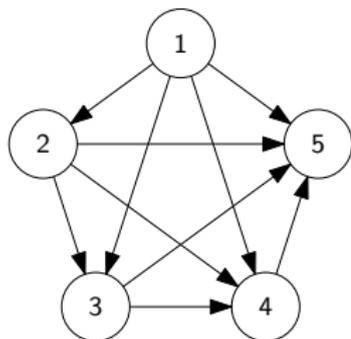
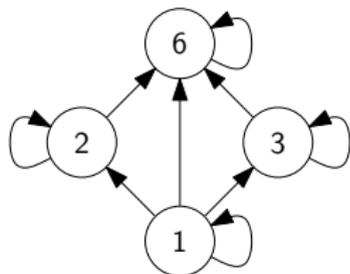
推移性

集合 A と A 上の関係 R

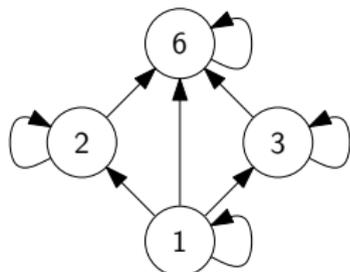
推移性とは？

 R が推移性を持つとは、次を満たすこと任意の $x, y, z \in A$ に対して xRy かつ yRz ならば xRz 

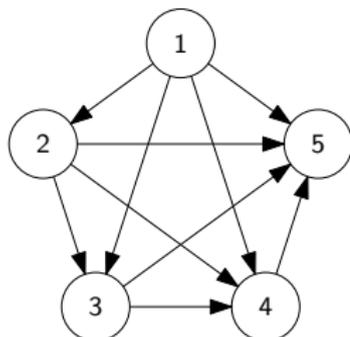
推移性を持つのはどれ？



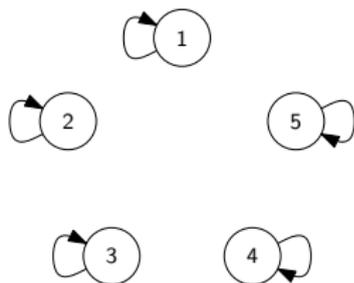
推移性を持つのはどれ？



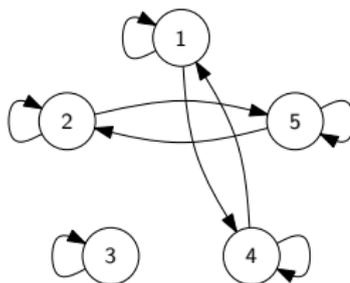
持つ



持つ



持つ



持つ

目次

- ① 関係：集合の「構造」を見るための道具
- ② 関係
- ③ 関係の性質
- ④ 順序と同値関係
- ⑤ 今日のまとめ

半順序

集合 A と A 上の関係 R

半順序とは？

R が半順序であるとは、次を満たすこと

- ▶ R は反射性を持つ
- ▶ R は反対称性を持つ
- ▶ R は推移性を持つ

例 1~5 の中で、例 1, 2 は半順序

代表的な半順序 (1)

代表的な半順序 (1) : 実数の大小関係

\mathbb{R} 上の関係 \leq を, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x \leq y$ であることは x が y 以下であること

として定義する

代表的な半順序 (1)

代表的な半順序 (1) : 実数の大小関係

\mathbb{R} 上の関係 \leq を, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x \leq y$ であることは x が y 以下であること

として定義する

今からやること

この関係 \leq が半順序であることを証明する

次の3つが成り立つことを確認すればよい

- ▶ 反射性
- ▶ 反対称性
- ▶ 推移性

代表的な半順序 (1) 続き

代表的な半順序 (1) : 実数の大小関係

\mathbb{R} 上の関係 \leq を, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x \leq y$ であることは x が y 以下であること

として定義する

反射性 : 定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $x \leq x$

反対称性 : 定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$

推移性 : 定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$

代表的な半順序 (1) 続き

代表的な半順序 (1) : 実数の大小関係

\mathbb{R} 上の関係 \leq を, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x \leq y$ であることは x が y 以下であること

として定義する

反射性 : 定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $x \leq x$

反対称性 : 定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$

推移性 : 定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$

どれも当然成り立つ



代表的な半順序 (2)

代表的な半順序 (2) : 集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 \subseteq を, 任意の $X, Y \in 2^A$ に対して
 $X \subseteq Y$ であることは X が Y の部分集合であること
として定義する

代表的な半順序 (2)

代表的な半順序 (2) : 集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 \subseteq を, 任意の $X, Y \in 2^A$ に対して
 $X \subseteq Y$ であることは X が Y の部分集合であること
として定義する

今からやること

この関係 \subseteq が半順序であることを証明する

次の3つが成り立つことを確認すればよい

- ▶ 反射性
- ▶ 反対称性
- ▶ 推移性

代表的な半順序 (2) 続き

代表的な半順序 (2) : 集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 \subseteq を, 任意の $X, Y \in 2^A$ に対して
 $X \subseteq Y$ であることは X が Y の部分集合であること
として定義する

反射性 : 定義に立ち戻って書き換えた

任意の $X \in 2^A$ に対して, $X \subseteq X$

反対称性 : 定義に立ち戻って書き換えた

任意の $X, Y \in 2^A$ に対して, $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ ならば $X = Y$

推移性 : 定義に立ち戻って書き換えた

任意の $X, Y, Z \in 2^A$ に対して, $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq Z$ ならば $X \subseteq Z$

代表的な半順序 (2) 続き

代表的な半順序 (2) : 集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 \subseteq を, 任意の $X, Y \in 2^A$ に対して
 $X \subseteq Y$ であることは X が Y の部分集合であること
 として定義する

反射性 : 定義に立ち戻って書き換えた

任意の $X \in 2^A$ に対して, $X \subseteq X$

反対称性 : 定義に立ち戻って書き換えた (第6回講義スライド9ページ)

任意の $X, Y \in 2^A$ に対して, $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ ならば $X = Y$

推移性 : 定義に立ち戻って書き換えた (第6回講義スライド26ページ)

任意の $X, Y, Z \in 2^A$ に対して, $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq Z$ ならば $X \subseteq Z$

どれも成り立つことを既に確認した



代表的な半順序 (3)

代表的な半順序 (3) : 整数の整除関係

1 以上の整数全体の集合 \mathbb{Z}_+ 上の関係 $|$ を, 任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して
 $a | b$ であることは a が b の約数であること
として定義する

代表的な半順序 (3)

代表的な半順序 (3) : 整数の整除関係

1 以上の整数全体の集合 \mathbb{Z}_+ 上の関係 $|$ を, 任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して
 $a | b$ であることは a が b の約数であること
として定義する

今からやること

この関係 $|$ が半順序であることを証明する

次の3つが成り立つことを確認すればよい

- ▶ 反射性
- ▶ 反対称性
- ▶ 推移性

代表的な半順序 (3) 続き

代表的な半順序 (3) : 整数の整除関係

1 以上の整数全体の集合 \mathbb{Z}_+ 上の関係 $|$ を, 任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して
 $a | b$ であることは a が b の約数であること
 として定義する

反射性 : 定義に立ち戻って書き換えた これが正しいことはすぐ分かる
 任意の $a \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a | a$

反対称性 : 定義に立ち戻って書き換えた 次のページで証明
 任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a | b$ かつ $b | a$ ならば $a = b$

推移性 : 定義に立ち戻って書き換えた 後のページで確認
 任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a | b$ かつ $b | c$ ならば $a | c$

代表的な半順序 (3) : 反対称性の証明

証明すること

任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$

▶ $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.

▶ $a = b$ □

「～ならば…である」という命題の証明法 (第5回講義より)

- 1 「～であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

代表的な半順序 (3) : 反対称性の証明

証明すること

任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$

- ▶ $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.
- ▶ $a \mid b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)

▶ $a = b$ □

「～ならば…である」という命題の証明法 (第5回講義より)

- 1 「～であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

代表的な半順序 (3) : 反対称性の証明

証明すること

任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$

- ▶ $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.
- ▶ $a \mid b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b \mid a$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $a = bq$ (2)

▶ $a = b$ □

「～ならば…である」という命題の証明法 (第5回講義より)

- 1 「～であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

代表的な半順序 (3) : 反対称性の証明

証明すること

任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$

- ▶ $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.
- ▶ $a \mid b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b \mid a$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $a = bq$ (2)
- ▶ したがって, $b \stackrel{(1)}{=} ap \stackrel{(2)}{=} (bq)p = bqp$

- ▶ $a = b$ □

「～ならば…である」という命題の証明法 (第5回講義より)

- 1 「～であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

代表的な半順序 (3) : 反対称性の証明

証明すること

任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$

- ▶ $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.
- ▶ $a \mid b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b \mid a$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $a = bq$ (2)
- ▶ したがって, $b \stackrel{(1)}{=} ap \stackrel{(2)}{=} (bq)p = bqp$
- ▶ $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので, $p = 1, q = 1$
- ▶ $a = b$ □

「～ならば…である」という命題の証明法 (第5回講義より)

- 1 「～であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

代表的な半順序 (3) : 反対称性の証明

証明すること

任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$

- ▶ $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.
- ▶ $a \mid b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b \mid a$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $a = bq$ (2)
- ▶ したがって, $b \stackrel{(1)}{=} ap \stackrel{(2)}{=} (bq)p = bqp$
- ▶ $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので, $p = 1, q = 1$
- ▶ $a = bq$ かつ $q = 1$ なので, $a = b$ □

「～ならば…である」という命題の証明法 (第5回講義より)

- 1 「～であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

代表的な半順序 (3) : 推移性の証明

証明すること

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a \mid b$ かつ $b \mid c$ ならば $a \mid c$

▶ $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する.

▶ したがって, $a \mid c$.



代表的な半順序 (3) : 推移性の証明

証明すること

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a | b$ かつ $b | c$ ならば $a | c$

- ▶ $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a | b$ と $b | c$ を仮定する.
- ▶ $a | b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b | c$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = bq$ (2)

- ▶ したがって, ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = ar$
- ▶ したがって, $a | c$. □

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な半順序 (3) : 推移性の証明

証明すること

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a | b$ かつ $b | c$ ならば $a | c$

- ▶ $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a | b$ と $b | c$ を仮定する.
- ▶ $a | b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b | c$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = bq$ (2)
- ▶ $r = pq$ とする. (3)

- ▶ したがって, ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = ar$
- ▶ したがって, $a | c$. □

「～が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な半順序 (3) : 推移性の証明

証明すること

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a | b$ かつ $b | c$ ならば $a | c$

- ▶ $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a | b$ と $b | c$ を仮定する.
- ▶ $a | b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b | c$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = bq$ (2)
- ▶ $r = pq$ とする. (3)
- ▶ $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので, $r = pq \in \mathbb{Z}_+$

- ▶ したがって, ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = ar$
- ▶ したがって, $a | c$. □

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な半順序 (3) : 推移性の証明

証明すること

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a | b$ かつ $b | c$ ならば $a | c$

- ▶ $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a | b$ と $b | c$ を仮定する.
- ▶ $a | b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b | c$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = bq$ (2)
- ▶ $r = pq$ とする. (3)
- ▶ $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので, $r = pq \in \mathbb{Z}_+$
- ▶ また, $c \stackrel{(2)}{=} bq$
- ▶ したがって, ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = ar$
- ▶ したがって, $a | c$. □

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な半順序 (3) : 推移性の証明

証明すること

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a | b$ かつ $b | c$ ならば $a | c$

- ▶ $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a | b$ と $b | c$ を仮定する.
- ▶ $a | b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b | c$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = bq$ (2)
- ▶ $r = pq$ とする. (3)
- ▶ $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので, $r = pq \in \mathbb{Z}_+$
- ▶ また, $c \stackrel{(2)}{=} bq \stackrel{(1)}{=} (ap)q$
- ▶ したがって, ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = ar$
- ▶ したがって, $a | c$. □

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な半順序 (3) : 推移性の証明

証明すること

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a | b$ かつ $b | c$ ならば $a | c$

- ▶ $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a | b$ と $b | c$ を仮定する.
- ▶ $a | b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b | c$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = bq$ (2)
- ▶ $r = pq$ とする. (3)
- ▶ $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので, $r = pq \in \mathbb{Z}_+$
- ▶ また, $c \stackrel{(2)}{=} bq \stackrel{(1)}{=} (ap)q = a(pq)$
- ▶ したがって, ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = ar$
- ▶ したがって, $a | c$. □

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な半順序 (3) : 推移性の証明

証明すること

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $a | b$ かつ $b | c$ ならば $a | c$

- ▶ $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選び, $a | b$ と $b | c$ を仮定する.
- ▶ $a | b$ から, ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $b = ap$ (1)
- ▶ $b | c$ から, ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = bq$ (2)
- ▶ $r = pq$ とする. (3)
- ▶ $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので, $r = pq \in \mathbb{Z}_+$
- ▶ また, $c \stackrel{(2)}{=} bq \stackrel{(1)}{=} (ap)q = a(pq) \stackrel{(3)}{=} ar$.
- ▶ したがって, ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $c = ar$
- ▶ したがって, $a | c$. □

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

全順序

集合 A と A 上の関係 R

全順序とは？

R が**全順序**であるとは、次を満たすこと

- ▶ R は反射性を持つ
- ▶ R は反対称性を持つ
- ▶ R は推移性を持つ
- ▶ R は完全性を持つ

例 1~5 の中に、全順序はない

- ▶ 注：単に「順序」と言ったら、普通は「半順序」のことを指す
- ▶ 注：全順序のことを**線形順序**と呼ぶこともある

代表的な全順序

代表的な全順序：実数の大小関係

\mathbb{R} 上の関係 \leq を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x \leq y$ であることは x が y 以下であること

として定義する

代表的な全順序

代表的な全順序：実数の大小関係

\mathbb{R} 上の関係 \leq を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x \leq y$ であることは x が y 以下であること

として定義する

今からやること

この関係 \leq が全順序であることを証明する

次の4つが成り立つことを確認すればよい

- ▶ 反射性，反対称性，推移性，完全性

反射性，反対称性，推移性は既に確認した

完全性：定義に立ち戻って書き換えた

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して， $x \leq y$ か $y \leq x$

これも当然成り立つ



同値関係

集合 A と A 上の関係 R

同値関係とは？

R が同値関係であるとは、次を満たすこと

- ▶ R は反射性を持つ
- ▶ R は対称性を持つ
- ▶ R は推移性を持つ

例 1~5 の中で、同値関係は例 4, 5

代表的な同値関係 (1)

代表的な同値関係 (1) : 実数の相等関係

\mathbb{R} 上の関係 $=$ を, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x = y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ と等しいこと}$$

として定義する

代表的な同値関係 (1)

代表的な同値関係 (1) : 実数の相等関係

\mathbb{R} 上の関係 $=$ を, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x = y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ と等しいこと}$$

として定義する

今からやること

この関係 $=$ が同値関係であることを証明する

次の3つが成り立つことを確認すればよい

- ▶ 反射性
- ▶ 対称性
- ▶ 推移性

代表的な同値関係 (1) 続き

代表的な同値関係 (1) : 実数の相等関係

\mathbb{R} 上の関係 $=$ を, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$x = y$ であることは x が y と等しいこと

として定義する

反射性 : 定義に基づいて書き換えた

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $x = x$

対称性 : 定義に基づいて書き換えた

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x = y$ ならば $y = x$

推移性 : 定義に基づいて書き換えた

任意の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して, $x = y$ かつ $y = z$ ならば $x = z$

これらは当然成り立つ



代表的な同値関係 (2)

代表的な同値関係 (2) : 整数の合同関係

1 以上の任意の整数 p に対して,

0 以上の整数全体の集合 \mathbb{N} 上の関係 \equiv_p を, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m \equiv_p n \text{ であることは } m \equiv n \pmod{p} \text{ が成り立つこと}$$

として定義する

代表的な同値関係 (2)

代表的な同値関係 (2) : 整数の合同関係

1 以上の任意の整数 p に対して,

0 以上の整数全体の集合 \mathbb{N} 上の関係 \equiv_p を, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m \equiv_p n \text{ であることは } m \equiv n \pmod{p} \text{ が成り立つこと}$$

として定義する

今からやること

この関係 \equiv_p が同値関係であることを証明する

次の3つが成り立つことを確認すればよい

- ▶ 反射性
- ▶ 対称性
- ▶ 推移性

代表的な同値関係 (2) 続き

代表的な同値関係 (2) : 整数の合同関係

1 以上の任意の整数 p に対して,
0 以上の整数全体の集合 \mathbb{N} 上の関係 \equiv_p を, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して
 $m \equiv_p n$ であることは $m \equiv n \pmod{p}$ が成り立つこと
として定義する

反射性 : 次のページで証明

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \equiv_p n$

対称性 : 後のページで証明

任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $m \equiv_p n$ ならば $n \equiv_p m$

推移性 : 後のページで証明

任意の $l, m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $l \equiv_p m$ かつ $m \equiv_p n$ ならば $l \equiv_p n$

代表的な同値関係 (2) : 反射性の証明

- ▶ 任意に $n \in \mathbb{N}$ を選ぶ.
- ▶ このとき, 整数 0 を考えると, $n - n = 0 = p \cdot 0$.
- ▶ したがって, $n \equiv n \pmod{p}$. □

 $m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な同値関係 (2) : 対称性の証明

- ▶ 任意に $m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する

- ▶ したがって, $n \equiv m \pmod{p}$ □

 $m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な同値関係 (2) : 対称性の証明

- ▶ 任意に $m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- ▶ このとき, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

- ▶ したがって, $n \equiv m \pmod{p}$ □

 $m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な同値関係 (2) : 対称性の証明

- ▶ 任意に $m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- ▶ このとき, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$
- ▶ 整数 $-q \in \mathbb{Z}$ を考えると, $n - m = p \cdot (-q)$
- ▶ したがって, $n \equiv m \pmod{p}$

□

 $m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$ 「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 存在する, といっているものを1つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な同値関係 (2) : 推移性の証明

- ▶ 任意に $l, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する

- ▶ したがって, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - n = pq$ となる
- ▶ したがって, $l \equiv n \pmod{p}$ □

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

代表的な同値関係 (2) : 推移性の証明

- ▶ 任意に $l, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ から, ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - m = pq_1 \dots (1)$

- ▶ したがって, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - n = pq$ となる
- ▶ したがって, $l \equiv n \pmod{p}$ □

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

代表的な同値関係 (2) : 推移性の証明

- ▶ 任意に $l, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
 - ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
 - ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ から, ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - m = pq_1 \dots (1)$
 - ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ から, ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq_2 \dots (2)$
-
- ▶ したがって, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - n = pq$ となる
 - ▶ したがって, $l \equiv n \pmod{p}$ □

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

代表的な同値関係 (2) : 推移性の証明

- ▶ 任意に $l, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ から, ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - m = pq_1 \dots (1)$
- ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ から, ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq_2 \dots (2)$
- ▶ $q = q_1 + q_2$ とする (3)

- ▶ したがって, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - n = pq$ となる
- ▶ したがって, $l \equiv n \pmod{p}$ □

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

代表的な同値関係 (2) : 推移性の証明

- ▶ 任意に $l, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ から, ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - m = pq_1 \dots (1)$
- ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ から, ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq_2 \dots (2)$
- ▶ $q = q_1 + q_2$ とする $\dots (3)$
- ▶ このとき, $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より, $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$

- ▶ したがって, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - n = pq$ となる
- ▶ したがって, $l \equiv n \pmod{p}$ □

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

代表的な同値関係 (2) : 推移性の証明

- ▶ 任意に $l, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ から, ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - m = pq_1 \dots (1)$
- ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ から, ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq_2 \dots (2)$
- ▶ $q = q_1 + q_2$ とする $\dots (3)$
- ▶ このとき, $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より, $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$
- ▶ また, $l - n = (l - m) + (m - n)$
- ▶ したがって, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - n = pq$ となる
- ▶ したがって, $l \equiv n \pmod{p}$ □

 $m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

代表的な同値関係 (2) : 推移性の証明

- ▶ 任意に $l, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ から, ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - m = pq_1 \dots (1)$
- ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ から, ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq_2 \dots (2)$
- ▶ $q = q_1 + q_2$ とする (3)
- ▶ このとき, $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より, $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$
- ▶ また, $l - n = (l - m) + (m - n) \stackrel{(1), (2)}{=} pq_1 + pq_2$
- ▶ したがって, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - n = pq$ となる
- ▶ したがって, $l \equiv n \pmod{p}$ □

 $m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

代表的な同値関係 (2) : 推移性の証明

- ▶ 任意に $l, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ から, ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - m = pq_1 \dots (1)$
- ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ から, ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq_2 \dots (2)$
- ▶ $q = q_1 + q_2$ とする (3)
- ▶ このとき, $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より, $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$
- ▶ また, $l - n = (l - m) + (m - n) \stackrel{(1), (2)}{=} pq_1 + pq_2 = p(q_1 + q_2)$
- ▶ したがって, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - n = pq$ となる
- ▶ したがって, $l \equiv n \pmod{p}$ □

 $m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

代表的な同値関係 (2) : 推移性の証明

- ▶ 任意に $l, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- ▶ $l \equiv m \pmod{p}$ から, ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - m = pq_1 \dots (1)$
- ▶ $m \equiv n \pmod{p}$ から, ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq_2 \dots (2)$
- ▶ $q = q_1 + q_2$ とする (3)
- ▶ このとき, $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より, $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$
- ▶ また, $l - n = (l - m) + (m - n) \stackrel{(1), (2)}{=} pq_1 + pq_2 = p(q_1 + q_2) \stackrel{(3)}{=} pq.$
- ▶ したがって, ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $l - n = pq$ となる
- ▶ したがって, $l \equiv n \pmod{p}$ □

 $m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $m - n = pq$

目次

- ① 関係：集合の「構造」を見るための道具
- ② 関係
- ③ 関係の性質
- ④ 順序と同値関係
- ⑤ 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

関係とそれにまつわる概念

- ▶ 関係を理解する
 - ▶ 関係の性質を理解する
 - ▶ 反射性, 完全性, 対称性, 反対称性, 推移性
 - ▶ 特殊な関係を理解する
 - ▶ 順序 (半順序), 全順序, 同値関係
-
- ▶ 登場した「関係」は「2つのものの間の関係」だけだった
 - ▶ 3つのものの間の関係は？
 - ▶ それ以上のものの間の関係は？

n 項関係とは？

n 項関係とは？ (常識に基づく定義)

A 上の n 項関係は次のように定められるもの

- ▶ 関係を表す写像「 $A^n \rightarrow \{O, \times\}$ 」がある
- ▶ 任意の $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ に対して
その関数の値が「 O 」か「 \times 」のどちらかに決まる

この一般化の下で、講義で扱った「関係」は「二項関係」と呼ばれる。

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 関係：集合の「構造」を見るための道具
- ② 関係
- ③ 関係の性質
- ④ 順序と同値関係
- ⑤ 今日のまとめ