

離散数学 第 9 回
写像 (2) : 全射と单射

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 1 月 16 日

最終更新 : 2017 年 1 月 13 日 14:31

- | | | |
|---|--|----------|
| 1 | 集合と論理 (1) : 命題論理 | (10月3日) |
| * | 体育の日 | (10月10日) |
| 2 | 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 | (10月17日) |
| 3 | 集合と論理 (3) : 述語論理 | (10月24日) |
| 4 | 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 | (10月31日) |
| * | 休講 | (11月7日) |
| 5 | 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 | (11月14日) |
| 6 | 証明法 (3) : 集合に関する証明 | (11月21日) |
| * | 調布祭片付け | (11月28日) |
| 7 | 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 | (12月5日) |
| ● | 中間試験 | (12月12日) |

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|----------------------|----------|
| 8 | 写像 (1) : 像と逆像 | (12月19日) |
| 9 | 写像 (2) : 全射と単射 | (1月16日) |
| 10 | 関係 (1) : 関係 | (1月23日) |
| 11 | 関係 (2) : 同値関係 | (1月30日) |
| 12 | 関係 (3) : 順序関係 | (2月6日) |
| 13 | 証明法 (4) : 数学的帰納法 | (2月8日) |
| 14 | 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 | (2月13日) |
| | ● 期末試験 | (2月20日?) |

注意：予定の変更もありうる

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 特殊な写像「全射」, 「単射」, 「全単射」を理解して, その性質と違いを論述できるようになる
- ▶ 写像の逆写像を理解し, その存在性の判定, および構成ができるようになる

目次

- ① 対応をつけることと数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

マンツーマンディフェンス



全単射の例

新幹線の指定席



単射の例

目次

- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

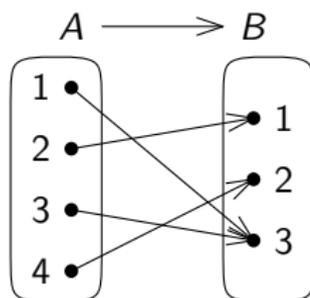
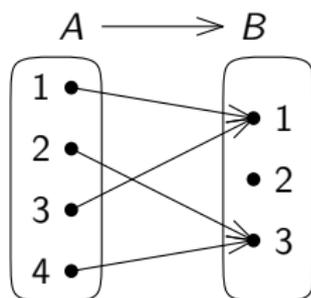
全射

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

全射とは？

f が全射であるとは、次を満たすこと

任意の $b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$



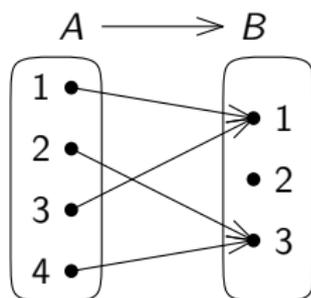
全射

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

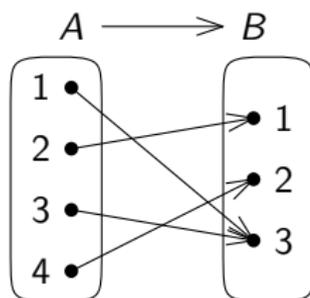
全射とは？

f が全射であるとは、次を満たすこと

任意の $b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$



全射ではない



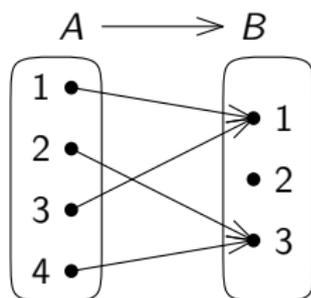
全射

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

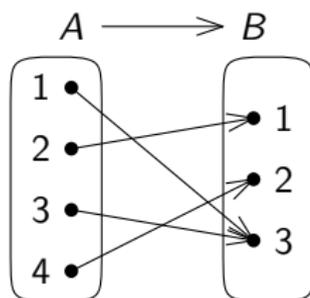
全射とは？

f が**全射**であるとは、次を満たすこと

任意の $b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$



全射ではない



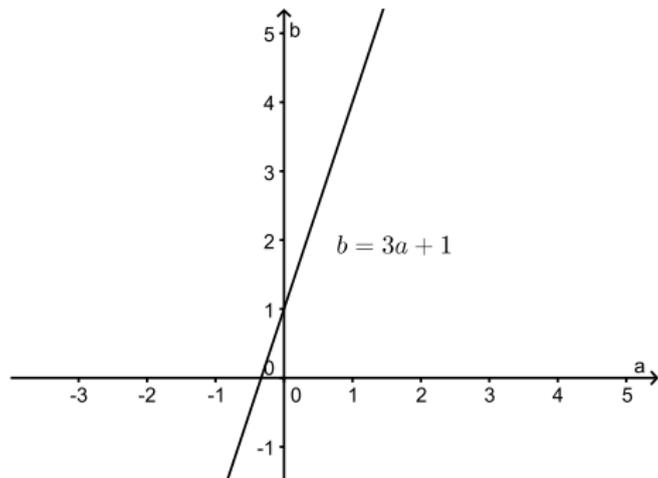
全射である

例題 1

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ。

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$



例題 1 : 続き

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

例題 1 : 続き

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

全射の定義に立ち戻って書き直す

任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して, ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して, $b = 3a + 1$

例題 1 : 続き

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

全射の定義に立ち戻って書き直す

任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して, ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して, $b = 3a + 1$

「任意の～に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 「任意の～を考える」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 1 : 証明

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える.

- ▶ (ここで、「ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = 3a + 1$ 」となることを証明する)
- ▶ したがって、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = 3a + 1$
- ▶ したがって、 f は全射である. □

例題 1 : 証明

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ。

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える。

- ▶ (ここで、「ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = 3a + 1$ 」となることを証明する)
- ▶ したがって、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = 3a + 1$
- ▶ したがって、 f は全射である。 □

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

例題 1 : 証明

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える.

▶ $a = \frac{b-1}{3}$ とする.

▶ したがって, ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して, $b = 3a + 1$

▶ したがって, f は全射である. □

例題 1 : 証明

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える.

- ▶ $a = \frac{b-1}{3}$ とする.
- ▶ $b \in \mathbb{R}$ なので, $a \in \mathbb{R}$ である.

- ▶ したがって, ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して, $b = 3a + 1$
- ▶ したがって, f は全射である. □

例題 1 : 証明

例題 1

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える.

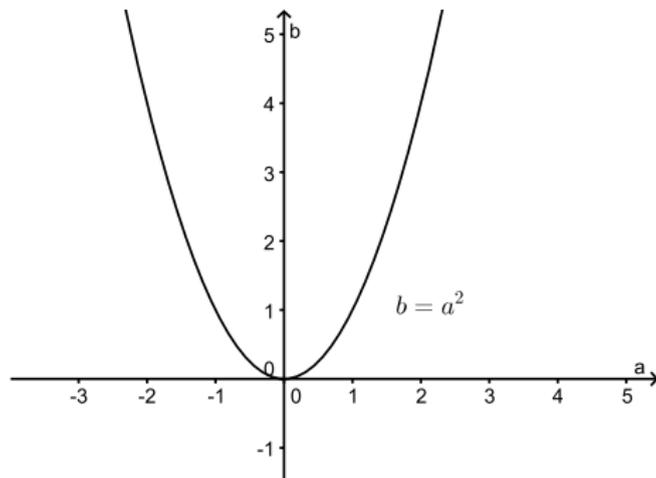
- ▶ $a = \frac{b-1}{3}$ とする.
- ▶ $b \in \mathbb{R}$ なので, $a \in \mathbb{R}$ である.
- ▶ また, $3a + 1 = 3 \cdot \frac{b-1}{3} + 1 = b$ となる.
- ▶ したがって, ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して, $b = 3a + 1$
- ▶ したがって, f は全射である. □

例題 2

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ。

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$



例題 2 : 続き

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = a^2$ 」ではない

例題 2 : 続き

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = a^2$ 」ではない

整理する

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $b \neq a^2$

例題 2 : 続き

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $b = a^2$ 」ではない

整理する

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $b \neq a^2$

「 \sim が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 存在する, といっているものを 1 つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

例題 2 : 証明

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明 : $-1 \in \mathbb{R}$ を考える.

- ▶ (ここで、「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $-1 \neq a^2$ 」を証明する.)
- ▶ したがって、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $-1 \neq a^2$.
- ▶ したがって、 f は全射でない. □

例題 2 : 証明

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ。

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明 : $-1 \in \mathbb{R}$ を考える。

- ▶ (ここで、「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $-1 \neq a^2$ 」を証明する。)
- ▶ したがって、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $-1 \neq a^2$ 。
- ▶ したがって、 f は全射でない。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 2 : 証明

例題 2

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明 : $-1 \in \mathbb{R}$ を考える.

- ▶ 任意の $a \in \mathbb{R}$ を考える.
- ▶ このとき, $a^2 \geq 0$ なので, $-1 \neq a^2$.
- ▶ したがって, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $-1 \neq a^2$.
- ▶ したがって, f は全射でない. □

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと全射かどうか変わるかも

次の4つの写像は全射か？

- ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(a) = a^2$
- ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_2(a) = a^2$
- ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(a) = a^2$
- ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(a) = a^2$

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと全射かどうか変わるかも

次の4つの写像は全射か？

- ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(a) = a^2$ 全射ではない
- ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_2(a) = a^2$
- ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(a) = a^2$
- ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(a) = a^2$

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと全射かどうか変わるかも

次の4つの写像は全射か？

- | | | |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ | $f_1(a) = a^2$ | 全射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$ | $f_2(a) = a^2$ | 全射である |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ | |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$ | $f_4(a) = a^2$ | |

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと全射かどうか変わるかも

次の4つの写像は全射か？

- | | | |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ | $f_1(a) = a^2$ | 全射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$ | $f_2(a) = a^2$ | 全射である |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ | 全射である |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$ | $f_4(a) = a^2$ | |

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと全射かどうか変わるかも

次の4つの写像は全射か？

- | | | |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ | $f_1(a) = a^2$ | 全射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$ | $f_2(a) = a^2$ | 全射である |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ | 全射である |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$ | $f_4(a) = a^2$ | 全射ではない |

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

目次

- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

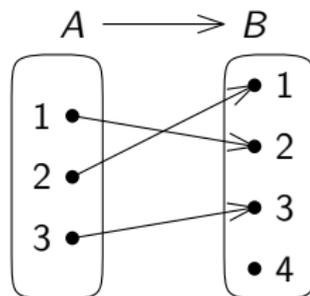
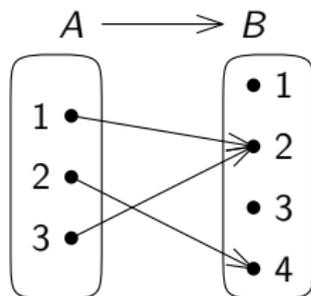
単射

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

単射とは？

f が**単射**であるとは、次を満たすこと

任意の $a, a' \in A$ に対して、 $f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$



単射の定義にある性質は次と同値 (対偶法則による)

任意の $a, a' \in A$ に対して、 $a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$

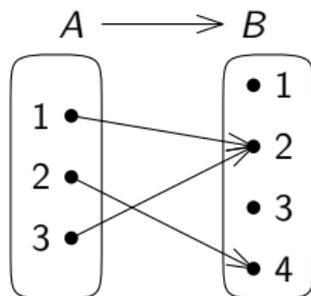
単射

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

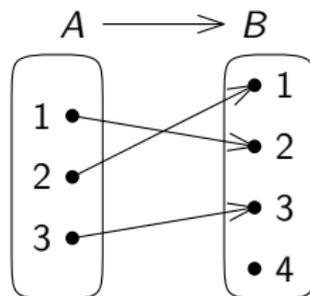
単射とは？

f が**単射**であるとは、次を満たすこと

任意の $a, a' \in A$ に対して、 $f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$



単射ではない



単射の定義にある性質は次と同値 (対偶法則による)

任意の $a, a' \in A$ に対して、 $a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$

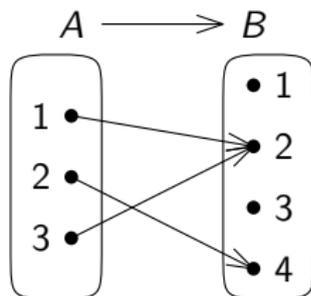
単射

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

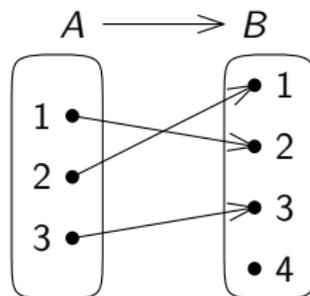
単射とは？

f が**単射**であるとは、次を満たすこと

任意の $a, a' \in A$ に対して、 $f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$



単射ではない



単射である

単射の定義にある性質は次と同値 (対偶法則による)

任意の $a, a' \in A$ に対して、 $a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$

例題 3

例題 3

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ.

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

例題 3

例題 3

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ.

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

定義に立ち戻って書き直す

任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して, $3a + 1 = 3a' + 1$ ならば $a = a'$

例題 3 : 証明

例題 3

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ を考える.

- ▶ $3a + 1 = 3a' + 1$ であると仮定する.
- ▶ このとき, $a = a'$ である.
- ▶ したがって, f は単射である.



例題 4

例題 4

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

例題 4

例題 4

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して, $a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$ 」ではない

例題 4

例題 4

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ。

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して、 $a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$ 」ではない

整理する

ある $a, a' \in \mathbb{R}$ が存在して「 $a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$ 」ではない

つまり、 $a^2 = a'^2$ だが $a \neq a'$ となる $a, a' \in \mathbb{R}$ を見つければよい

例題 4

例題 4

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ。

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明 : $a = 2 \in \mathbb{R}$ と $a' = -2 \in \mathbb{R}$ を考える。

- ▶ このとき、 $a^2 = 4 = a'^2$ であるが、 $a \neq a'$ である。
- ▶ したがって、 f は単射でない。



補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと単射かどうか変わるかも

次の4つの写像は単射か？

- ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(a) = a^2$
- ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_2(a) = a^2$
- ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(a) = a^2$
- ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(a) = a^2$

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと単射かどうか変わるかも

次の4つの写像は単射か？

- ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(a) = a^2$ 単射ではない
- ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_2(a) = a^2$
- ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(a) = a^2$
- ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(a) = a^2$

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと単射かどうか変わるかも

次の4つの写像は単射か？

- | | | |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ | $f_1(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$ | $f_2(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ | |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$ | $f_4(a) = a^2$ | |

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと単射かどうか変わるかも

次の4つの写像は単射か？

- | | | |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ | $f_1(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$ | $f_2(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ | 単射である |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$ | $f_4(a) = a^2$ | |

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと単射かどうか変わるかも

次の4つの写像は単射か？

- | | | |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ | $f_1(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$ | $f_2(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ | 単射である |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$ | $f_4(a) = a^2$ | 単射である |

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

目次

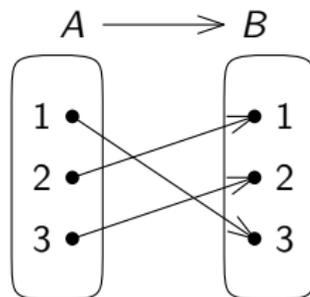
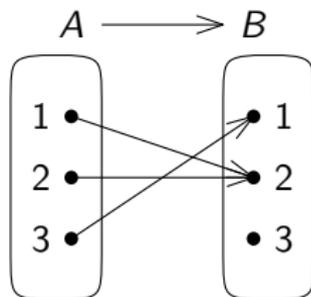
- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

全単射

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

全単射とは？

f が**全単射**であるとは、全射であり、かつ、単射であること

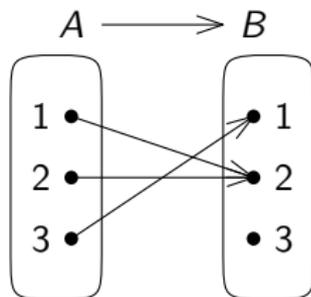


全単射

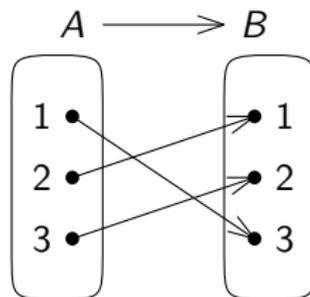
集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

全単射とは？

f が**全単射**であるとは、全射であり、かつ、単射であること



全単射ではない

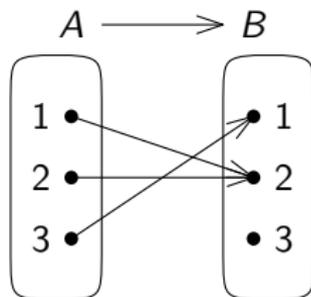


全単射

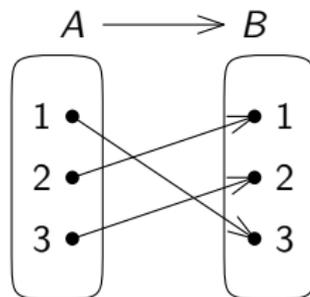
集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

全単射とは？

f が**全単射**であるとは、全射であり、かつ、単射であること



全単射ではない



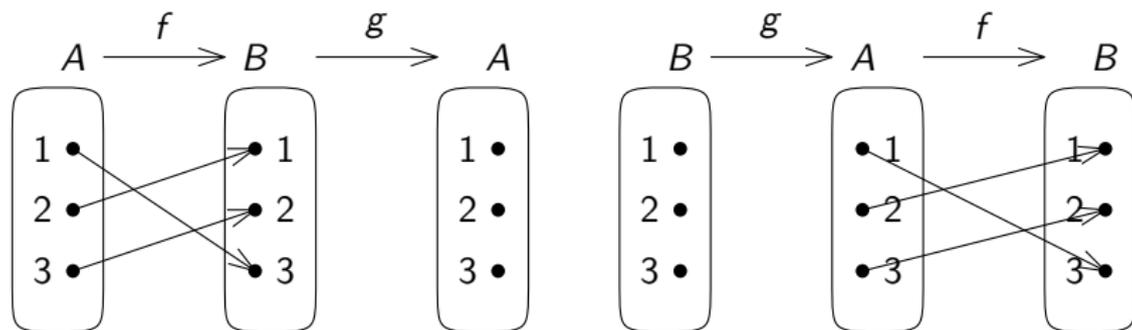
全単射である

逆写像

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

逆写像とは？

f の逆写像とは、写像 $g: B \rightarrow A$ で、 $g \circ f = \text{id}_A$ かつ $f \circ g = \text{id}_B$ を満たすもの
 ($\text{id}_A: A \rightarrow A$, id_B は恒等写像)



記法

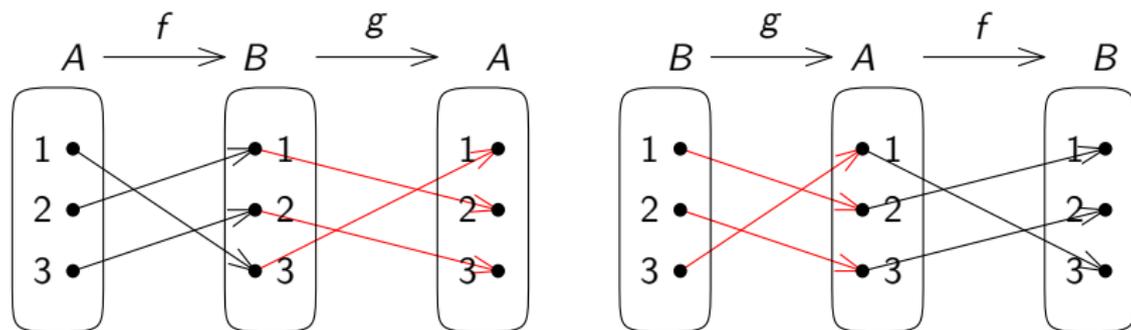
f の逆写像が存在するとき、それを f^{-1} で表す

逆写像

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

逆写像とは？

f の逆写像とは、写像 $g: B \rightarrow A$ で、 $g \circ f = \text{id}_A$ かつ $f \circ g = \text{id}_B$ を満たすもの
 ($\text{id}_A: A \rightarrow A$, id_B は恒等写像)



この f の逆写像は存在する

記法

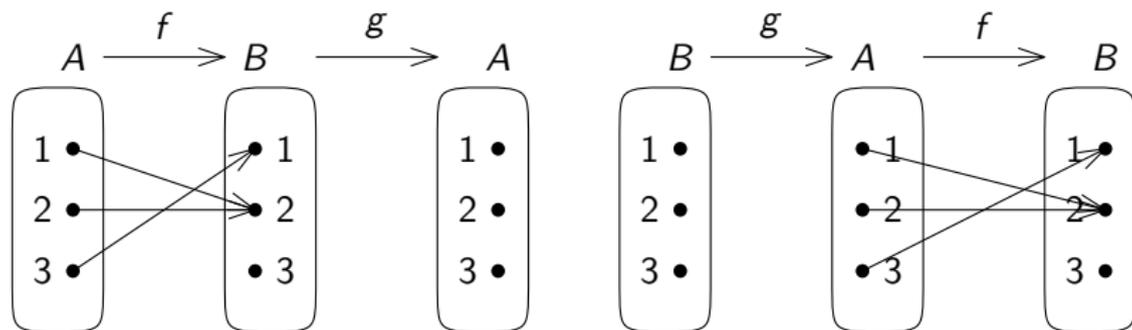
f の逆写像が存在するとき、それを f^{-1} で表す

逆写像：存在しない場合

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

逆写像とは？

f の逆写像とは、写像 $g: B \rightarrow A$ で、 $g \circ f = \text{id}_A$ かつ $f \circ g = \text{id}_B$ を満たすもの
 ($\text{id}_A: A \rightarrow A$, id_B は恒等写像)



記法

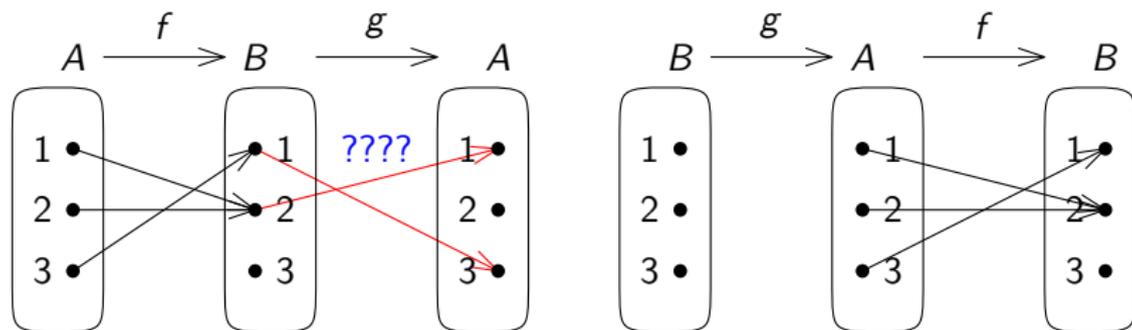
f の逆写像が存在するとき、それを f^{-1} で表す

逆写像：存在しない場合

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

逆写像とは？

f の逆写像とは、写像 $g: B \rightarrow A$ で、 $g \circ f = \text{id}_A$ かつ $f \circ g = \text{id}_B$ を満たすもの
 ($\text{id}_A: A \rightarrow A$, id_B は恒等写像)

この f の逆写像は存在しない

記法

 f の逆写像が存在するとき、それを f^{-1} で表す

逆写像が存在するための必要十分条件

集合 A, B , 写像 $f: A \rightarrow B$

逆写像が存在するための必要十分条件 (重要)

写像 f の逆写像が存在する $\Leftrightarrow f$ が全単射

証明は (長くなるので) 演習問題

全単射の逆写像 (1)

f が全単射であるとき

$$g: B \rightarrow A \text{ が } f \text{ の逆写像} \Leftrightarrow g \circ f = \text{id}_A$$

つまり, f が全単射であるとき, $f \circ g = \text{id}_B$ という条件は不要

全単射の逆写像 (2)

f が全単射であるとき

$$g: B \rightarrow A \text{ が } f \text{ の逆写像} \Leftrightarrow f \circ g = \text{id}_B$$

例題 5

例題 5

次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

は全単射であるが (例題 1, 3),

その逆写像 $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が何であるか, 答えよ.

証明: 任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して, $f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$ とする

- ▶ この f^{-1} が f の逆写像であることを証明する
- ▶ 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(3a + 1) = \frac{(3a + 1) - 1}{3} = a$$

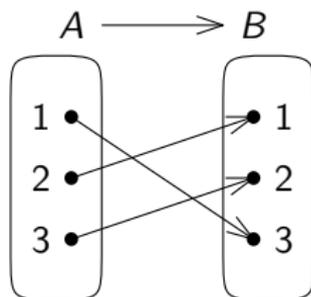
- ▶ したがって, $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ となり, 上の f^{-1} は f の逆写像である \square

逆写像と逆像：注意

注意

写像 $f: A \rightarrow B$

- ▶ $Y \subseteq B$ のとき、 $f^{-1}(Y)$ は Y の逆像
 - ▶ f が全単射であろうがなかろうが定義される
- ▶ $b \in B$ のとき、 $f^{-1}(b)$ は f の逆写像 f^{-1} の b における値
 - ▶ f が全単射であるときのみ定義される



- ▶ $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3\}$
- ▶ $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- ▶ $f^{-1}(2) = 3$

もう一つ注意

全単射の逆写像も全単射 (演習問題)

目次

- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 特殊な写像「全射」, 「単射」, 「全単射」を理解して, その性質と違いを論述できるようになる
- ▶ 写像の逆写像を理解し, その存在性の判定, および構成ができるようになる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ