

離散数学 第 9 回  
写像 (2) : 全射と单射

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 1 月 16 日

最終更新 : 2017 年 1 月 13 日 14:31

- |   |  |          |
|---|--|----------|
| 1 | 集合と論理 (1) : 命題論理                         | (10月3日)  |
| * | 体育の日                                     | (10月10日) |
| 2 | 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応                     | (10月17日) |
| 3 | 集合と論理 (3) : 述語論理                         | (10月24日) |
| 4 | 証明法 (1) : $\exists$ と $\forall$ を含む命題の証明 | (10月31日) |
| * | 休講                                       | (11月7日)  |
| 5 | 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明                     | (11月14日) |
| 6 | 証明法 (3) : 集合に関する証明                       | (11月21日) |
| * | 調布祭片付け                                   | (11月28日) |
| 7 | 集合と論理 (4) : 直積と冪集合                       | (12月5日)  |
| ● | 中間試験                                     | (12月12日) |

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |                      |          |
|----|----------------------|----------|
| 8  | 写像 (1) : 像と逆像        | (12月19日) |
| 9  | 写像 (2) : 全射と単射       | (1月16日)  |
| 10 | 関係 (1) : 関係          | (1月23日)  |
| 11 | 関係 (2) : 同値関係        | (1月30日)  |
| 12 | 関係 (3) : 順序関係        | (2月6日)   |
| 13 | 証明法 (4) : 数学的帰納法     | (2月8日)   |
| 14 | 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 | (2月13日)  |
|    | ● 期末試験               | (2月20日?) |

注意：予定の変更もありうる

### この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

### 今日の目標

- ▶ 特殊な写像「全射」, 「単射」, 「全単射」を理解して, その性質と違いを論述できるようになる
- ▶ 写像の逆写像を理解し, その存在性の判定, および構成ができるようになる

# 目次

- ① 対応をつけることと数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

## マンツーマンディフェンス



### 全単射の例

## 新幹線の指定席



## 単射の例

# 目次

- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ



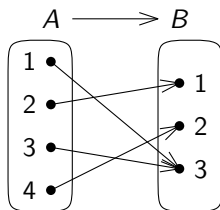
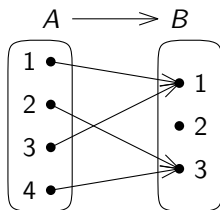
## 全射

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

## 全射とは？

$f$  が全射であるとは、次を満たすこと

任意の  $b \in B$  に対して、ある  $a \in A$  が存在して  $b = f(a)$



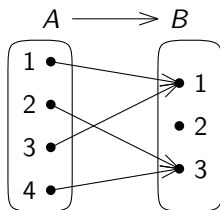
## 全射

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

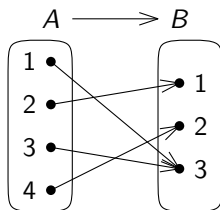
## 全射とは？

$f$  が全射であるとは、次を満たすこと

任意の  $b \in B$  に対して、ある  $a \in A$  が存在して  $b = f(a)$



全射ではない



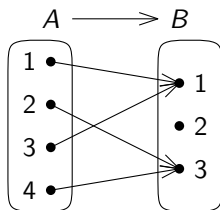
## 全射

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

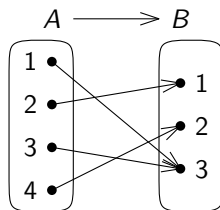
## 全射とは？

$f$  が**全射**であるとは、次を満たすこと

任意の  $b \in B$  に対して、ある  $a \in A$  が存在して  $b = f(a)$



全射ではない



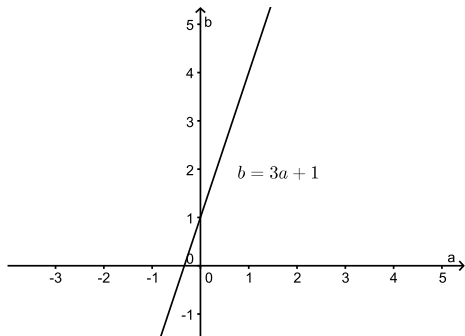
全射である

## 例題 1

## 例題 1

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射であることを証明せよ。

任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して  $f(a) = 3a + 1$



## 例題 1 : 続き

## 例題 1

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

## 格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

## 例題 1 : 続き

## 例題 1

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

## 格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

## 全射の定義に立ち戻って書き直す

任意の  $b \in \mathbb{R}$  に対して, ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して,  $b = 3a + 1$

## 例題 1 : 続き

## 例題 1

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

## 格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

## 全射の定義に立ち戻って書き直す

任意の  $b \in \mathbb{R}$  に対して, ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して,  $b = 3a + 1$

## 「任意の～に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 「任意の～を考える」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

## 例題 1 : 証明

## 例題 1

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の  $b \in \mathbb{R}$  を考える.

- ▶ (ここで、「ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して、 $b = 3a + 1$ 」となることを証明する)
- ▶ したがって、ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して、 $b = 3a + 1$
- ▶ したがって、 $f$  は全射である. □



## 例題 1 : 証明

## 例題 1

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射であることを証明せよ.

任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して  $f(a) = 3a + 1$

証明 : 任意の  $b \in \mathbb{R}$  を考える.

- ▶ (ここで、「ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して、 $b = 3a + 1$ 」となることを証明する)
- ▶ したがって、ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して、 $b = 3a + 1$
- ▶ したがって、 $f$  は全射である. □

「 $\sim$ が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 存在する, といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

## 例題 1 : 証明

## 例題 1

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の  $b \in \mathbb{R}$  を考える.

▶  $a = \frac{b-1}{3}$  とする.

▶ したがって, ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して,  $b = 3a + 1$

▶ したがって,  $f$  は全射である. □

## 例題 1 : 証明

## 例題 1

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の  $b \in \mathbb{R}$  を考える.

- ▶  $a = \frac{b-1}{3}$  とする.
- ▶  $b \in \mathbb{R}$  なので,  $a \in \mathbb{R}$  である.
  
- ▶ したがって, ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して,  $b = 3a + 1$
- ▶ したがって,  $f$  は全射である. □

## 例題 1 : 証明

## 例題 1

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の  $b \in \mathbb{R}$  を考える.

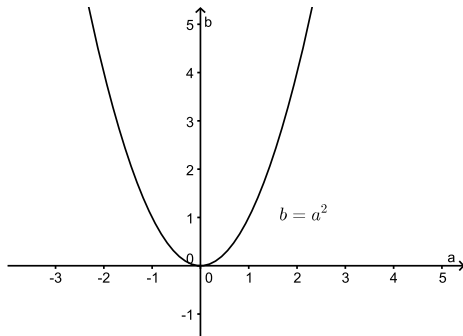
- ▶  $a = \frac{b-1}{3}$  とする.
- ▶  $b \in \mathbb{R}$  なので,  $a \in \mathbb{R}$  である.
- ▶ また,  $3a + 1 = 3 \cdot \frac{b-1}{3} + 1 = b$  となる.
- ▶ したがって, ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して,  $b = 3a + 1$
- ▶ したがって,  $f$  は全射である. □

## 例題 2

## 例題 2

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射でないことを証明せよ。

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$



## 例題 2 : 続き

## 例題 2

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の  $b \in \mathbb{R}$  に対して、ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して、 $b = a^2$ 」ではない

## 例題 2 : 続き

## 例題 2

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の  $b \in \mathbb{R}$  に対して、ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して、 $b = a^2$ 」ではない

整理する

ある  $b \in \mathbb{R}$  が存在して、任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $b \neq a^2$

## 例題 2 : 続き

## 例題 2

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の  $b \in \mathbb{R}$  に対して、ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して、 $b = a^2$ 」ではない

整理する

ある  $b \in \mathbb{R}$  が存在して、任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $b \neq a^2$

「 $\sim$ が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 存在する, といっているものを 1 つ見つけ, 「それを考える」と書く.
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).



## 例題 2 : 証明

## 例題 2

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明 :  $-1 \in \mathbb{R}$  を考える.

- ▶ (ここで、「任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $-1 \neq a^2$ 」を証明する.)
- ▶ したがって、任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $-1 \neq a^2$ .
- ▶ したがって、 $f$  は全射でない. □

## 例題 2 : 証明

## 例題 2

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射でないことを証明せよ。

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明 :  $-1 \in \mathbb{R}$  を考える。

- ▶ (ここで、「任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $-1 \neq a^2$ 」を証明する。)
- ▶ したがって、任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $-1 \neq a^2$ 。
- ▶ したがって、 $f$  は全射でない。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

## 例題 2 : 証明

## 例題 2

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明 :  $-1 \in \mathbb{R}$  を考える.

- ▶ 任意の  $a \in \mathbb{R}$  を考える.
- ▶ このとき,  $a^2 \geq 0$  なので,  $-1 \neq a^2$ .
- ▶ したがって, 任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して,  $-1 \neq a^2$ .
- ▶ したがって,  $f$  は全射でない. □

## 補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと全射かどうか変わるかも

## 次の4つの写像は全射か？

- ▶  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(a) = a^2$
- ▶  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_2(a) = a^2$
- ▶  $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(a) = a^2$
- ▶  $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(a) = a^2$

## 格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

## 補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと全射かどうか変わるかも

## 次の4つの写像は全射か？

- ▶  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(a) = a^2$  全射ではない
- ▶  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_2(a) = a^2$
- ▶  $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(a) = a^2$
- ▶  $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(a) = a^2$

## 格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

## 補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと全射かどうか変わるかも

## 次の4つの写像は全射か？

- |   |                |        |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$   | $f_1(a) = a^2$ | 全射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$  | $f_2(a) = a^2$ | 全射である  |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ |        |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$      | $f_4(a) = a^2$ |        |

## 格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

## 補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと全射かどうか変わるかも

## 次の4つの写像は全射か？

- |   |                |        |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$   | $f_1(a) = a^2$ | 全射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$  | $f_2(a) = a^2$ | 全射である  |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ | 全射である  |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$      | $f_4(a) = a^2$ |        |

## 格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

## 補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと全射かどうか変わるかも

## 次の4つの写像は全射か？

- |   |                |        |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$   | $f_1(a) = a^2$ | 全射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$  | $f_2(a) = a^2$ | 全射である  |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ | 全射である  |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$      | $f_4(a) = a^2$ | 全射ではない |

## 格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)



# 目次

- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

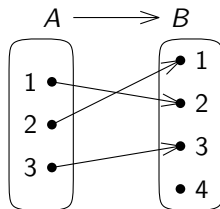
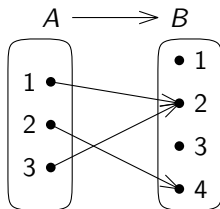
## 単射

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

## 単射とは？

$f$  が**単射**であるとは、次を満たすこと

任意の  $a, a' \in A$  に対して、 $f(a) = f(a')$  ならば  $a = a'$



単射の定義にある性質は次と同値 (対偶法則による)

任意の  $a, a' \in A$  に対して、 $a \neq a'$  ならば  $f(a) \neq f(a')$

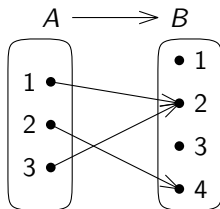
## 単射

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

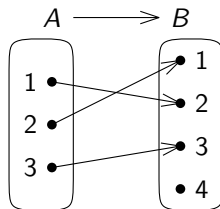
## 単射とは？

$f$  が単射であるとは、次を満たすこと

任意の  $a, a' \in A$  に対して、 $f(a) = f(a')$  ならば  $a = a'$



単射ではない



単射の定義にある性質は次と同値 (対偶法則による)

任意の  $a, a' \in A$  に対して、 $a \neq a'$  ならば  $f(a) \neq f(a')$

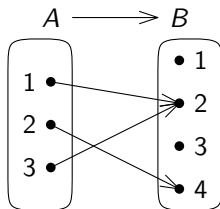
## 単射

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

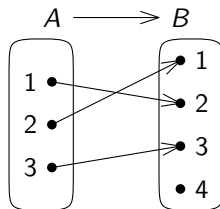
## 単射とは？

$f$  が**単射**であるとは、次を満たすこと

任意の  $a, a' \in A$  に対して、 $f(a) = f(a')$  ならば  $a = a'$



単射ではない



単射である

単射の定義にある性質は次と同値 (対偶法則による)

任意の  $a, a' \in A$  に対して、 $a \neq a'$  ならば  $f(a) \neq f(a')$

## 例題 3

## 例題 3

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が単射であることを証明せよ.

任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して  $f(a) = 3a + 1$

## 例題 3

## 例題 3

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が単射であることを証明せよ.

任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して  $f(a) = 3a + 1$

定義に立ち戻って書き直す

任意の  $a, a' \in \mathbb{R}$  に対して,  $3a + 1 = 3a' + 1$  ならば  $a = a'$

## 例題 3 : 証明

## 例題 3

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が単射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明 : 任意の  $a, a' \in \mathbb{R}$  を考える.

- ▶  $3a + 1 = 3a' + 1$  であると仮定する.
- ▶ このとき,  $a = a'$  である.
- ▶ したがって,  $f$  は単射である. □

## 例題 4

## 例題 4

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が単射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$



## 例題 4

## 例題 4

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が単射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の  $a, a' \in \mathbb{R}$  に対して,  $a^2 = a'^2$  ならば  $a = a'$ 」ではない

## 例題 4

## 例題 4

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が単射でないことを証明せよ。

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の  $a, a' \in \mathbb{R}$  に対して、 $a^2 = a'^2$  ならば  $a = a'$ 」ではない

整理する

ある  $a, a' \in \mathbb{R}$  が存在して「 $a^2 = a'^2$  ならば  $a = a'$ 」ではない

つまり、 $a^2 = a'^2$  だが  $a \neq a'$  となる  $a, a' \in \mathbb{R}$  を見つければよい

## 例題 4

## 例題 4

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が単射でないことを証明せよ。

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明 :  $a = 2 \in \mathbb{R}$  と  $a' = -2 \in \mathbb{R}$  を考える。

- ▶ このとき,  $a^2 = 4 = a'^2$  であるが,  $a \neq a'$  である。
- ▶ したがって,  $f$  は単射でない。



## 補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと単射かどうか変わるかも

## 次の4つの写像は単射か？

- ▶  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(a) = a^2$
- ▶  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_2(a) = a^2$
- ▶  $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(a) = a^2$
- ▶  $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(a) = a^2$

## 格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

## 補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと単射かどうか変わるかも

## 次の4つの写像は単射か？

- ▶  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(a) = a^2$  単射ではない
- ▶  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_2(a) = a^2$
- ▶  $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(a) = a^2$
- ▶  $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(a) = a^2$

## 格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

## 補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと単射かどうか変わるかも

## 次の4つの写像は単射か？

- |   |                |        |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$   | $f_1(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$  | $f_2(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ |        |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$      | $f_4(a) = a^2$ |        |

## 格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

## 補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと単射かどうか変わるかも

## 次の4つの写像は単射か？

- |   |                |        |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$   | $f_1(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$  | $f_2(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ | 単射である  |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$      | $f_4(a) = a^2$ |        |

## 格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)

## 補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも、始域・終域が違くと単射かどうか変わるかも

## 次の4つの写像は単射か？

- |   |                |        |
|---|----------------|--------|
| ▶ $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$   | $f_1(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$  | $f_2(a) = a^2$ | 単射ではない |
| ▶ $f_3: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$ | $f_3(a) = a^2$ | 単射である  |
| ▶ $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, \infty),$      | $f_4(a) = a^2$ | 単射である  |

## 格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識

(似たものに「行列のサイズ」がある)



# 目次

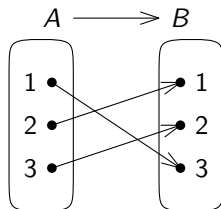
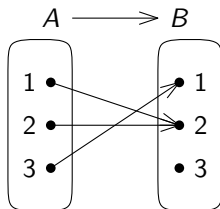
- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

## 全単射

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

全単射とは？

$f$  が**全単射**であるとは、全射であり、かつ、単射であること

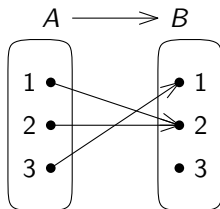


## 全単射

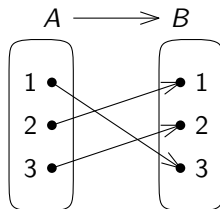
集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

全単射とは？

$f$  が**全単射**であるとは、全射であり、かつ、単射であること



全単射ではない

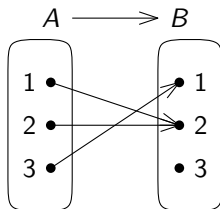


## 全単射

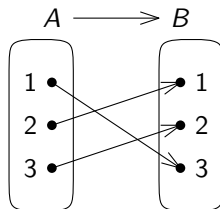
集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

全単射とは？

$f$  が**全単射**であるとは、全射であり、かつ、単射であること



全単射ではない



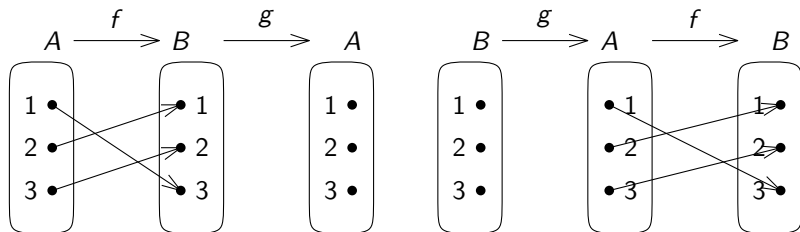
全単射である

## 逆写像

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

## 逆写像とは？

$f$  の逆写像とは、写像  $g: B \rightarrow A$  で、 $g \circ f = \text{id}_A$  かつ  $f \circ g = \text{id}_B$  を満たすもの  
 ( $\text{id}_A: A \rightarrow A$ ,  $\text{id}_B$  は恒等写像)



## 記法

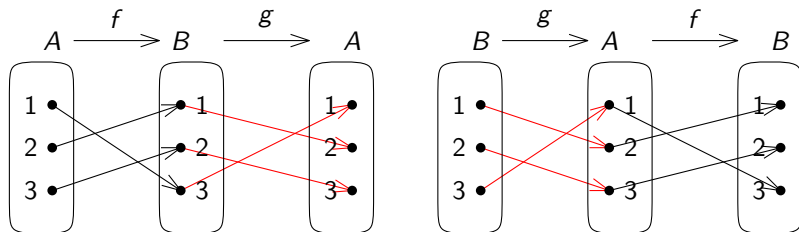
$f$  の逆写像が存在するとき、それを  $f^{-1}$  で表す

## 逆写像

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

## 逆写像とは？

$f$  の逆写像とは、写像  $g: B \rightarrow A$  で、 $g \circ f = \text{id}_A$  かつ  $f \circ g = \text{id}_B$  を満たすもの  
 ( $\text{id}_A: A \rightarrow A$ ,  $\text{id}_B$  は恒等写像)



この  $f$  の逆写像は存在する

## 記法

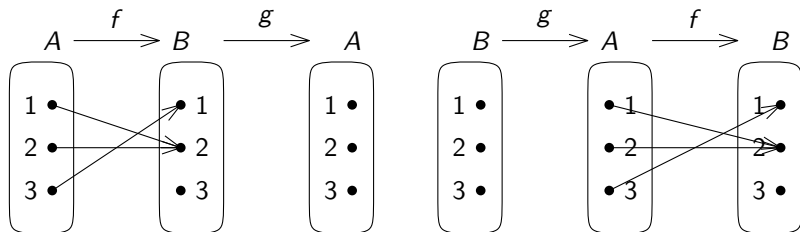
$f$  の逆写像が存在するとき、それを  $f^{-1}$  で表す

## 逆写像：存在しない場合

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$ 

## 逆写像とは？

$f$  の逆写像とは、写像  $g: B \rightarrow A$  で、 $g \circ f = \text{id}_A$  かつ  $f \circ g = \text{id}_B$  を満たすもの  
 ( $\text{id}_A: A \rightarrow A$ ,  $\text{id}_B$  は恒等写像)



## 記法

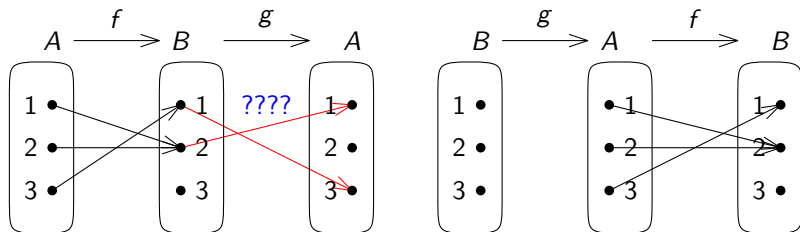
$f$  の逆写像が存在するとき、それを  $f^{-1}$  で表す

## 逆写像：存在しない場合

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$ 

## 逆写像とは？

$f$  の逆写像とは、写像  $g: B \rightarrow A$  で、 $g \circ f = \text{id}_A$  かつ  $f \circ g = \text{id}_B$  を満たすもの  
 ( $\text{id}_A: A \rightarrow A$ ,  $\text{id}_B$  は恒等写像)

この  $f$  の逆写像は存在しない

## 記法

 $f$  の逆写像が存在するとき、それを  $f^{-1}$  で表す



## 逆写像が存在するための必要十分条件

集合  $A, B$ , 写像  $f: A \rightarrow B$

## 逆写像が存在するための必要十分条件 (重要)

写像  $f$  の逆写像が存在する  $\Leftrightarrow f$  が全単射

証明は (長くなるので) 演習問題

## 全単射の逆写像 (1)

$f$  が全単射であるとき

$$g: B \rightarrow A \text{ が } f \text{ の逆写像} \Leftrightarrow g \circ f = \text{id}_A$$

つまり,  $f$  が全単射であるとき,  $f \circ g = \text{id}_B$  という条件は不要

## 全単射の逆写像 (2)

$f$  が全単射であるとき

$$g: B \rightarrow A \text{ が } f \text{ の逆写像} \Leftrightarrow f \circ g = \text{id}_B$$

## 例題 5

## 例題 5

次の写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して  $f(a) = 3a + 1$

は全単射であるが (例題 1, 3),

その逆写像  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が何であるか, 答えよ.

証明: 任意の  $b \in \mathbb{R}$  に対して,  $f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$  とする

- ▶ この  $f^{-1}$  が  $f$  の逆写像であることを証明する
- ▶ 任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(3a + 1) = \frac{(3a + 1) - 1}{3} = a$$

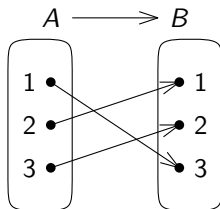
- ▶ したがって,  $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$  となり, 上の  $f^{-1}$  は  $f$  の逆写像である  $\square$

## 逆写像と逆像：注意

## 注意

写像  $f: A \rightarrow B$ 

- ▶  $Y \subseteq B$  のとき、 $f^{-1}(Y)$  は  $Y$  の逆像
  - ▶  $f$  が全単射であろうがなかろうが定義される
- ▶  $b \in B$  のとき、 $f^{-1}(b)$  は  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  の  $b$  における値
  - ▶  $f$  が全単射であるときのみ定義される



- ▶  $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3\}$
- ▶  $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- ▶  $f^{-1}(2) = 3$

## もう一つ注意

全単射の逆写像も全単射 (演習問題)

# 目次

- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ

## 今日のまとめ

## この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

## 今日の目標

- ▶ 特殊な写像「全射」, 「単射」, 「全単射」を理解して, その性質と違いを論述できるようになる
- ▶ 写像の逆写像を理解し, その存在性の判定, および構成ができるようになる

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK

# 目次

- ① 対応をつけること と 数えること
- ② 全射
- ③ 単射
- ④ 全単射と逆写像
- ⑤ 今日のまとめ