

離散数学 第 7 回
集合と論理 (4) : 直積と冪集合

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 12 月 5 日

最終更新 : 2016 年 12 月 2 日 16:39

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--|----------|
| 1 | 集合と論理 (1) : 命題論理 | (10月3日) |
| * | 体育の日 | (10月10日) |
| 2 | 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 | (10月17日) |
| 3 | 集合と論理 (3) : 述語論理 | (10月24日) |
| 4 | 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 | (10月31日) |
| * | 休講 | (11月7日) |
| 5 | 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 | (11月14日) |
| 6 | 証明法 (3) : 集合に関する証明 | (11月21日) |
| * | 調布祭片付け | (11月28日) |
| 7 | 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 | (12月5日) |
| ● | 中間試験 | (12月12日) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|----------------------|----------|
| 8 | 写像 (1) : 像と逆像 | (12月19日) |
| 9 | 写像 (2) : 全射と単射 | (1月16日) |
| 10 | 関係 (1) : 関係 | (1月23日) |
| 11 | 関係 (2) : 同値関係 | (1月30日) |
| 12 | 関係 (3) : 順序関係 | (2月6日) |
| 13 | 証明法 (4) : 数学的帰納法 | (2月13日) |
| 14 | 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 | (授業等調整日) |
| | ● 期末試験 | (2月20日?) |

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

- ▶ 有限集合の要素数が計算できる
- ▶ 集合の直積と冪集合を理解し、正しく答えられる
- ▶ 集合の直積と冪集合に関する包含関係、等式を証明できる

目次

- ① 有限集合の要素数
- ② 集合の直積
- ③ 冪集合
- ④ 集合に対する証明：直積と冪集合
- ⑤ 今日のまとめ

有限集合の要素数

要素数とは？

有限集合 A の要素数とは、その集合の要素の数である

- ▶ 記法： $|A|$, $\#A$, $\#(A)$

例：

- ▶ $|\{a, c, t\}| = 3$
- ▶ $|\emptyset| = 0$

注意：

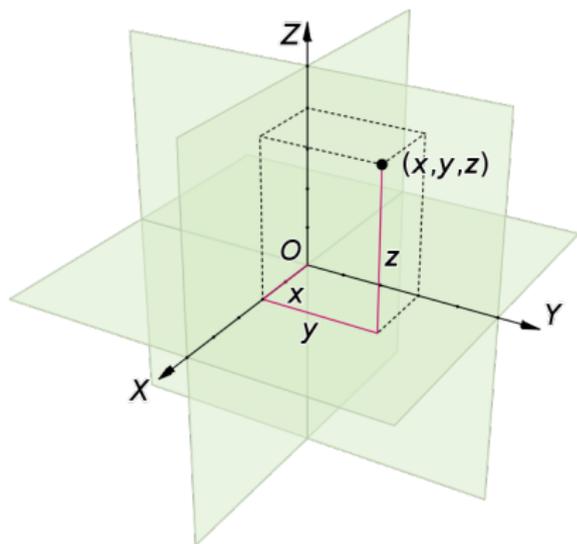
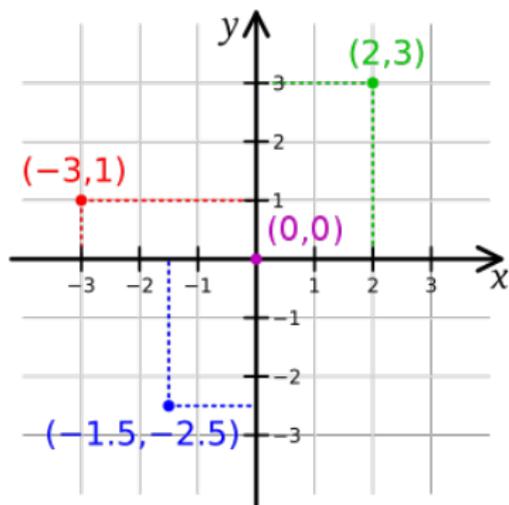
- ▶ 要素数は数なので、有限集合に対してのみ要素数が定義される
- ▶ 要素数のことを「大きさ」、「サイズ」と呼ぶことがある
- ▶ $|A|$ は、「 A の絶対値」ではない

目次

- ① 有限集合の要素数
- ② 集合の直積
- ③ 冪集合
- ④ 集合に対する証明：直積と冪集合
- ⑤ 今日のまとめ

座標

- ▶ 2次元平面の点の座標は2つの実数を「対」にして表現する
- ▶ このように、集合の要素を **対** にすることは有用



http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

構造体

プログラムにおける構造体

```
struct account {  
    string name;  
    int account_number;  
    int balance;  
};
```

数個のデータを **組** にして、一つの構造を表現する

今から行うこと

数学において「対」や「組」を表現する方法を理解する

順序対 (2 個組)

順序対とは？ (常識に基づく定義)

順序対とは、ものを2つ並べたもののことである。

- ▶ a と a' をこの順で並べたものは「 (a, a') 」と表記する

「順序対」は単に「対」や「組」と呼ばれることもある

同じ順序対 (常識に基づく定義)

2つの順序対 (a, a') と (b, b') が等しいことを $(a, a') = (b, b')$ と表記し、
 $a = b$ かつ $a' = b'$

であることと定義する

注意： (a, a') と (a', a) は $a \neq a'$ ならば異なる

集合の直積 (1)

集合の直積

集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ と表記して、

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

「直積」は「デカルト積」とも呼ばれる

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき、

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

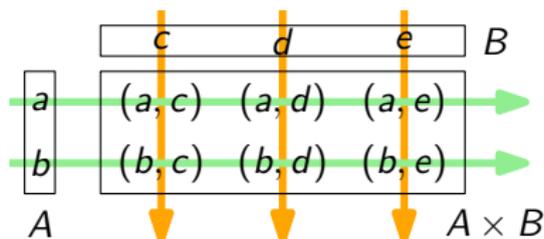
簡単な確認：有限集合 A, B に対して、 $|A \times B| = |A| \times |B|$

集合の直積：図示

例

 $A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}$ のとき,

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$



例 続き

 $A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}$ のとき,

$$B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b)\}$$

n 個組

n は自然数

n 個組とは？ (常識に基づく定義)

n 個組とは、ものを n 個並べたもののことである。

- ▶ a_1, a_2, \dots, a_n をこの順で並べたものは「 (a_1, a_2, \dots, a_n) 」と表記する

同じ n 個組 (常識に基づく定義)

2つの n 個組 (a_1, a_2, \dots, a_n) と (b_1, b_2, \dots, b_n) が等しいことを
 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ と表記し、

すべての i に対して $a_i = b_i$

であることと定義する

集合の直積 (2)

集合の直積

集合 A_1, A_2, \dots, A_n の直積を $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ と表記して、

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \begin{array}{l} \text{すべての } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{に対して } x_i \in A_i \end{array} \right\}$$

と定義する

「 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 」を「 $\prod_{i=1}^n A_i$ 」と書くこともある

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{f, g\}$ のとき、

$$A \times B \times C = \{(a, c, f), (a, c, g), (a, d, f), (a, d, g), (a, e, f), (a, e, g), \\ (b, c, f), (b, c, g), (b, d, f), (b, d, g), (b, e, f), (b, e, g)\}$$

簡単な確認：有限集合 A_1, A_2, \dots, A_n に対して、

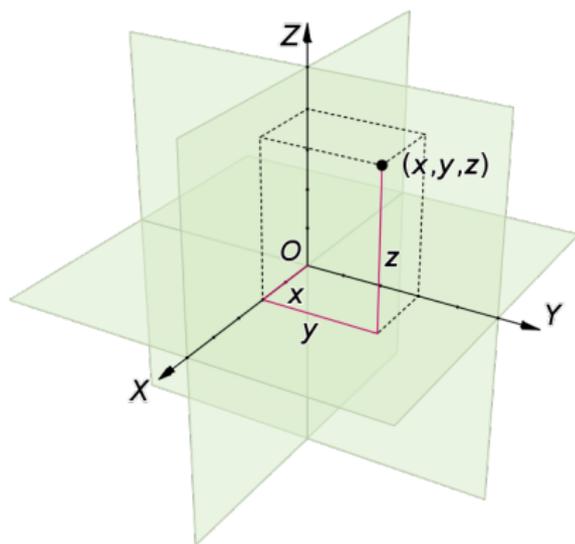
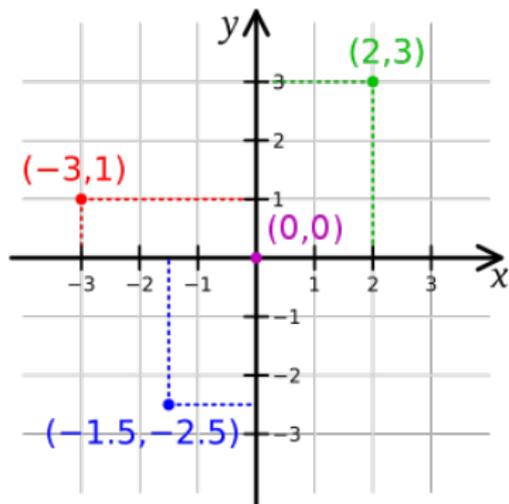
$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n|$$

集合の直積 (関係する記法)

- ▶ $A \times A$ を A^2 と書く
- ▶ $A \times A \times A$ を A^3 と書く
- ▶ $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ 個}}$ を A^n と書く

集合の直積：例1 (デカルト座標系)

- ▶ $\mathbb{R}^2 = 2$ 次元平面
- ▶ $\mathbb{R}^3 = 3$ 次元空間
- ▶ ...



http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

集合の直積：例 2 (IP アドレス)

(IPv4 における) IP アドレスは 1 バイトの数 4 つで表現される

- ▶ www.uec.ac.jp: 130.153.9.10
- ▶ www.kantei.go.jp: 202.32.211.139

つまり,

- ▶ 可能な IP アドレス全体の集合 = $\{0, \dots, 255\}^4$
- ▶ 可能な IP アドレスの総数 = $|\{0, \dots, 255\}^4| = 256^4 = 4294967296$
(約 43 億)

⇒ IP アドレス枯渇問題

集合の直積：例3 (DNA (デオキシリボ核酸))

DNA は生物の遺伝情報を担う物質

- ▶ アデニン (A), チミン (T), シトシン (C),
グアニン (G) という塩基の並び方で
遺伝情報はだいたい決められている

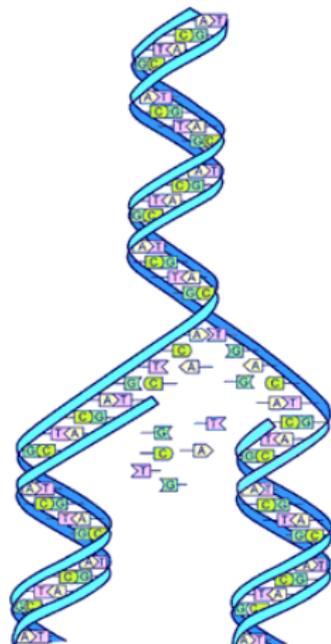
つまり,

- ▶ DNA が持つ遺伝情報全体の集合
= $\{A, T, C, G\}^n$

n は生物種などによって異なる自然数

- ▶ 大腸菌： $n \approx 4.6 \times 10^6$
- ▶ ヒト： $n \approx 3.2 \times 10^9$

<http://en.wikipedia.org/wiki/Genome>



http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_replication

集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\},$$

集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\},$$

$$B \times C = \{(3, 4), (3, 5)\},$$

集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\},$$

$$B \times C = \{(3, 4), (3, 5)\},$$

$$A \times B \times C = \{(1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5)\},$$

集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\},$$

$$B \times C = \{(3, 4), (3, 5)\},$$

$$A \times B \times C = \{(1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5)\},$$

$$(A \times B) \times C = \{((1, 3), 4), ((1, 3), 5), ((2, 3), 4), ((2, 3), 5)\},$$

集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\},$$

$$B \times C = \{(3, 4), (3, 5)\},$$

$$A \times B \times C = \{(1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5)\},$$

$$(A \times B) \times C = \{((1, 3), 4), ((1, 3), 5), ((2, 3), 4), ((2, 3), 5)\},$$

$$A \times (B \times C) = \{(1, (3, 4)), (1, (3, 5)), (2, (3, 4)), (2, (3, 5))\}$$

集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\},$$

$$B \times C = \{(3, 4), (3, 5)\},$$

$$A \times B \times C = \{(1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5)\},$$

$$(A \times B) \times C = \{((1, 3), 4), ((1, 3), 5), ((2, 3), 4), ((2, 3), 5)\},$$

$$A \times (B \times C) = \{(1, (3, 4)), (1, (3, 5)), (2, (3, 4)), (2, (3, 5))\}$$

特に、 $A \times B \times C$ と $(A \times B) \times C$ と $A \times (B \times C)$ はすべて異なる

目次

- ① 有限集合の要素数
- ② 集合の直積
- ③ 冪集合**
- ④ 集合に対する証明：直積と冪集合
- ⑤ 今日のまとめ

冪集合

冪集合

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり、 2^A と表記する。

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

簡単な確認：有限集合 A に対して、 $|2^A| = 2^{|A|}$

冪集合

冪集合

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり、 2^A と表記する。

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

簡単な確認：有限集合 A に対して、 $|2^A| = 2^{|A|}$

- ▶ 「冪集合」の他に「巾集合」、「べき集合」、「ベキ集合」とも書く
- ▶ 「 2^A 」の他に「 $\mathcal{P}(A)$ 」、「 $\mathcal{P}(A)$ 」とも書く
- ▶ 冪集合の要素は集合 (冪集合は集合の集合)

冪集合：例とイメージ

例

 $A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

イメージ (箱による)



冪集合：他の例

冪集合 (再掲)

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり、 2^A と表記する。

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

- ▶ $2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- ▶ $2^\emptyset = \{\emptyset\}$
- ▶ $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

冪集合の定義より

$$X \in 2^A \Leftrightarrow X \subseteq A$$

目次

- ① 有限集合の要素数
- ② 集合の直積
- ③ 冪集合
- ④ 集合に対する証明：直積と冪集合
- ⑤ 今日のまとめ

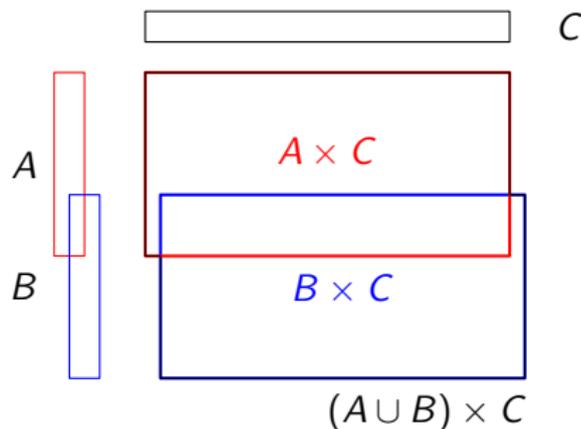
直積に関する等式：例題

例題：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

図による直感



直積に関する等式：例題

例題：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

格言 (再掲)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

証明すべきことは

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \iff (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

同値変形によって証明する

直積に関する等式：例題 — 証明

証明：任意の集合 A, B, C を考える

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \leftarrow \text{目標}$$

したがって、 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ。 □

直積に関する等式：例題 — 証明

証明：任意の集合 A, B, C を考える

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$$

(直積の定義)

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

したがって、 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ。 \square

直積の定義

$$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } y \in B$$

直積に関する等式：例題 — 証明

証明：任意の集合 A, B, C を考える

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) \quad (\text{直積の定義})$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C) \quad (\text{合併の定義})$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

したがって、 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ。 □

合併の定義

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ または } x \in B$$

直積に関する等式：例題 — 証明

証明：任意の集合 A, B, C を考える

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) \quad \text{(直積の定義)}$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C) \quad \text{(合併の定義)}$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C)) \quad \text{(分配法則)}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

したがって、 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ。 □

分配法則

$$(P \vee Q) \wedge R \quad \Leftrightarrow \quad (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

直積に関する等式：例題 — 証明

証明：任意の集合 A, B, C を考える

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) \quad \text{(直積の定義)}$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C) \quad \text{(合併の定義)}$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C)) \quad \text{(分配法則)}$$

$$\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C) \quad \text{(直積の定義)}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

したがって、 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ。 □

直積の定義

$$(x, y) \in A \times B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ かつ } y \in B$$

直積に関する等式：例題 — 証明

証明：任意の集合 A, B, C を考える

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) \quad \text{(直積の定義)}$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C) \quad \text{(合併の定義)}$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C)) \quad \text{(分配法則)}$$

$$\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C) \quad \text{(直積の定義)}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

したがって、 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ。 □

直積の定義

$$(x, y) \in A \times B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ かつ } y \in B$$

直積に関する等式：例題 — 証明

証明：任意の集合 A, B, C を考える

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) \quad \text{(直積の定義)}$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C) \quad \text{(合併の定義)}$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C)) \quad \text{(分配法則)}$$

$$\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C) \quad \text{(直積の定義)}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \quad \text{(合併の定義)}$$

したがって、 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ。 \square

合併の定義

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ または } x \in B$$

冪集合に関する証明：例題

次の命題は正しいか、正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \subseteq B \quad \text{ならば,} \quad 2^A \subseteq 2^B$$

が成り立つ.

例： $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ のとき

▶ $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

▶ $2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

この例においては正しい

冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい。理由は以下の通りである。

1 任意の集合 A, B を考え， $A \subseteq B$ であると仮定する

6 したがって， $2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ



冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい。理由は以下の通りである。

- 1 任意の集合 A, B を考え、 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 $X \in 2^A$ であると仮定する

5 $X \in 2^B$ が成り立つ

6 したがって、 $2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ □

部分集合とは？ (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい。理由は以下の通りである。

- 1 任意の集合 A, B を考え、 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 $X \in 2^A$ であると仮定する
- 3 (2) と冪集合の定義より、 $X \subseteq A$ が成り立つ

- 5 $X \in 2^B$ が成り立つ
- 6 したがって、 $2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ □

冪集合の定義

$$X \in 2^A \Leftrightarrow X \subseteq A$$

冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい。理由は以下の通りである。

- 1 任意の集合 A, B を考え、 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 $X \in 2^A$ であると仮定する
- 3 (2) と冪集合の定義より、 $X \subseteq A$ が成り立つ
- 4 (1) と (3) より、 $X \subseteq B$ が成り立つ
- 5 $X \in 2^B$ が成り立つ
- 6 したがって、 $2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ □

部分集合の性質

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq C \text{ ならば, } A \subseteq C$$

冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい。理由は以下の通りである。

- 1 任意の集合 A, B を考え、 $A \subseteq B$ であると仮定する
- 2 $X \in 2^A$ であると仮定する
- 3 (2) と冪集合の定義より、 $X \subseteq A$ が成り立つ
- 4 (1) と (3) より、 $X \subseteq B$ が成り立つ
- 5 (4) と冪集合の定義より、 $X \in 2^B$ が成り立つ
- 6 したがって、 $2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ □

冪集合の定義

$$X \in 2^A \Leftrightarrow X \subseteq A$$

目次

- ① 有限集合の要素数
- ② 集合の直積
- ③ 冪集合
- ④ 集合に対する証明：直積と冪集合
- ⑤ 今日のまとめ

今日の概要

今日の目標

- ▶ 有限集合の要素数が計算できる
- ▶ 集合の直積と冪集合を理解し、正しく答えられる
- ▶ 集合の直積と冪集合に関する包含関係、等式を証明できる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 有限集合の要素数
- ② 集合の直積
- ③ 冪集合
- ④ 集合に対する証明：直積と冪集合
- ⑤ 今日のまとめ