離散数学 第 1 回
集合と論理 (1)：命題論理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 10 月 3 日

最終更新：2016 年 9 月 28 日　09:47

概要

主題

- 理工学のあらゆる分野に現れる数学の言葉と論理を徹底的に身につける
- これによって，論理的な思考を行う基礎能力を体得し，将来的に，専門書を読み解き，自分で学術的な文書を書くことができるようにする
- キャッチフレーズは「語学としての数学」

達成目標

以下の 2 項目をすべて達成することを目標とする．

1. 数学における基本的な用語 (集合，論理，写像，関係) を正しく使うことができる
2. 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

コミュニケーションとしての数学

コミュニケーションとしての数学

π^2 って無理数だよね

コミュニケーションとしての数学

π^2 って無理数だよね

へー，どうして？

コミュニケーションとしての数学

π^2 って無理数だよね

へー，どうして？

だって，π は無理数だから 2 乗しても無理数だよ

コミュニケーションとしての数学

π^2 って無理数だよね

へー，どうして？

だって，π は無理数だから 2 乗しても無理数だよ

そんなの理由になんないよ
$\sqrt{3}$ は無理数なのに，2 乗した 3 は整数だし

コミュニケーションとしての数学

π^2 って無理数だよね

へー，どうして？

だって，π は無理数だから 2 乗しても無理数だよ

そんなの理由になんないよ
$\sqrt{3}$ は無理数なのに，2 乗した 3 は整数だし

正しい論理を身につけないとだまされる
→ 「コミュニケーションとしての数学」

スケジュール 前半 (予定)

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (10 月 3 日)
- ∗ 体育の日 (10 月 10 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (10 月 17 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (10 月 24 日)
4. 証明法 (1)：$\exists$ と $\forall$ を含む命題の証明 (10 月 31 日)
- ∗ 休講 (11 月 7 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (11 月 14 日)
6. 証明法 (3)：集合に関する証明 (11 月 21 日)
- ∗ 調布祭片付け (11 月 28 日)
7. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (12 月 5 日)
- 中間試験 (12 月 12 日)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 写像 (1)：像と逆像 (12 月 19 日)
9. 写像 (2)：全射と単射 (1 月 16 日)
10. 関係 (1)：関係 (1 月 23 日)
11. 関係 (2)：同値関係 (1 月 30 日)
12. 関係 (3)：順序関係 (2 月 6 日)
13. 証明法 (4)：数学的帰納法 (2 月 13 日)
14. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (授業等調整日)

- 期末試験 (2 月 20 日？)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント (TA)

- 滝 郁也 (たき ふみや)
- 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2016/discretemath_w/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義の前の週の金曜の 18:00 までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2016/discretemath_w/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語集：よみがな，英訳付き

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

Twitter: @okamoto7yoshio

講義資料が掲載されたら一言発せられる (手動更新)

授業の進め方

講義 (70 分)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (20 分)

- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員とティーチング・アシスタントに質問する

退室 (0 分)

- 授業の感想，質問などを小さな紙に書いて提出 (匿名可)
- (感想，質問などの回答は講義の Web ページに掲載)

オフィスアワー：金曜 5 限

- 質問など

演習問題

演習問題の進め方

- 授業のおわり 20 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は自習用 (復習・試験対策用)
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- 授業内問題：授業の中で取り組む演習問題
- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加
- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

演習問題 (続)

答案の提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて，返却される
  - 返却された内容については，再提出ができる (再提出締切は原則なし)
  - 再提出の際，返却された答案も添付しなくてはならない

評価

中間試験 (12/12 予定) と期末試験 (2/20 予定) による

- 出題形式
    - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
    - その中の 3 題は講義の演習問題として提示されたものと同一
        - ただし，発展問題は出題しない
    - 全問に解答する
- 配点：1 題 10 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績

- $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$

教訓

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが，
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- コミュニケーションとしての数学基礎を固められるもの
  - 嘉田勝,『論理と集合から始める数学の基礎』, 日本評論社, 2008 年 〈お薦め〉
  - 渡辺治, 木村泰紀, 谷口雅治, 北野晃朗,『数学の言葉と論理』, 朝倉書店, 2008 年
  - 中内伸光,『ろんりと集合』, 日本評論社, 2009 年
- 離散数学の入門書
  - 小倉久和,『はじめての離散数学』, 近代科学社, 2011 年
  - 石村園子,『やさしく学べる離散数学』, 共立出版, 2007 年
  - Seymour Lipschutz,『離散数学』, オーム社, 1995 年

注意

離散数学の教科書はそれぞれ扱う内容が異なる
(微分積分や線形代数のようにほとんどの本が同じ内容を扱う教科とは違う)

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は積極的に OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

今日の概要

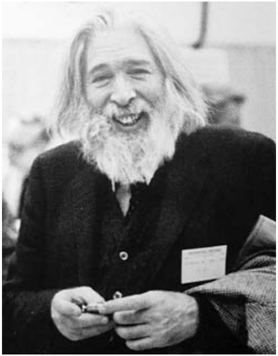
今日の目標

- 命題とは何か理解する
- 命題に関する数学的記法が使える
- 真理値表によって命題の真理値を答えられる
- 集合に対する 2 つの定義法を理解して，使える

目次

『パズルランドのアリス』から

レイモンド・スマリヤン (著)，市場泰男 (訳)，
『パズルランドのアリス』，ハヤカワ文庫，2004 年



http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Smullyan.html

『パズルランドのアリス』の第 55 問

『パズルランドのアリス』第 2 巻，18–19 ページより

- 「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいいました。
- 「赤の王さまが眠っていらっしゃるときは、
王さまが信じなさることはすべてまちがっている。
- つまり本当のことでないのじゃ。
- けれども、王さまが目を覚ましていらっしゃるときは、
信じなさることはすべて本当なのじゃ。
- さて、昨日の晩のぴったり十時に、赤の王さまは、
いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っていると信じなさった。
- ではそのとき、赤の女王さまは、眠っていらっしゃったか、それとも
目をさましていらっしゃったか、どうじゃ？」

あとで，このパズルを解く

目次

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　　真○
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である

命題と真偽

命題とは？(常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真〇
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である　偽〇

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真〇
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である　偽〇
- 2016 年は戌年ですか？

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である　偽○
- 2016 年は戌年ですか？　×

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である　偽○
- 2016 年は戌年ですか？　×
- 2016 年は戌年です

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真〇
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である 偽〇
- 2016 年は戌年ですか？ ×
- 2016 年は戌年です 偽〇

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である　偽○
- 2016 年は戌年ですか？　×
- 2016 年は戌年です　偽○
- やったー！

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である　偽○
- 2016 年は戌年ですか？　×
- 2016 年は戌年です　偽○
- やったー！　×

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である 偽○
- 2016 年は戌年ですか？ ×
- 2016 年は戌年です 偽○
- やったー！ ×
- のび太のくせになまいきな。

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である　偽○
- 2016 年は戌年ですか？　×
- 2016 年は戌年です　偽○
- やったー！　×
- のび太のくせになまいきな。　×

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である 偽○
- 2016 年は戌年ですか？ ×
- 2016 年は戌年です 偽○
- やったー！ ×
- のび太のくせになまいきな。 ×
- 調布市は広い

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

質問：命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真〇
- 2016 年 10 月 3 日は日曜日である 偽〇
- 2016 年は戌年ですか？ ×
- 2016 年は戌年です 偽〇
- やったー！ ×
- のび太のくせになまいきな。 ×
- 調布市は広い ×

真偽の表現いろいろ

真理値とは？

「真」か「偽」という値

真	偽
true	false
T	F
1	0

以降,「真と偽」か「T と F」を用いていく

例として考える状況：データベース

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

出典：http://ja.wikipedia.org/ 内
(2016 年 9 月 27 日アクセス)
人口は 2010 年国勢調査による
面積は国土地理院平成 26 年
全国都道府県市区町村別面積調による

http://www.craftmap.box-i.net/

例として考える状況：データベース (2)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 徳島県の面積は 4,000km^2 以上である
- 香川県の県庁所在地は丸亀市である
- 四国 4 県の中で最も人口が多いのは愛媛県である

例として考える状況：データベース (2)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 徳島県の面積は 4,000km^2 以上である　　T
- 香川県の県庁所在地は丸亀市である
- 四国 4 県の中で最も人口が多いのは愛媛県である

例として考える状況：データベース (2)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 徳島県の面積は 4,000km^2 以上である　T
- 香川県の県庁所在地は丸亀市である　F
- 四国 4 県の中で最も人口が多いのは愛媛県である

例として考える状況：データベース (2)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 徳島県の面積は 4,000km^2 以上である　T
- 香川県の県庁所在地は丸亀市である　F
- 四国 4 県の中で最も人口が多いのは愛媛県である　T

例として考える状況：データベース (3)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 愛媛県の人口は 100 万人以上で，かつ，
  高知県の人口は 50 万人以下である
- 香川県の県庁所在地は丸亀市ではない
- 愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，または，
  愛媛県の県庁所在地は松山市である

例として考える状況：データベース (3)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 愛媛県の人口は 100 万人以上で，かつ，
  高知県の人口は 50 万人以下である　　F
- 香川県の県庁所在地は丸亀市ではない
- 愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，または，
  愛媛県の県庁所在地は松山市である

例として考える状況：データベース (3)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 愛媛県の人口は 100 万人以上で，かつ，
  高知県の人口は 50 万人以下である　F
  (命題の連言 (論理積，AND) も命題)
- 香川県の県庁所在地は丸亀市ではない
- 愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，または，
  愛媛県の県庁所在地は松山市である

例として考える状況：データベース (3)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 愛媛県の人口は 100 万人以上で，かつ，
  高知県の人口は 50 万人以下である F
  (命題の連言 (論理積，AND) も命題)
- 香川県の県庁所在地は丸亀市ではない T
- 愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，または，
  愛媛県の県庁所在地は松山市である

例として考える状況：データベース (3)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 愛媛県の人口は 100 万人以上で，かつ，
  高知県の人口は 50 万人以下である F
  (命題の連言 (論理積，AND) も命題)
- 香川県の県庁所在地は丸亀市ではない T
  (命題の否定 (NOT) も命題)
- 愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，または，
  愛媛県の県庁所在地は松山市である

例として考える状況：データベース (3)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 愛媛県の人口は 100 万人以上で，かつ，
  高知県の人口は 50 万人以下である　F
  (命題の連言 (論理積，AND) も命題)
- 香川県の県庁所在地は丸亀市ではない　T
  (命題の否定 (NOT) も命題)
- 愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，または，
  愛媛県の県庁所在地は松山市である　T

例として考える状況：データベース (3)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.93	785,873	徳島市
香川県	1,876.73	995,779	高松市
愛媛県	5,676.10	1,430,957	松山市
高知県	7,103.91	764,596	高知市

- 愛媛県の人口は 100 万人以上で，かつ，
  高知県の人口は 50 万人以下である　F
  (命題の連言 (論理積，AND) も命題)
- 香川県の県庁所在地は丸亀市ではない　T
  (命題の否定 (NOT) も命題)
- 愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，または，
  愛媛県の県庁所在地は松山市である　T
  (命題の選言 (論理和，OR) も命題)

目次

記号論理

命題変数 (常識に基づいた定義)

命題を記号で表したもの

例：先ほどのデータベース

- P =「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」
- Q =「愛媛県の県庁所在地は松山市である」

命題から別の命題を得ること

例

- 2つの命題
  - P =「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」
  - Q =「愛媛県の県庁所在地は松山市である」

  の真偽から，次の命題
  - 「愛媛県の県庁所在地は宇和島市ではない」
  - 「愛媛県の県庁所在地は宇和島市か松山市である」

  の真偽は決定される
- つまり，
  命題から別の命題が得られ，その真偽が決まることがある

今からやること

そのような「別の命題の得られ方」と「その真偽の決まり方」を見る

否定

否定 (常識に基づいた定義)

命題 P の否定とは，P の真偽を反転させた命題
「$\neg P$」と表記する

「$\neg P$」を「$\sim P$」,「$\overline{P}$」とも表記する

格言

数学理解の基本は「定義」と「記法」の理解

P	$\neg P$
T	F
F	T

← 真理値表と呼ぶ

例

- $P =$「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」のとき
- $\neg P =$ 「愛媛県の県庁所在地は宇和島市ではない」

連言

連言 (常識に基づいた定義)

命題 P と Q の連言とは，
P と Q がともに真であるとき，そのときのみ真である命題
「$P \wedge Q$」と表記する

「連言」を「論理積」,「AND」ともいう

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例

- $P =$「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」
- $Q =$「愛媛県の県庁所在地は松山市である」のとき
- $P \wedge Q =$ 「愛媛県の県庁所在地は宇和島市であり，かつ，
  愛媛県の県庁所在地は松山市である」

選言

選言 (常識に基づいた定義)

命題 P と Q の選言とは,
P か Q が真であるとき，そのときのみ真である命題
「$P \vee Q$」と表記する

「選言」を「論理和」,「OR」ともいう

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例

- P =「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」
- Q =「愛媛県の県庁所在地は松山市である」のとき
- $P \vee Q$ = 「愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，または,
  愛媛県の県庁所在地は松山市である」

選言

選言 (常識に基づいた定義)

命題 P と Q の**選言**とは，
P か Q が真であるとき，そのときのみ真である命題
「$P \vee Q$」と表記する

「選言」を「論理和」,「OR」ともいう

P	Q	$P \vee Q$	
T	T	T	←注意
T	F	T	
F	T	T	
F	F	F	

例

- $P =$「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」
- $Q =$「愛媛県の県庁所在地は松山市である」のとき
- $P \vee Q =$ 「愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，**または**，愛媛県の県庁所在地は松山市である」

含意

含意 (常識に基づいた定義)

命題 P から Q への含意とは，P が真，Q が偽であるとき，そのときのみ偽である命題.「$P \to Q$」と表記する

「$P \to Q$」を「$P \supset Q$」とも書く

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例

- $P =$「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」
- $Q =$「愛媛県の県庁所在地は松山市である」のとき
- $P \to Q =$「愛媛県の県庁所在地が宇和島市であるならば，愛媛県の県庁所在地は松山市である」

同値

同値 (常識に基づいた定義)

命題 P と Q の同値とは，P と Q の真理値が等しいとき，そのときのみ真である命題.「$P \leftrightarrow Q$」と表記する

「$P \leftrightarrow Q$」を「$P \equiv Q$」とも書く

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例

- $P =$「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」
- $Q =$「愛媛県の県庁所在地は松山市である」のとき
- $P \leftrightarrow Q =$ 「愛媛県の県庁所在地が宇和島市であるとき，そのときに限り，愛媛県の県庁所在地は松山市である」

日本語との対応：例

論理の記号	対応する日本語
否定：$\neg P$	P ではない
連言：$P \wedge Q$	P かつ Q P であり，同時に，Q でもある
選言：$P \vee Q$	P または Q P あるいは Q P であるか，そうでなければ，Q である
含意：$P \to Q$	P ならば Q P であるとき，Q でなければならない
同値：$P \leftrightarrow Q$	P であるとき，そのときに限り Q である P と Q は同値である

注意 数学における「ならば」は，日常における「ならば」と意味が違う

例：含意の真理値を理解する

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

理解するための例をもう１つ

- 「欠席したら，落第する」という規則 (?) を考える
- 可能な状況で，この規則が守られたかどうかを考える

例：含意の真理値を理解する

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

理解するための例をもう 1 つ

- 「欠席したら，落第する」という規則 (?) を考える
- 可能な状況で，この規則が守られたかどうかを考える

欠席して，落第した　　　規則は守られた

例：含意の真理値を理解する

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

理解するための例をもう 1 つ

- 「欠席したら，落第する」という規則 (?) を考える
- 可能な状況で，この規則が守られたかどうかを考える

欠席して，落第した	規則は守られた
欠席して，落第しなかった	規則は守られなかった

例：含意の真理値を理解する

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

理解するための例をもう１つ

- 「欠席したら，落第する」という規則 (?) を考える
- 可能な状況で，この規則が守られたかどうかを考える

欠席して，落第した	規則は守られた
欠席して，落第しなかった	規則は守られなかった
欠席せず，落第した	規則は守られた

例：含意の真理値を理解する

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

理解するための例をもう１つ

- 「欠席したら，落第する」という規則 (?) を考える
- 可能な状況で，この規則が守られたかどうかを考える

欠席して，落第した	規則は守られた
欠席して，落第しなかった	規則は守られなかった
欠席せず，落第した	規則は守られた
欠席せず，落第しなかった	規則は守られた

命題論理式

演算がいろいろあるので...

演算を組み合わせて，複雑な命題を表現できる

例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

命題論理式 (常識に基づく定義)

命題論理式とは，命題を表す変数 (命題変数) と
命題の演算 $\neg$，$\land$，$\lor$，$\to$，$\leftrightarrow$ を意味を成すように組み合わせたもの
(命題論理式も命題を表す)

命題論理式でないものの例：$P \lor \land \lor Q$，$P \to (Q + R)$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する (数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\ P \to \neg\ Q\ ) \land \neg(\ \neg\ P\ \ \leftrightarrow(\ \ R\ \lor\ \ Q\ \ )\ )}$$

- 他の例：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \ \alpha+\beta\ \ ) = \ \ \sin\alpha\ \ \ \cos\beta\ \ +\ \ \cos\alpha\ \ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは**構造**を理解する　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \wedge \neg(\neg P \leftrightarrow (R \vee Q))$

$$\boxed{(\boxed{P \to \neg\ Q}) \wedge \boxed{\neg(\ \neg\ P\ \ \leftrightarrow(\ \ R\ \vee\ \ Q\ \ )\ )}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \ \alpha+\beta\ \ ) = \ \ \sin\alpha\ \ \cos\beta\ \ +\ \ \cos\alpha\ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg\ Q}}) \land \boxed{\neg(\ \neg\ P\ \ \leftrightarrow(\ \ R\ \lor\ \ Q\ \ )\ )}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \ \alpha + \beta\ \ ) = \ \ \sin\alpha\ \ \ \cos\beta\ \ \ +\ \ \ \cos\alpha\ \ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \wedge \neg(\neg P \leftrightarrow (R \vee Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \wedge \boxed{\neg (\neg P \leftrightarrow (R \vee Q))}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは**構造**を理解する　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P}\to\boxed{\neg\boxed{Q}}})\land\boxed{\neg(\boxed{\neg P \leftrightarrow (R \lor Q)})}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \land \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg P} \leftrightarrow (\boxed{R \lor Q})})}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \alpha+\beta\ ) = \ \sin\ \alpha\ \ \cos\beta\ +\ \cos\alpha\ \ \sin\ \beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \land \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{R \lor Q})})}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ ) = \ \sin\alpha\ \ \cos\beta\ + \ \cos\alpha\ \ \sin\beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \wedge \neg(\neg P \leftrightarrow (R \vee Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \wedge \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{\boxed{R} \vee \boxed{Q}})})}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ ) = \ \sin\ \alpha \ \ \cos\beta \ + \ \cos\alpha \ \ \sin\ \beta}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{\left(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}\right) \land \boxed{\neg \left(\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow \left(\boxed{\boxed{R} \lor \boxed{Q}}\right)}\right)}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin(\ \alpha + \beta\ )} = \boxed{\ \sin\alpha \quad \cos\beta \quad + \quad \cos\alpha \quad \sin\beta\ }}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \land \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{\boxed{R} \lor \boxed{Q}})})}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin(\boxed{\alpha + \beta})} = \boxed{\sin\alpha \; \cos\beta \; + \; \cos\alpha \; \sin\beta}}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは**構造**を理解する　　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \land \boxed{\neg (\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{\boxed{R} \lor \boxed{Q}})})}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin(\boxed{\boxed{\alpha} + \boxed{\beta}})} = \boxed{\sin\alpha \quad \cos\beta \quad + \quad \cos\alpha \quad \sin\beta}}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは構造を理解する　(数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}) \land \boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow (\boxed{\boxed{R} \lor \boxed{Q}})})}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin(\boxed{\boxed{\alpha} + \boxed{\beta}})} = \boxed{\boxed{\sin\alpha \quad \cos\beta} + \boxed{\cos\alpha \quad \sin\beta}}}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは**構造**を理解する (数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{\left(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{\neg \boxed{Q}}}\right) \land \boxed{\neg \left(\boxed{\boxed{\neg \boxed{P}} \leftrightarrow \left(\boxed{\boxed{R} \lor \boxed{Q}}\right)}\right)}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin\left(\boxed{\boxed{\alpha} + \boxed{\beta}}\right)} = \boxed{\boxed{\boxed{\sin\alpha}\boxed{\cos\beta}} + \boxed{\boxed{\cos\alpha}\boxed{\sin\beta}}}}$$

命題論理式の読み方

格言

文や文章を読むときは**構造**を理解する (数式も同様)

- 例：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

$$\boxed{(\boxed{\boxed{P}\to\boxed{\neg\boxed{Q}}})\land\boxed{\neg(\boxed{\boxed{\neg\boxed{P}}\leftrightarrow(\boxed{\boxed{R}\lor\boxed{Q}})})}}$$

- 他の例：$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\boxed{\sin(\boxed{\boxed{\alpha}+\boxed{\beta}})}=\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\sin\boxed{\alpha}}\boxed{\cos\boxed{\beta}}}}+\boxed{\boxed{\boxed{\cos\boxed{\alpha}}\boxed{\sin\boxed{\beta}}}}}}$$

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？

P	Q			$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T			?
T	F			?
F	T			?
F	F			?

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$\left(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}} \right) \to \boxed{\neg \boxed{Q}}$$

P	Q			$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T			?
T	F			?
F	T			?
F	F			?

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$\left(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}} \right) \to \boxed{\neg \boxed{Q}}$$

- 構造を見て，バラバラにする

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T			?
T	F			?
F	T			?
F	F			?

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}}) \to \boxed{\neg \boxed{Q}}$$

- 構造を見て，バラバラにする

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T			?
T	F			?
F	T			?
F	F			?
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$\left(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}}\right) \to \boxed{\neg\ \boxed{Q}}$$

- 構造を見て，バラバラにする

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T		?
T	F	F		?
F	T	T		?
F	F	T		?
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}}) \to \boxed{\neg \boxed{Q}}$$

- 構造を見て，バラバラにする

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T		?
T	F	F		?
F	T	T		?
F	F	T		?

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}}) \to \boxed{\neg \boxed{Q}}$$

- 構造を見て，バラバラにする

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T		?
T	F	F		?
F	T	T		?
F	F	T		?
	$\uparrow$		$\uparrow$	

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}}) \to \boxed{\neg \boxed{Q}}$$

- 構造を見て，バラバラにする

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	?
T	F	F	T	?
F	T	T	F	?
F	F	T	T	?
	$\uparrow$		$\uparrow$	

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}}) \to \boxed{\neg \boxed{Q}}$$

- 構造を見て，バラバラにする

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	?
T	F	F	T	?
F	T	T	F	?
F	F	T	T	?

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$\left(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}}\right) \to \boxed{\neg\ \boxed{Q}}$$

- 構造を見て，バラバラにする

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	?
T	F	F	T	?
F	T	T	F	?
F	F	T	T	?
		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}}) \to \boxed{\neg \boxed{Q}}$$

- 構造を見て，バラバラにする

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T
		↑	↑	↑

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- まずは構造を見る！

$$\left(\boxed{\boxed{P} \to \boxed{Q}} \right) \to \boxed{\neg \boxed{Q}}$$

- 構造を見て，バラバラにする

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

↑ これを「真理値表」と呼ぶ

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

下書き：真理値表を書く前に，まずは構造を見る

格言

解答において「下書き」と「清書」は明確に区別する

「考えた過程をすべて書け」という教えは 正しくない

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q				$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q			$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q		$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \lor \neg P$	$P \land (Q \lor \neg P)$	$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				
$\uparrow$		$\uparrow$			

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \lor \neg P$	$P \land (Q \lor \neg P)$	$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$
T	T	F			
T	F	F			
F	T	T			
F	F	T			
↑		↑			

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F			
T	F	F			
F	T	T			
F	F	T			

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F			
T	F	F			
F	T	T			
F	F	T			
	↑	↑	↑		

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T		
T	F	F	F		
F	T	T	T		
F	F	T	T		
	↑	↑	↑		

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T		
T	F	F	F		
F	T	T	T		
F	F	T	T		

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T		
T	F	F	F		
F	T	T	T		
F	F	T	T		
↑			↑	↑	

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T	T	
T	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	
F	F	T	T	F	
$\uparrow$			$\uparrow$	$\uparrow$	

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T	T	
T	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	
F	F	T	T	F	

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T	T	
T	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	
F	F	T	T	F	
				$\uparrow$	$\uparrow$

真理値表による分析：例 (1)

例題

命題変数 P, Q に対して，命題論理式「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える
この命題論理式の真理値表を書け

解答例 (清書)：この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \lor \neg P$	$P \land (Q \lor \neg P)$	$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$
T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	F	T
				$\uparrow$	$\uparrow$

真理値表による分析：書くときの注意

- 場合に漏れがないように
- 1 つの演算について 1 つの列を作るように
- 規則を当てはめた結果が右側に来るように
- 一方，罫線は引いても引かなくてもよい (もっと引いてもよい)

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	F	T

目次

『パズルランドのアリス』の第 55 問 (再掲)

『パズルランドのアリス』第 2 巻，18–19 ページより

- 「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいいました。
- 「赤の王さまが眠っていらっしゃるときは、
  王さまが信じなさることはすべてまちがっている。
- つまり本当のことでないのじゃ。
- けれども、王さまが目を覚ましていらっしゃるときは、
  信じなさることはすべて本当なのじゃ。
- さて、昨日の晩のぴったり十時に、赤の王さまは、
  いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っていると信じなさった。
- ではそのとき、赤の女王さまは、眠っていらっしゃったか、それとも
  目をさましていらっしゃったか、どうじゃ？」

論理によるモデル化

命題変数を導入

- $P =$ 赤の王さまが眠っている
- $Q =$ 赤の女王さまが眠っている

各命題を命題論理式として記述

- 王さまが信じていることは「$P \wedge Q$」
- 王さまのキャラクターから「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」
- 知りたいことは「Q」

つまり,

- 「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」を真とする「$Q$」は何？

真理値表

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

つまり，

- 「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」が真となるのは，「$Q$」が偽のときのみ
- よって，赤の女王さまは眠っていない

格言

論理は思考をまとめる道具

目次

集合

集合 (常識に基づく定義)

集合とはものの集まり

集合の記法

波かっこ 「{」と「}」を使って記述する

例：

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- { あ, い, う, え, お }

集合の要素とは？

集合を構成する１つ１つのものを要素または元と呼ぶ

格言

数学理解の基本は「定義」と「記法」の理解

要素であることの記法

記法

- x が集合 A の要素であることを次のように表記する
$$x \in A$$
- x が集合 A の要素ではないことを次のように表記する
$$x \notin A$$

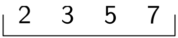
例：$A = \{$ あ, い, う, え, お $\}$ とすると

- あ $\in A$
- ま $\notin A$
- お $\in A$
- う $\in A$

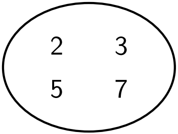
集合に対するイメージを持つ

集合 $\{2, 3, 5, 7\}$

1. 波カッコは箱



2. 波カッコは境界



オイラー図と呼ばれる

集合の記述法 (1)：要素を並べる

$$
\begin{aligned}
U \;=\; \{ & \text{アメリカ}, \text{イギリス}, \text{イタリア}, \text{オーストリア}, \text{オーストラリア}, \\
& \text{オランダ}, \text{カナダ}, \text{韓国}, \text{ギリシャ}, \text{スウェーデン}, \text{スイス}, \\
& \text{スペイン}, \text{ソ連}, \text{中国}, \text{ドイツ}, \text{西ドイツ}, \text{日本}, \text{ノルウェー}, \\
& \text{フィンランド}, \text{ブラジル}, \text{フランス}, \text{ベルギー}, \text{メキシコ}, \\
& \text{ユーゴスラビア}, \text{ロシア} \}
\end{aligned}
$$

集合の「外延的定義」と呼ばれる

注

集合に対して「$=$」が何を意味するのかは後の講義で紹介する

集合の記述法 (2)：性質を定める

$$U = \{x \mid x \text{ は (2016 年 9 月末までに) 近代オリンピックが開催された国}\}$$

記法

$\{x \mid x$ がこの集合の要素であるための (必要十分) 条件 $\}$

「$\mid$」の代わりに「：」や「;」を使うこともある

集合の「内包的定義」と呼ばれる

集合の記述法：他の例

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

集合の記述法：他の例

$$\begin{aligned} A &= \{2,3,5,7\} \\ &= \{7,2,5,3\} \end{aligned}$$

←並べる順番が違っても集合としては同じ

集合の記述法：他の例

$$
\begin{aligned}
A &= \{2,3,5,7\} \\
&= \{7,2,5,3\} \qquad \leftarrow \text{並べる順番が違っても集合としては同じ} \\
&= \{n \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例

$$
\begin{aligned}
A &= \{2,3,5,7\} \\
&= \{7,2,5,3\} \qquad \leftarrow \text{並べる順番が違っても集合としては同じ} \\
&= \{n \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \text{ は整数であり，かつ，} \\ n^4 - 17n^3 + 101n^2 - 247n + 210 = 0 \text{ を満たす} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例

$$
\begin{aligned}
A &= \{2,3,5,7\} \\
&= \{7,2,5,3\} \qquad \text{←並べる順番が違っても集合としては同じ} \\
&= \{n \mid n \text{ は 10 以下の素数である}\} \\
&= \left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \text{ は整数であり，かつ，} \\ n^4 - 17n^3 + 101n^2 - 247n + 210 = 0 \text{ を満たす} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

外延的定義の利点・欠点

利点

- 何が要素か分かりやすい

欠点

- 全要素を並べる必要がある
- 全要素を並べられないかも
- 集合の性質が分かりにくい

内包的定義の利点・欠点

利点

- 集合の性質が分かりやすい
- 全要素を並べなくてもよい

欠点

- 何が要素か分かりにくい
- よく書き間違える（要努力！）

集合の記述法：他の例 2

$$B = \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である}\}$$

集合の記述法：他の例 2

$$\begin{aligned} B &= \{n^2 \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である }\} \\ &= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \end{aligned}$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m + n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である }\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m + n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2+2, 2+3, 2+5, 2+7, 3+2, 3+3, 3+5, 3+7, \\
&\quad 5+2, 5+3, 5+5, 5+7, 7+2, 7+3, 7+5, 7+7\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m + n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2+2, 2+3, 2+5, 2+7, 3+2, 3+3, 3+5, 3+7, \\
&\quad 5+2, 5+3, 5+5, 5+7, 7+2, 7+3, 7+5, 7+7\} \\
&= \{4, 5, 7, 9, 5, 6, 8, 10, 7, 8, 10, 12, 9, 10, 12, 14\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m + n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2+2, 2+3, 2+5, 2+7, 3+2, 3+3, 3+5, 3+7, \\
&\quad 5+2, 5+3, 5+5, 5+7, 7+2, 7+3, 7+5, 7+7\} \\
&= \{4, 5, 7, 9, 5, 6, 8, 10, 7, 8, 10, 12, 9, 10, 12, 14\} \\
&= \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14\}
\end{aligned}
$$

空集合

空集合とは？

要素を持たない集合を空集合と呼び，「$\emptyset$」または「$\varnothing$」と表記する

注 1：空集合は「$\{\ \}$」とも書く

注 2：空集合の記号「$\emptyset$」と「$\varnothing$」はギリシャ文字「Φ」，「ϕ」と違う．
つまり「ファイ」とは読まない

注 3：「$\emptyset$」と「$\{\emptyset\}$」は違うものである

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}=$ すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}=$ すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}=$ すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}=$ すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}=$ すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2\in\mathbb{N}$
- $-3\notin\mathbb{N}$
- $-3\in\mathbb{Z}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $1 + \sqrt{2}i \notin \mathbb{R}$
- $1 + \sqrt{2}i \in \mathbb{C}$

目次

今日のまとめ

命題とその真偽

- 命題：「真」か「偽」が定まる文

命題論理式と真理値表

- 命題論理式：命題を組み合わせて得られた命題
- 真理値表：命題論理式の真偽を分析する道具

集合

- 集合の記述法 (要素を並べる，性質を定める)

論理学?: 補足

この講義で扱うのは「論理学」ではない！

- 後の授業で必要なことだけを扱った (「論理学を使う」という立場)
- そのため，常識に基づいて論理学のさわりを見た
- ちゃんとした「論理学」については別の機会に勉強を

「論理学」自体に興味がある場合は，以下の本を推薦

- レイモンド・スマリヤン (著)，田中 朋之，長尾 確 (訳),『スマリヤンの決定不能の論理パズル』，白揚社，2008 年.
- 戸田山 和久,『論理学をつくる』，名古屋大学出版会，2000 年.

集合の定義：補足

集合 (常識に基づく定義) 再掲

集合とはものの集まり

これを集合の定義だとすると，様々な「まずいこと」が起きると知られている

興味のある人は次のことばを調べてみる

- ラッセルのパラドックス (「まずいこと」の例)
- 公理的集合論 (「まずいこと」の解決法)

この授業では，集合自身についてあまり深く考えないことにする

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次