

離散数学 第 14 回
集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 2 月 13 日

最終更新 : 2017 年 2 月 14 日 12:27

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (14)

2017 年 2 月 13 日

1 / 33

スケジュール 後半 (予定)

- 8 写像 (1) : 像と逆像 (12月 19日)
- 9 写像 (2) : 全射と単射 (1月 16日)
- 10 関係 (1) : 関係 (1月 23日)
- 11 関係 (2) : 同値関係 (1月 30日)
- 12 関係 (3) : 順序関係 (2月 6日)
- 13 証明法 (4) : 数学的帰納法 (2月 8日)
- 14 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 (2月 13日)
 - 期末試験 (2月 20日)

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (14)

2017 年 2 月 13 日

3 / 33

写像の冪乗

目次

- 1 写像の冪乗
- 2 集合の再帰的定義
- 3 今日のまとめ

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (14)

2017 年 2 月 13 日

5 / 33

写像の冪乗

写像の冪乗 : 例題

例題 1

写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する。このとき、任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

確認

- ▶ $n = 2$ のとき : $f^2(x) = f(2x^2) = 2(2x^2)^2 = 2^3x^4$
- ▶ $n = 3$ のとき : $f^3(x) = f(2^3x^4) = 2(2^3x^4)^2 = 2^7x^8$
- ▶ $n = 4$ のとき : $f^4(x) = f(2^7x^8) = 2(2^7x^8)^2 = 2^{15}x^{16}$
- ▶ ...

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (14)

2017 年 2 月 13 日

7 / 33

スケジュール 前半

- 1 集合と論理 (1) : 命題論理 (10月 3日)
 - * 体育の日 (10月 10日)
- 2 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 (10月 17日)
- 3 集合と論理 (3) : 述語論理 (10月 24日)
- 4 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 (10月 31日)
 - * 休講 (11月 7日)
- 5 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 (11月 14日)
- 6 証明法 (3) : 集合に関する証明 (11月 21日)
 - * 調布祭片付け (11月 28日)
- 7 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 (12月 5日)
 - 中間試験 (12月 12日)

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (14)

2017 年 2 月 13 日

2 / 33

今日の概要

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 再帰的定義を通して, 写像の冪乗を理解する
- ▶ 集合を再帰的に定義する方法を理解する
- ▶ 構造的帰納法による証明ができるようになる

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (14)

2017 年 2 月 13 日

4 / 33

写像の冪乗

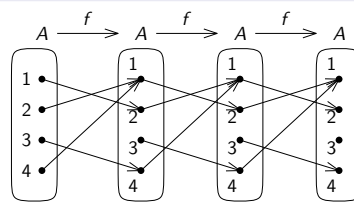
写像の冪乗

集合 A と写像 $f: A \rightarrow A$

写像の冪乗とは?

0 以上の整数 n に対して f の冪乗 $f^n: A \rightarrow A$ を次で定義する

$$f^n = \begin{cases} \text{id}_A & (n = 0 \text{ のとき}) \\ f \circ f^{n-1} & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



- ▶ $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 1$
- ▶ $f^2(1) = 1, f^2(2) = 2, f^2(3) = 1, f^2(4) = 2$
- ▶ $f^3(1) = 2, f^3(2) = 1, f^3(3) = 2, f^3(4) = 1$

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (14)

2017 年 2 月 13 日

6 / 33

写像の冪乗

写像の冪乗 : 例題 — 証明 (1)

例題 1

写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する。このとき、任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

証明 (基底段階) : まず, $n = 1$ のときに正しいことを証明する。

- ▶ 左辺 = $f^1(x) = f(x) = 2x^2$
- ▶ 右辺 = $2^{2^1-1}x^{2^1} = 2x^2$
- ▶ したがって, $n = 1$ のとき, $f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$ は正しい。

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (14)

2017 年 2 月 13 日

8 / 33

例題 1

写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する。このとき、任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

証明 (帰納段階)：次に、任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える。

- ▶ $f^k(x) = 2^{2^k-1}x^{2^k}$ が正しいと仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $f^{k+1}(x) = 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}}$ である。

目次

① 写像の冪乗

② 集合の再帰的定義

③ 今日のまとめ

文字列の定義

文字の集合 Σ (アルファベットと呼ぶことが多い)

文字列とは？

 Σ 上の文字列とは、次を満たすものこと

- 1 ϵ は Σ 上の文字列である (ϵ は空列を表す)
- 2 s が Σ 上の文字列であり、 $x \in \Sigma$ ならば、 xs も Σ 上の文字列である
- 3 このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

 Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す例： $\Sigma = \{a, b\}$ のとき

$$\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, baa, aab, bab, aba, bba, abb, bbb, \dots\}$$

再帰的定義を理解する (2)：認識する

文字列とは？

 Σ 上の文字列とは、次を満たすものこと

- 1 ϵ は Σ 上の文字列である (ϵ は空列を表す)
- 2 s が Σ 上の文字列であり、 $x \in \Sigma$ ならば、 xs も Σ 上の文字列である
- 3 このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

 Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す
$$\begin{array}{c} bab \\ | \\ ab \\ | \\ b \\ | \\ \epsilon \end{array}$$

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x) &= (f \circ f^k)(x) && \text{(写像の冪乗の定義)} \\ &= f(f^k(x)) && \text{(写像の合成の定義)} \\ &= f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)} \\ &= 2(2^{2^k-1}x^{2^k})^2 && \text{(} f \text{ の定義)} \\ &= 2^{1+2(2^k-1)}x^{2 \cdot 2^k} && \text{(計算して整理)} \\ &= 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}} && \text{(更に整理)} \end{aligned}$$

したがって、 $f^{k+1}(x) = 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}}$ は正しい。□

「辞書」をどのように定義するか？

「辞書」をどのように定義するか？

- ▶ 辞書は単語を集めたもの \rightsquigarrow ∴ 辞書は**単語の集合**

「単語」をどのように定義するか？

- ▶ 単語は文字を並べたもの \rightsquigarrow ∴ 単語は**文字の列**

「文字」をどのように定義するか？

- ▶ 文字は**集合の要素**

英語ならば、 $\{a, b, c, d, \dots, x, y, z\}$

「列」をどのように定義するか？

これがここからの話

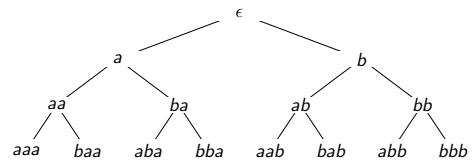
- ▶ 再帰的に定義する

再帰的定義を理解する (1)：生成する

文字列とは？

 Σ 上の文字列とは、次を満たすものこと

- 1 ϵ は Σ 上の文字列である (ϵ は空列を表す)
- 2 s が Σ 上の文字列であり、 $x \in \Sigma$ ならば、 xs も Σ 上の文字列である
- 3 このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

 Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す

再帰的定義を理解する (2)：認識する

文字列とは？

 Σ 上の文字列とは、次を満たすものこと

- 1 ϵ は Σ 上の文字列である (ϵ は空列を表す)
- 2 s が Σ 上の文字列であり、 $x \in \Sigma$ ならば、 xs も Σ 上の文字列である
- 3 このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

 Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す
$$\begin{array}{c} bca \\ | \\ ca \end{array} \times$$
 bca は $\{a, b\}$ 上の文字列ではない

格言

「生成」と「認識」は集合の再帰的定義の 2 つの側面

文字列の長さ

文字列の長さ (直感に基づく定義)

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さは、 s に含まれる Σ の要素の数

文字列	長さ
ϵ	0
a	1
b	1
aa	2
abb	3
$baabaabb$	8

ちゃんと定義するには?

文字列の再帰的定義に沿って、その長さも再帰的に定義する

文字列の性質

文字の集合 Σ

例題

Σ 上の任意の文字列 $s \in \Sigma^*$ と任意の文字 $y \in \Sigma$ に対して
 $sy \in \Sigma^*$
 となることを証明せよ

証明の方針

文字列の再帰的定義にそって、証明も帰納法で行う

→ 構造的帰納法

文字列の性質: 証明 (1)

証明 (基底段階): $s = \epsilon$ のときを考える

- ▶ 任意の文字 $y \in \Sigma$ を考える
- ▶ このとき、 $sy = \epsilon y = y$
- ▶ $\epsilon \in \Sigma^*$ かつ $y \in \Sigma$ なので、文字列の定義より $y = y\epsilon \in \Sigma^*$
- ▶ したがって、 $sy \in \Sigma^*$

文字列の性質: 証明 (3)

証明 (帰納段階):

- ▶ 任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- ▶ 任意の $y \in \Sigma$ に対して $sy \in \Sigma^*$ であると仮定する
- ▶ 任意の $y \in \Sigma$ を考える
- ▶ 帰納法の仮定より、 $sy \in \Sigma^*$
- ▶ $sy \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ から、文字列の定義より、 $xsy \in \Sigma^*$ □

文字列の長さ: 再帰的定義

文字列の長さ: 再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

- 1 $\ell(\epsilon) = 0$
- 2 $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば、 $\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$\begin{aligned} \ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\ &= 1 + (1 + \ell(bb)) \\ &= 1 + (1 + (1 + \ell(b))) \\ &= 1 + (1 + (1 + (1 + \ell(\epsilon)))) \\ &= 1 + (1 + (1 + (1 + 0))) \\ &= 4 \end{aligned}$$

注意

より正確には、 $\ell: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}$ という写像を再帰的に定義している

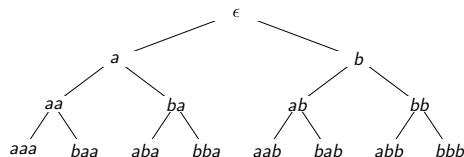
文字列に対する構造的帰納法

数学的帰納法による証明法

「任意の文字列 $s \in \Sigma^*$ に対して、 $P(s)$ 」という形の命題の証明

- 1 $P(\epsilon)$ を証明 (基底段階)
- 2 「任意の文字列 $s \in \Sigma^*$ と文字 $x \in \Sigma$ に対して『 $P(s)$ ならば $P(xs)$ 』」を証明 (帰納段階)

「生成」の視点を思い出す



今の例の場合: $P(s) =$ 「任意の文字 $y \in \Sigma$ に対して $sy \in \Sigma^*$ 」

文字列の性質: 証明 (2)

証明 (帰納段階):

- ▶ 任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- ▶ 任意の $y \in \Sigma$ に対して $sy \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

任意の $y \in \Sigma$ に対して、 $xsy \in \Sigma$ であること

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第4回講義より)

- 1 「任意の〜を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「回文」を定義する

回文 (かいぶん)

(デジタル大辞泉)

- 1 複数の人に順に回して知らせるようになった手紙や通知。回状。まわしづみ。かいもん。
- 2 和歌・俳諧などで、上から読んでも下から逆に読んでも同じ音になるように作ってある文句。「たけやぶやけた」の類。かいもん。

2の意味での回文の例

(<http://kaibunfan.com/>より)

- ▶ できたら、しらたきで。
- ▶ 静岡を図示。
- ▶ リモコンてんこ盛り
- ▶ 良い知らせらしいよ。
- ▶ イタリアで、トマトはトマトでありたい
- ▶ イタリアでも、イノシシの芋でありたい

回文を再帰的に定義する

文字の集合 Σ

回文とは？

 Σ 上の回文とは、 Σ 上の文字列で次を満たすものこと

- 1 ϵ は Σ 上の回文である
- 2 任意の $x \in \Sigma$ に対して x は Σ 上の回文である
- 3 s が Σ 上の回文であり、 $x \in \Sigma$ ならば、 xsx も Σ 上の回文である
- 4 このようにして生成されるものだけが Σ 上の回文である

例: $\Sigma = \{a, b\}$ のとき $\epsilon, a, b, aa, bb, aaa, bab, aba, bbb, \dots$

例題: 次の写像はどんな操作を行う写像だろうか？

次の写像 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ を考える

- 1 $f(\epsilon) = \epsilon$
- 2 $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば、 $f(xs) = xx f(s)$

考えたいこと

- ▶ この写像 f が行う操作は何なのか？
- ▶ この写像 f がうまく定義されているか？ ($f(s) \in \Sigma^*$ なのか?)

例題: 例を見ている

次の写像 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ を考える

- 1 $f(\epsilon) = \epsilon$
- 2 $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば、 $f(xs) = xx f(s)$

$$\begin{aligned}
 f(abbaa) &= aa f(bbaa) \\
 &= aabb f(baa) \\
 &= aabbbb f(aa) \\
 &= aabbbbbaa f(a) \\
 &= aabbbbbaaaa f(\epsilon) \\
 &= aabbbbbaaaa
 \end{aligned}$$

例題: うまく定義されていること

次の写像 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ を考える

- 1 $f(\epsilon) = \epsilon$
- 2 $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば、 $f(xs) = xx f(s)$

証明すること

任意の $s \in \Sigma^*$ に対して $f(s) \in \Sigma^*$ であること

構造的帰納法で証明する

例題: うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階): $s = \epsilon$ とする

- ▶ f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので、文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階):

- ▶ 任意の $s \in \Sigma^*$ と $x \in \Sigma$ を考え、 $f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する
- ▶ 証明すべきことは、 $f(xs) \in \Sigma^*$ である。
- ▶ f の定義より、 $f(xs) = xx f(s)$
- ▶ $f(s) \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ より、 $xf(s) \in \Sigma^*$
- ▶ $xf(s) \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ より、 $xxf(s) \in \Sigma^*$
- ▶ したがって、 $f(xs) \in \Sigma^*$ □

目次

- 1 写像の冪乗
- 2 集合の再帰的定義
- 3 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 再帰的定義を通して、写像の冪乗を理解する
- ▶ 集合を再帰的に定義する方法を理解する
- ▶ 構造的帰納法による証明ができるようになる